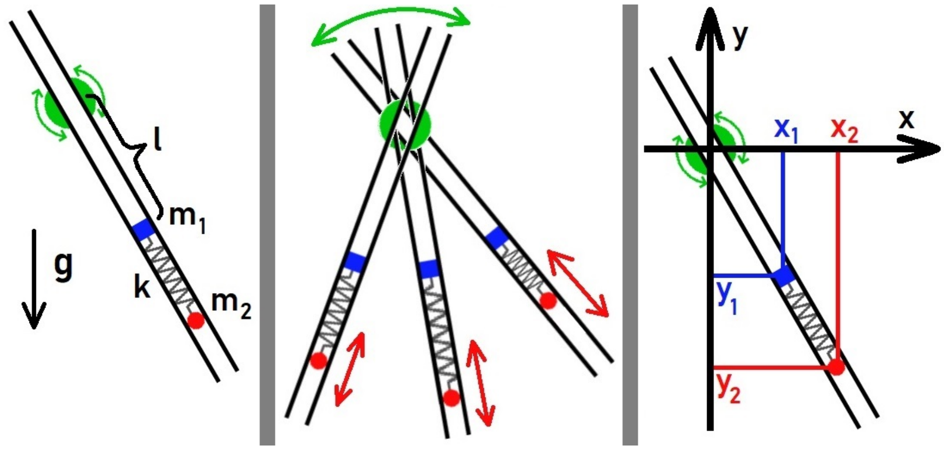
Ďalšie Príklady k Predmetu
Teoretická Mechanika

Časť 1

1. overiť rovnosť
$$(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\left(\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}\right)=(\vec{a}\cdot\vec{c})\left((\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}\right)$$
2. overiť rovnosť
$$\mathrm{div}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{B}\cdot\mathrm{rot}\vec{A}-\vec{A}\cdot\mathrm{rot}\vec{B}$$
3. overiť rovnosť
$$\mathrm{rot}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}+\left(\mathrm{div}\vec{B}\right)\vec{A}-\left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}-\left(\mathrm{div}\vec{A}\right)\vec{B}$$
kde $\vec{B}\cdot\vec{\nabla}$ znamená $B_i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$, takže $\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}=B_i\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial x^i}$,
alebo $\left\{\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}\right\}_i=B_j\partial_jA_i$

$\vdots\,.\,.\,\vdots\,\vdots\,.\,.\,\vdots\,\vdots\,.\,.\,\vdots\,\vdots\,.\,.\,\vdots\,\vdots\,.\,.\,\vdots$ **Časť** $\vdots\,.\,.\,\vdots$ **2** $\vdots\,.\,.\,\vdots\,\vdots\,.\,.\,\vdots\,\vdots\,.\,.\,\vdots\,\vdots\,.\,.\,\vdots\,\vdots\,.\,.\,\vdots$

Dlhá, tenká a ľahká rúrka sa môže voľne otáčať v rovine. V smere roviny pôsobí aj tiažové zrýchlenie g. Vo vnútri rúrky je k nej pevne uchytené teliesko s hmotnosťou m_1 vo vzdialenosti l od bodu, okolo ktorého sa rúrka otáča. Druhé teliesko s hmotnosťou m_2 sa môže voľne kĺzať vo vnútri rúrky, pričom je spojené s prvým telieskom pružinou s tuhosťou k a nulovou pokojovou dĺžkou. Situácia je znázornená na prvých dvoch obrázkoch:



Ak si zavediemie Kartézske súradnice x a y ako na treťom obrázku, tak pre telieska s hmotnosťami m_1 a m_2 vieme väzby vyjadriť ako

$$x_1^2 + y_1^2 = l^2, \qquad \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1},$$

pričom potenciálna energia je

$$U\left(x_1, y_1; x_2, y_2\right) = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + \frac{1}{2} k \left[\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2\right].$$

(Príklad je jednoznačne zadaný týmito tromi vzťahmi a vysvetlenie uvedené vyššie v princípe nie je potrebné.)
Úlohou je:

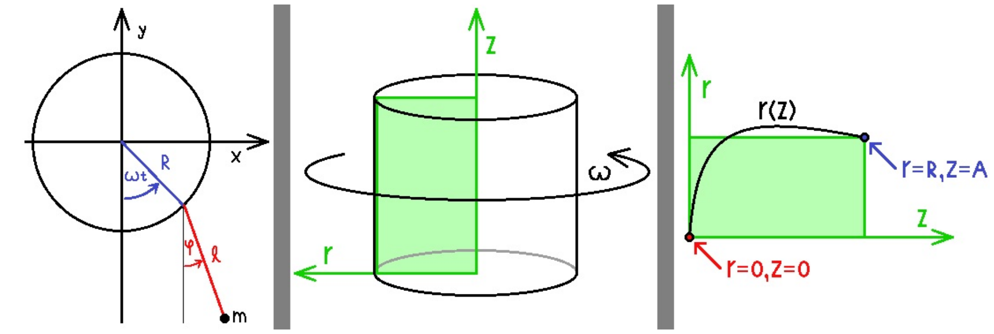
1. Zaviesť zovšeobecnené súradnice.
   (4 súradince x_1, y_1; x_2, y_2 & 2 väzby $\implies$ 2 zovšeobecnené súradnice)

2. Nájsť maticu kinetickej energie v zovšeobecnených súradniciach,
   $$T = \frac{1}{2}\, T_{ab} \left(\cdot\right)^a \left(\cdot\right)^b = \text{výraz v tvare } \frac{1}{2} \left(\dot{\oslash}, \dot{\sqcup}\right) \underbrace{\begin{pmatrix} \diamond & \bullet \\ \bullet & \triangleright \end{pmatrix}}_{\text{matica } T_{ab}} \begin{pmatrix} \dot{\oslash} \\ \dot{\sqcup} \end{pmatrix}$$

3. Prepísať potenciálnu energiu do zovšeobecnených súradníc a napísať Lagranžián, $L = T - U$.

4. Z Eulerových–Lagrangeových rovníc (v zovšeobecnených súradniciach),
   $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\odot}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \odot} = 0, \quad \ldots$$
   napísať pohybové rovnice. (2 nezávislé diferenciálne rovnice druhého rádu)

Časť 3



1. Závažie s hmotnosťou m je zavesené na (bezhmotnej) paličke dĺžky l, ktorej druhý koniec sa pohybuje po kružnici s polomerom R s uhlovou frekvenciou ω. Všetko prebieha v rovine x-y a v beztiaži (bez tiažového zrýchlenia) tak ako na prvom obrázku. Väzba je preto daná vzťahom
$$(x - R\sin\omega t)^2 + (y + R\cos\omega t)^2 = l^2$$
a Lagranžián je daný iba kinetickou energiou,
$$L = T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right).$$
Úlohou je ukázať, že ak si za zovšeobecnenú súradnicu vyberieme uhol φ tak ako na obrázku, potom Lagrangeove rovnice dávajú pohybovú rovnicu
$$\ddot{\varphi} + \frac{R\omega^2}{l}\sin\left(\varphi - \omega t\right) = 0.$$

2. Najprv pochopiť (ideálne doriešiť) príklad $\boxed{4.4}$ v texte "rozšírený sylabus" podľa návodu tam uvedeného. Úlohou je podobným postupom nájsť brachystochronu v rotujúcej sústave v beztiaži (rotujúci cylinder vo vesmíre) takú, ktorá pri štarte s nulovou rýchlosťou začína na osi rotácie[1] a svoj pohyb končí v polomere R, pričom pozdĺž osi rotácie prejde vzdialenosť A, viď obrázky 2 a 3. Navrhovaný postup:

   (a) Napísať účinok pre funkciu $r(z)$: infinitezimálny kúsok brachystochrony má dĺžku $dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}dz$; rýchlosť pohybu hmotného bodu po brachystochrone je $v = \omega r$, čo sa dá odvodiť zo zákona zachovania energie, $E = \frac{1}{2}mv^2 + U$, kde potenciálna energia v rotujúcej sústave je $U = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$, a z fixovania energie $E = 0$ z okrajovej podmienky na začiatku pohybu, $r = 0$, $z = 0$; čas pohybu po brachystochrone je potom
$$t = \int dt = \int \frac{dl}{v} = \int\limits_0^A \frac{\sqrt{1 + r'^2}}{\omega r}dz,$$

[1] V skutočnosti iba veľmi blízko tejto osi, alebo s veľmi malou rýchlosťou, aby sa pohyb mohol vôbec začať, viď druhá (dlhá) poznámka pod čiarou.

takže to, čo matematicky hrá úlohu Lagranžiánu, je

$$L[z,r,r'] = \frac{\sqrt{1+r'^2}}{\omega r}.$$

(b) Využiť nezávislosť Lagranžiánu od z, teda použiť rovnicu

$$r'\frac{\partial L}{\partial r'} - L = K = \text{konšt.}$$

(c) Získanú rovnicu separovať a po preintegrovaní ukázať, že riešenie spĺňajúce zadané okrajové podmienky je

$$(z-c)^2 + r^2 = c^2, \quad \text{kde} \quad c = \frac{R^2+A^2}{2A},$$

(kružnica).[2]

[2]Ak tento výsledok dosadíme do integrálu pre výpočet času pohybu po brachystochrone, dostaneme

$$t = \frac{c^2}{\omega}\int\limits_0^A \frac{dz}{z\,(2c-z)}.$$

Funkcia, ktorú tu integrujeme, má póly v $z=0$ a $z = 2c = \dfrac{R^2}{A} + A > A$, takže integrál tejto funkcie na intervale $z \in \langle 0, A\rangle$ diverguje logaritmicky na dolnej hranici integrovania (na začiatku pohybu).

Dôvod je ten, že pri uvažovaných okrajových podmienkach pohyb po brachystochrone ani len nezačne a hmotný bod zostane po celý čas na osi otáčania. (Nevie sa rozhodnúť, ktorým smerom vyraziť, pretože všetky smery sú rovnocenné.) Na započatie pohybu potrebujeme malý impulz alebo musí začať trochu mimo osi rotácie, takže okrajovú podmienku pre začiatok pohybu treba modifikovať, čo vedie na modifikáciu Lagranžiánu:

$$r=0, \quad v=\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad v=\sqrt{\omega^2r^2+\varepsilon^2} \quad \Longrightarrow \quad L[z,r,r'] = \frac{\sqrt{1+r'^2}}{\sqrt{\omega^2r^2+\varepsilon^2}}, \quad \text{alebo}$$

$$r=\eta, \quad v=0 \quad \Longrightarrow \quad v=\omega\sqrt{r^2-\eta^2} \quad \Longrightarrow \quad L[z,r,r'] = \frac{\sqrt{1+r'^2}}{\omega\sqrt{r^2-\eta^2}},$$

kde ε a η sú malé veličiny.

V oboch prípadoch ide o inú a oveľa ťažšiu úlohu ako tú, ktorú ste vyriešili. Tieto úlohy je možné vyriešiť iba v kvaratúrach cez eliptické integrály. Napríklad v prvom prípade dostaneme

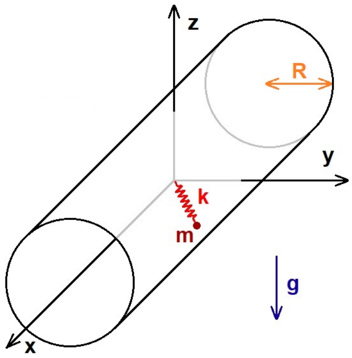
$$\int\limits_0^{r(z)} \frac{|K|\sqrt{\omega^2r^2+\varepsilon^2}}{\sqrt{1-K^2\left(\omega^2r^2+\varepsilon^2\right)}}dr = z$$

a celkový čas pohybu po brachystochrone sa dá počítať ako

$$t = \int\limits_0^R \frac{dr}{\sqrt{\omega^2r^2+\varepsilon^2}\sqrt{1-K^2\left(\omega^2r^2+\varepsilon^2\right)}},$$

čo je už integrál, ktorý na dolnej hranici integrovania (na začiatku pohybu) konverguje. Pre veľmi malé ε a η je však výsledok úlohy, ktorú ste vyriešili (brachystochrona v tvare kružnice), blízky k výsledkom úloh s modifikovanými (realistickejšími) Lagranžiánmi.

:::::::::::::::::::::: Časť ::::: 4 ::::::::::::::::::::::

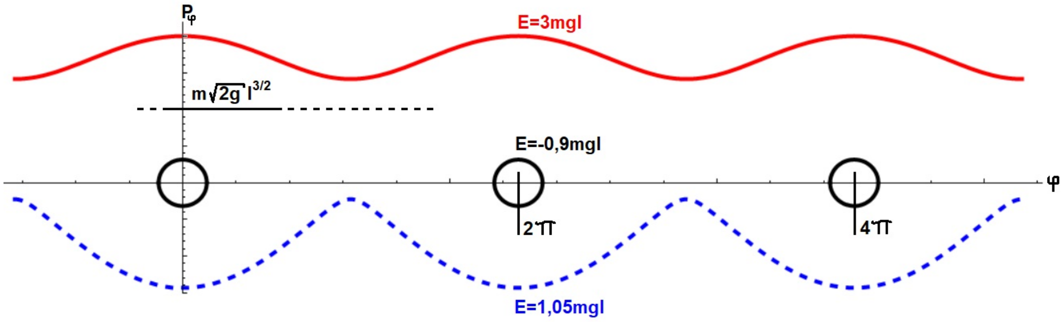


1. Hmotný bod sa môže pohybovať iba po povrchu vodorovne položeného valca s polomerom R tak, ako na obrázku. Je pritom spojený s počiatkom (na osi valca) pružinou s tuhosťou k a nulovou pokojovou dĺžkou a pôsobí naň aj tiažové zrýchlenie veľkosti g smerom nadol. Takže v kartézskych súradniciach je väzba daná vzťahom
$$y^2 + z^2 = R^2, \qquad (x - \text{ľubovoľné})$$
a potenciálna energia je
$$U = mgz + \frac{1}{2}k(x^2 + \underbrace{y^2 + z^2}_{R^2 \text{ z väzby}}).$$
Úlohou je
   (a) zaviesť zovšeobecnené súradnice a nájsť Lagranžián vyjadrený cez ne, $L = L(q, \dot{q})$,
   (b) nájsť zovšeobecnené hybnosti, $p_a = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}$, a zostaviť Hamiltonián, $H = H(q, p)$,
   (c) napísať Hamiltonove rovnice (mali by to byť 4 diferenciálne rovnice prvého rádu).

2. Štvorec momentu hybnosti je funkciou na fázovom priestore, $L^2 = L_i L_i$, $L_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k$. Poissonove zátvorky dvoch funkcií na fázovom priestore f a g sa definujú ako $\{f, g\} = \dfrac{\partial f}{\partial p_i}\dfrac{\partial g}{\partial x^i} - \dfrac{\partial f}{\partial x^i}\dfrac{\partial g}{\partial p_i}$. Úlohou je ukázať, že nasledujúce Poissonove zátvorky
   (a) $\{L^2, p^2\}$, (kde $p^2 = p_i p_i$)
   (b) $\{L^2, \vec{x} \cdot \vec{p}\}$, (kde $\vec{x} \cdot \vec{p} = x^i p_i$)

   vyjdú obe rovné nule. (Oplatí sa najprv ukázať, že $L^2 = x^2 p^2 - (\vec{x} \cdot \vec{p})^2$, a ďalej počítať buď priamo, alebo využívať antisymetriu, bilinearitu a Leibnitzovskosť Poissonových zátvoriek (príklad $\boxed{5.7}$ z textu "rozšírený sylabus") a vzťahy $\{x^i, x^j\} = 0 = \{p_i, p_j\}$ a $\{p_i, x^j\} = \delta_{ij}$ (príklad $\boxed{5.11}$ z textu "rozšírený sylabus"))

⁝ . . ⁝ ⁝ . . ⁝ ⁝ . . ⁝ Časť ⁝ . . ⁝ 5 ⁝ . . ⁝ ⁝ . . ⁝ ⁝ . . ⁝



1. Hamiltonián pre matematické kyvadlo je $H = T+U = \dfrac{P_\varphi^2}{2ml^2} - mgl\cos\varphi$. Na obrázku sú preň vo fázovom priestore (rovina φ, P_φ) pre ilustráciu vyznačené krivky pre niektoré hodnoty celkovej energie (červená čiara $E = 3mgl$, modrá prerušovaná čiara $E = 1,05mgl$, čierne čiary $E = -0,9mgl$), pričom na osi P_φ je vyznačená aj typická hodnota momentu hybnosti $P_\varphi = m\sqrt{2g}l^{3/2}$ a na osi φ sú vyznačené hodnoty $\varphi = 2\pi$ a $\varphi = 4\pi$.

   (a) Nakreslite kompletný fázový portrét (pre akékoľvek hodnoty celkovej energie) aj so správnymi šípkami. Smerovanie šípiek zdvôvodnite.

   (b) V akom rozmedzí môže byť celková energia E a prečo?

   (c) Akým pohybom kyvadla zodpovedá celková energia veľmi blízka hodnote $E = mgl$? Vyšetrite oba prípadady, teda prípad $E = mgl + |\epsilon|$ a aj $E = mgl - |\epsilon|$, kde $|\epsilon| \ll mgl$.

2. Uvažujme Lagranžián $L[\cancel{t}, x, y, \dot{x}, \dot{y}] = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}\alpha\left(\dot{x}y + x\dot{y}\right)$, kde m a α sú konštanty.

   (a) Ukážte, že Lagranžove pohybové rovnice dávajú rovnice pre rovnomerný priamočiary pohyb, $\ddot{x} = 0$ a $\ddot{y} = 0$.[3]

   (b) Nájdite vyjadrenie zovšeobecnených hybností P_x a P_y cez súradnice x, y a ich časové derivácie $\dot{x}$, $\dot{y}$.

   (c) Ukážte, že Hamiltonián vyjde
   $$H[\cancel{t}, x, y, P_x, P_y] = \frac{1}{2m}\left[\left(P_x + \frac{1}{2}\alpha y\right)^2 + \left(P_y + \frac{1}{2}\alpha x\right)^2\right]$$

3. Lagranžián pre voľný pád v homogénnom tiažovom poli (v smere osi z) je $L[\cancel{t}, z, \dot{z}] = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz$. Napíšte príslušný Hamiltonián a nakreslite fázový portrét (čiary so šípkami v správnom smere v rovine z, P_z).

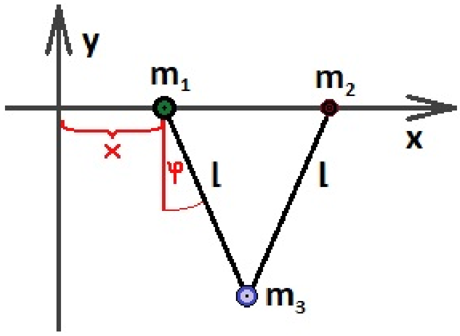
[3] Musí to tak vyjsť, pretože náš Lagranžián je Lagranžiánom voľnej častice $L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$ plus úplná časová derivácia funkcie $f = -\frac{1}{2}\alpha xy$, takže z variačného princípu ľahko vidno, že pridanie člena $\dot{f} = -\frac{1}{2}\alpha\left(\dot{x}y + x\dot{y}\right)$ nič nemení.

4. Lagranžián pre viacrozmerný harmonický oscilátor je $L[\cancel{t}, \vec{r}, \dot{\vec{r}}] = = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$. Škálovaním polohového vektora $\vec{r}$ a času t v Lagranžiáne ukážte, že frekvencia kmitov takéhoto oscilátora nezávisí od amplitúdy.

5. Lagranžián pre pohyb v gravitačnom poli vo svete s 2020 priestorovými rozmermi je $L[\cancel{t}, \vec{r}, \dot{\vec{r}}] = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - \frac{\alpha}{r^{2018}}$.[4] Škálovaním polohového vektora $\vec{r}$ a času t v Lagranžiáne nájdite tretí Keplerov zákon v 2020 rozmernom svete, teda nájdite stupne mocnín m a n tak, aby platilo $\frac{(\text{veľkosť obežnej dráhy})^m}{(\text{čas obehu})^n} = \text{konštanta}.$

[4] V 2020 rozmernom priestore sila klesá s 2019-tou mocninou, takže v potenciáli musí byť 2018-ta mocnina.

⁝ . . ⁝ ⁝ . . ⁝ ⁝ . . ⁝ ⁝ . . ⁝ ⁝ . . ⁝ **Časť** ⁝ . . ⁝ **6** ⁝ . . ⁝ ⁝ . . ⁝ ⁝ . . ⁝ ⁝ . . ⁝ ⁝ . . ⁝



1. Na obrázku je sústava hmotných bodov s hmotnosťami m_1, m_2 a m_3 s nasledujúcimi väzbami: Prvé dva hmotné body sú viazané na os x, a tretí je spojený s každým z nich ľahkými paličkami dĺžky l tak, ako na obrázku. Zaveďme zovšeobecnené súradnice x a φ,

   $$m_1 : \begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = 0 \end{cases} \qquad m_2 : \begin{cases} x_2 = x + 2l\sin\varphi \\ y_2 = 0 \end{cases} \qquad m_3 : \begin{cases} x_3 = x + l\sin\varphi \\ y_3 = -l\cos\varphi \end{cases}$$

   V smere osi y pôsobí smerom nadol tiažové zrýchlenie g. Pohybové rovnice pre túto úlohu sú príliš zložité, ale dá sa tu využiť zákon zachovania, z ktorého dostaneme aspoň niečo. Úlohou je:

   (a) Ukázať, že Lagranžián vyjde

   $$\begin{aligned} L[\cancel{t}, \cancel{x}, \varphi, \dot{x}, \dot{\varphi}] &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)\,\dot{x}^2 + (2m_2 + m_3)\,l\cos\varphi\dot{x}\dot{\varphi} + \\ &+ \left(2m_2\cos^2\varphi + \frac{1}{2}m_3\right) l^2\dot{\varphi}^2 + m_3 gl\cos\varphi. \end{aligned}$$

   (b) Využiť cykličnosť súradnice x a napísať diferenciálnu rovnicu prvého rádu za zachovávanie zovšeobecnenej hybnosti $P_x = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}$.

   (c) Uvažovať počiatočné podmienky:

   $$x(0) = 0, \quad \varphi(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0.$$

   Z týchto počiatočných podmienok špecifikovať hodnotu zachovávajúcej sa veličiny P_x[5] a následne preintegrovaním rovnice za zachovávanie P_x odvodiť závislosť medzi x a φ:[6]

   $$x = \frac{2m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3}\,l\,(1 - \sin\varphi)$$

   (d) Zmení sa výsledok (závislosť medzi x a φ) ak vypneme tiažové zrýchlenie?

2. Lagranžián relativisticlej častice v jednom rozmere, na ktorú nepôsobia

---

[5] Akú hodnotu má na počiatku, takú hodnotu má stále, keďže sa zachováva.

[6] Kompletné riešenie si žiada poznať x a φ ako funkcie času, čo nevieme, ale zákon zachovania nám prezrádza aspoň závislosť medzi nimi.

žiadne sily, je[7]

$$L[\xcancel{t}, \xcancel{x}, \dot{x}] = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}.$$

Úlohou je:

(a) Ukázať, že zovšeobecnená hybnosť je

$$p = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}}.$$

(b) Ukázať, že Hamiltonián vyjde[8]

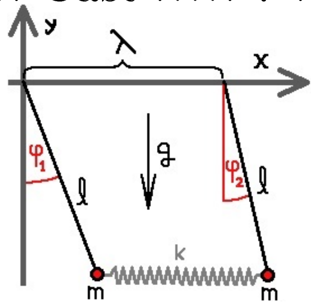
$$H[\xcancel{t}, \xcancel{x}, p] = p\dot{x} - L[\xcancel{t}, \xcancel{x}, \dot{x}] = \cdots = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}.$$

(Výraz pre p umocniť a vyjadriť $\dot{x}$ cez p, potom dosadiť do vzťahu pre Hamiltonián.) Relativistický vzťah pre energiu je potom $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$.

[7]Pre rýchlosti oveľa menšie než rýchlosť svetla dostávame $L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} \approx$
$\approx -mc^2\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\dot{x}^2}{c^2}\right) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mc^2 =$ kinetická energia $-$ pokojová energia.

[8]Pre malé hybnosti máme $H = c\sqrt{m^2c^2 + p^2} = mc^2\sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2} \approx$
$\approx mc^2\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{p}{mc}\right)^2\right] = \frac{p^2}{2m} + mc^2 =$ kinetická energia $+$ pokojová energia.

⁝ . . ⁝ ⁝ . . ⁝ ⁝ . . ⁝ ⁝ . . ⁝ ⁝ . . ⁝ Časť ⁝ . . ⁝ 7 ⁝ . . ⁝ ⁝ . . ⁝ ⁝ . . ⁝ ⁝ . . ⁝ ⁝ . . ⁝



Na obrázku sú dve identické rovinné kyvadlá s hmotnosťami m a dĺžkami závesov l. Kyvadlá sú zavesené vo vzájomnej vzdialenosti λ a sú spojené pružinou tuhosti k s pokojovou dĺžkou tiež λ. Pôsobí na ne aj tiažové zrýchlenie g. Celková potenciálna energia je potom

$$U = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - \lambda\right)^2 + mgy_1 + mgy_2,$$

kde x_1, y_1, x_2 a y_2 sú súradnice dvoch hmotných bodov s hmotnosťami m v rovine x, y.

1. Zaveďte zovšeobecnené súradnice φ_1 a φ_2 tak ako na obrázku ($x_1 = l\sin\varphi_1$, $y_1 = -l\cos\varphi_2$, $x_2 = \lambda + l\sin\varphi_2$, $y_2 = -l\cos\varphi_2$) a nájdite kinetickú energiu v maticovom zápise,
$$T = \frac{1}{2}(\dot\varphi_1, \dot\varphi_2)\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot\varphi_1 \\ \dot\varphi_2\end{pmatrix}.$$

2. $\boxed{\text{Položte } \boxed{\lambda = 0} \text{ a príklad riešte ďalej už len pre tento špeciálny prípad.}}$

3. Ukážte, že pre $\lambda = 0$ sa potenciálna energia dá v zovšeobecnených súradniciach φ_1 a φ_2 zapísať ako
$$U = 2kl^2\sin^2\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} - mgl(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2).$$

4. Vypočítajte prvé parciálne derivácie potenciálnej energie $\frac{\partial U}{\partial\varphi_1}$ a $\frac{\partial U}{\partial\varphi_2}$ a overte, že pre polohu $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ je splnená nutná podmienka minima potenciálnej energie.

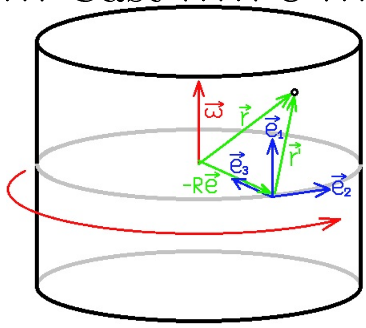
5. Nájdite rozvoj potenciálnej energie do druhého rádu vo φ_1 a φ_2 v maticovom zápise,
$$U = \text{konštanta na ktorej nezáleží} + \frac{1}{2}(\varphi_1, \varphi_2)\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1 \\ \varphi_2\end{pmatrix}.$$

6. Nájdite frekvencie malých kmitov sústavy. Malo by vyjsť $\omega = \sqrt{g/l}$ a $\omega = \sqrt{g/l + 2k/m}$.

7. Nájdite módy prislúchajúce týmto frekvenciám a napíšte všeobecné riešenie pre časový vývoj uhlov $\varphi_1(t)$ a $\varphi_2(t)$.

8. Popíšte alebo načrtnite ako vyzerá kmitanie v špeciálnom prípade, ak vďaka vhodnému výberu počiatočných podmienok do riešenia vstupuje iba jeden z dvoch módov. Urobte to pre oba nezávislé módy, ktoré ste našli.

$\vdots\ldots\vdots\ldots\vdots\ldots\vdots\ldots\vdots\ldots\vdots$ Časť $\vdots\ldots\vdots$ 8 $\vdots\ldots\vdots\ldots\vdots\ldots\vdots\ldots\vdots\ldots\vdots$



1. Na obrázku je valcová plocha, ktorá v beztiaži rotuje okolo svojej osi uhlovou rýchlosťou $\vec{\omega}$. Zaveďme súradnice (x, y, z) vzhľadom na repér $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ spojený s valcovou plochou, ktoré by boli prirodzené pre ľudí žijúcich na vnútornej strane rotujúcej valcovej plochy, čiže vektor $\vec{e}_1$ smeruje pozdĺž osi valcovej plochy a vektor $\vec{e}_3$ smeruje „nahor” teda smerom do stredu valcovej plochy. Polohový vektor $\vec{r}$ rotujúci spolu s valcovou plochou a uhlovú rýchlosť $\vec{\omega}$ potom súradnicami (x, y, z) parametrizujeme ako
$$\vec{r} = -R\vec{e}_3 + \underbrace{x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3}_{\vec{r}'}, \qquad \vec{\omega} = \omega\vec{e}_1.$$
Ukážte, že pohybové rovnice pre telesá voľne padajúce v sústave s repérom $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sú
$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0, \\ \ddot{y} &= 2\omega\dot{z} + \omega^2\, y, \\ \ddot{z} &= -2\omega\dot{y} + \omega^2(z - R). \end{aligned}$$

2. Uvažujme Lagranžián
$$L[\cancel{t}, x, \dot{x}] = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{3}\varepsilon\frac{k}{R}x^3,$$
ktorý popisuje oscilátor, ktorý je (iba trochu) neharmonický, m je hmotnosť, k je konštanta rozmeru tuhosti pružiny [kg s^{-2}], R je konštanta rozmeru dĺžky a ε je malé bezrozmerné číslo. Úlohou je:

   (a) Ukázať, že po zberozmernení, $x \equiv Ry$, $t \equiv \sqrt{m/k}\tau$, pohybová rovnica odvodená z Lagranžiánu nadobudne tvar
   $$\frac{d^2y}{d\tau^2} + y + \varepsilon y^2 = 0.$$

   (b) Uvažovať funkciu $y(\tau)$ v tvare poruchového rozvoja $y(\tau) = y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau) + \cdots$ a napísať pohybové rovnice pre y_0 až y_2, $\dfrac{d^2y_0}{d\tau^2} + y_0 = 0$, $\dfrac{d^2y_1}{d\tau^2} + y_1 = .?.$, $\dfrac{d^2y_2}{d\tau^2} + y_2 = .?.$, (otázniky podopĺňať výpočtom).

   (c) Riešenie rovnice pre y_0 je $y_0(\tau) = a_0\cos(\tau + \varphi_0)$, kde a_0 a φ_0 sú konštanty. Nájdite riešenie pre y_1. Skladá sa z homogénneho a partikulárneho riešenia, pričom homogénne riešenie je v rovnakom tvare ako riešenie pre y_0. Partikulárne riešenie hľadajte v tvare $\alpha + \beta\cos(2\tau + 2\varphi_0)$ a využite, že $\cos^2\vartheta = (1 + \cos 2\vartheta)/2$. Riešenie pre funkciu y_2 hľadať nemusíte.

KOMENTÁRE

A) Podľa pohybových rovníc z úlohy 1. je zrýchlenie telesa rovné

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\omega\dot{z} + \omega^2\ y \\ -2\omega\dot{y} + \omega^2(z-R) \end{pmatrix}.$$

Ak sa teleso nachádza veľmi blízko k stredu súradnicovej sústavy s repérom $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, teda $x, y, z \ll R$, a jeho rýchlosť je veľmi malá v porovnaní s rýchlosťou rotácie, čiže $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \ll \omega R$, tak zrýchlenie telesa je približne

$$\vec{a} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega^2 R \end{pmatrix} = -\omega^2 R\vec{e}_3,$$

Takže dominantná zložka sily pôsobiacej na teleso je v smere oproti osi z danej vektorom $\vec{e}_3$ rovnako ako na povrchu Zeme.

B) Výpočet úlohy 2. z predchádzajúcej strany ukazuje, že poruchové riešenie pohybovej rovnice pre neharmonicý oscilátor je

$$\begin{aligned} x(t) &= \overbrace{Ra_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0\right)}^{x_0(t)} + \\ &+ \varepsilon\left[\overbrace{\underbrace{Ra_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_1\right)}_{\text{homogénne riešenie pre } y_1(\tau)} + \underbrace{.?. + .?. \cos\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}t + 2\varphi_0\right)}_{\text{partikulárne riešenie pre } y_1(\tau)}}^{x_1(t)}\right] + \\ &+ \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots \end{aligned}$$

Máme tu až štyri konštanty, a_0, φ_0, a_1 a φ_1, pričom počiatočné podmienky sú iba dve, $x(0)$ a $\dot{x}(0)$. V poruchovom výpočte, $x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \cdots$, však rozdeľujeme do jednotlivých rádov poruchového výpočtu aj počiatočné podmienky. Riešenie v nultom ráde spĺňa zadané počiatočné podmienky,

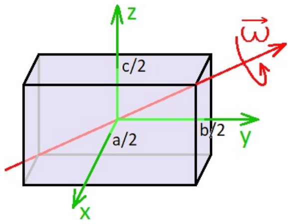
$$\begin{aligned} x_0(0) &= x(0), \\ \dot{x}_0(0) &= \dot{x}(0), \end{aligned}$$

a v ostatných rádoch poruchového výpočtu sú počiatočné podmienky nulové,

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0, \\ \dot{x}_1(0) &= 0, \\ x_2(0) &= 0, \\ \dot{x}_2(0) &= 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Nakoniec teda máme rovnaký počet počiatočných podmienok ako konštánt, ktoré chceme špecifikovať, a celkové riešenie $x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \cdots$ spĺňa počiatočné podmienky, ktoré má spĺňať.

: : . . : : : . . : : : . . : : : . . : : : . . : : Časť : : . . : : 9 : : . . : : : . . : : : . . : : : . . : : : . . : :



obr. č. 1

obr. č. 2

1. Na prvom obrázku je homogénny kváder s hmotnosťou M a s dĺžkami hrán a, b a c, teda v telesových súradniciach x, y, z ide o oblasť danú podmienkami $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$, $-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$, $-\frac{c}{2} \leq z \leq \frac{c}{2}$, v ktorej je hustota ρ konštantná. ($M = \rho abc$.) Kváder je pevne uchytený tak, aby sa otáčal okolo osi prechádzajúcej jeho najdlhšou uhlopriečkou. (**Ak by jeho os rotácie nebola pevne uchytená, dochádzalo by k precesii!**[9]) Otáča sa uhlovou rýchlosťou ω, takže vektor uhlovej rýchlosti v telesových súradniciach je

$$\vec{\omega} \equiv \omega_i \vec{e}_i \equiv \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \frac{\omega}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \text{normovanie: } \sqrt{\vec{\omega}^2} = \omega$$

   (a) Nájdite tenzor zotrvačnosti kvádra I_{ij} v telesových súradniciach x, y, z (všetky komponenty matice, I_{xx}, I_{xy},...).

   (b) Overte, že kinetická energia kvádra rotujúceho s vyššie uvedenou uhlovou rýchlosťou vyjde

$$T_{\text{rot.}} = \frac{1}{12} M \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \omega^2.$$

2. Tenká tyč s hmotnosťou m a dĺžkou l je položená na vodorovnú valcovú plochu s polomerom R (os tyče je kolmá na os valcovej plochy) tak, že v rovnovážnej polohe je tyč vo vodorovnej polohe a jej ťažisko sa nachádza v mieste dotyku s valcovou plochou. Všeobecná poloha tyče je znázornená na druhom obrázku. Za zovšeobecnenú súradnicu si vyberme uhol φ, ktorý meria náklon tyče. (Druhá časť obrázku je vizuálnou pomôckou pri hľadaní závislosti polohy ťažiska tyče od súradnice φ.) Úlohou je:

[9] Pretože vektor uhlovej rýchlosti nie je vlastným vektorom tenzora zotrvačnosti, čiže $L_i = I_{ij}\omega_j \neq \lambda \omega_i$, a moment hybnosti trčí v telesových súradniciach iným smerom ako os rotácie daná vektorom $\vec{\omega}$, teda $\vec{L}$ sa točí spolu s telesom a nezachováva sa. Nezachovávanie momentu hybnosti $\vec{L}$ znamená, že na teleso pôsobia sily, ktoré ho nútia konať zadaný pohyb.

(a) Vypočítať moment zotrvačnosti tyče (rotujúcej okolo svojho ťažiska s osou rotácie kolmou na tyč) $I_{\text{tyč}}$.

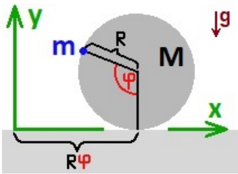
(b) Využiť, že kinetická energia tyče je súčtom kinetickej energie za pohyb ťažiska, $T_{\text{ťaž.}} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_{\text{ťaž.}}^2 + \dot{y}_{\text{ťaž.}}^2\right)$, a rotačnej energie danej momentom zotrvačnosti tyče, $T_{\text{rot.}} = \frac{1}{2}I_{\text{tyč}}\dot{\varphi}^2$, a potenciálna energia je daná výškou ťažiska, $U = mg \cdot \text{výška ťažiska}$, a overiť, že Lagranžián je

$$L[\cancel{t}, \varphi, \dot{\varphi}] = \frac{1}{2}m\left(R^2\varphi^2 + \frac{1}{12}l^2\right)\dot{\varphi}^2 - \text{konšt.} - mgR\left(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi\right),$$

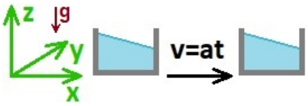
kde konštanta je daná výberom nulovej hladiny potenciálnej energie a nezáleží na nej.

(c) Nájdite frekvenciu **malých kmitov** tyče okolo jej rovnovážnej polohy $\varphi = 0$. (Postup z teórie pre malé kmity, ale teraz sú tu iba 1×1 matice, keďže stupeň voľnosti je iba jeden.)

⁝ ⁝ ⁝ Časť ⁝ ⁝ 10 ⁝ ⁝ ⁝



obr. č. 1



obr. č. 2

1. Na prvom obrázku je homogénny valec s hmotnosťou M a polomerom R, ktorý sa môže kotúľať po vodorovnej rovine. Na kraji valca je pripevnený hmotný bod s hmotnosťou m. Ak si zavedieme zovšeobnecnenú súradnicu φ ako na obrázku, tak poloha ťažiska valca je $x_{\text{ťaž.}} = R\varphi$, $y_{\text{ťaž.}} = R$, a poloha hmotného bodu s hmotnosťou m je $x_{\text{h.b.}} = x_{\text{ťaž.}} - R\sin\varphi$, $y_{\text{h.b.}} = y_{\text{ťaž.}} - R\cos\varphi$. Kinetická enegia sústavy je daná translačným pohybom ťažiska valca, $\frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2_{\text{ťaž.}} + \dot{y}^2_{\text{ťaž.}}\right)$, rotačným pohybom valca, $\frac{1}{2}I_{\text{valec}}\dot{\varphi}^2$, a pohybom hmotného bodu s hmotnosťou m, $\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2_{\text{h.b.}} + \dot{y}^2_{\text{h.b.}}\right)$, a potenciálna energia je daná homogénnym tiažovým zrýchlením g. Úlohou je:

   (a) Vypočítať moment zotrvačnosti valca I_{valec}.

   (b) Nájsť Lagranžián a odvodiť pohybovú rovnicu.

   (c) Odvodenú pohybovú rovnicu zbezrozmerniť,
   $$\tau = \sqrt{\frac{g}{R}}t, \quad \varepsilon = \frac{m}{M},$$
   malo by vyjsť
   $$\left[\frac{3}{2} + 2\varepsilon\left(1 - \cos\varphi\right)\right]\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \varepsilon\left(\sin\varphi\right)\left[1 + \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2\right] = 0,$$
   a riešiť ju poruchovo do prvého rádu v parametri ε.

   (d) Ukázať, že riešenie spĺňajúce počiatočné podmienky,
   $$\varphi(0) = A, \quad \dot{\varphi}(0) = \sqrt{\frac{g}{R}}B,$$
   je[10]
   $$\begin{aligned}\varphi(t) \;=\; & A + \sqrt{\frac{g}{R}}Bt + \\ & + \frac{m}{M}\frac{2}{3}\frac{1+B^2}{B^2}\left[\sin\left(A + \sqrt{\frac{g}{R}}Bt\right) - \right. \\ & \left. - \left(\sin A\right) - \left(\cos A\right)\sqrt{\frac{g}{R}}Bt\right] + \\ & + \text{konštanta rádu}\left(\frac{m}{M}\right)^2 \cdot \text{nejaká funkcia}\left(t\right).\end{aligned}$$

[10] Vzdialenosť, o ktorú sa valec prekotúľa, resp. poloha ťažiska valca je $R\varphi(t)$, a môže nadobúdať akékoľvek číselné hodnoty, takže ani uhol φ nie je žiadúce obmedzovať na interval $\langle 0, 2\pi)$. Poloha $\varphi = 0$ sa líši od polohy $\varphi = 2\pi$.

2. Na druhom obrázku je nádoba s nestlačiteľnou kvapalinou ($\rho = = \text{konšt.}$), ktorá je v smere osi x urýchľovaná konštantným zrýchlením a tak, že v čase $t = 0$ nádoba stála. Predpokladajme, že kvapalina sa hýbe spolu s nádobou ako tuhé teleso, teda vektorové pole rýchlosti tečenia kvapaliny je $\vec{v} = at\vec{e}_x$. Riešením Navierovej–Stokesovej rovnice,

$$\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{g} + \frac{\eta}{\rho}\left(\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right) + \triangle\vec{v}\right), \quad \vec{g} = -g\vec{e}_z,$$

(a) nájdite tlak p ako funkciu priestorových súradníc a času.

(b) Overte, že z podmienky nulového tlaku je hladina kvapaliny daná vzťahom

$$z = -\frac{a}{g}x + f(t),$$

kde $f(t)$ je funkcia času, ktorú možno špecifikovať zadaním objemu kvapaliny v nádobe.[11] Kvapalina sa teda správa ako keby bola v nádobe, ktorá stojí, ale je naklonená,[12] pričom uhol náklonu α je daný vzťahom $\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| = \frac{a}{g}$.

[11] Ak má podstava nádoby tvar štvorca s dĺžkou hrany l a je v rovine $z = 0$, v čase $t = 0$ nádoba stála a jej okraj bol v polohe $x = 0$, a hladina kvapaliny je naklonená iba tak, aby kvapalina z nádoby ani nevytekala a aby ani časť dna nádoby nevytŕčala nad hladinu, tak objem kvapaliny v nádobe sa dá počítať ako

$$V = \int\limits_{\frac{1}{2}at^2}^{\frac{1}{2}at^2+l} dx \int\limits_0^l dy \int\limits_0^{-\frac{a}{g}x+f(t)} dz,$$

čo funkciu $f(t)$ špecifikuje na tvar

$$f(t) = \frac{V}{l^2} + \frac{a}{2g}\left(l + at^2\right).$$

[12] V sústave spojenej s nádobou sa hydrodynamika redukuje na hydrostatiku, ale pôsobí v nej zotrvačná sila, ktorá „nakláňa” hladinu.