$\cdot\bullet$ **Sada 1**: *Zrýchlený Pozorovateľ* $\bullet\cdot$

Pr. 1 *Čas v rakete*: Svetočiara pozorovateľa (v rakete), ktorý sa pohybuje s konštantným zrýchlením α, je daná predpisom

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{1}{\alpha}\mathrm{sh}\alpha\tau, \\
x &= \frac{1}{\alpha}\mathrm{ch}\alpha\tau,
\end{aligned}
$$

kde t a x sú čas a poloha v inerciálnej sústave (na Zemi) a τ je vlastný čas, ktorý plynie v rakete. Uvažujme cestu raketou zo Zeme k hviezde vo vzdialenosti D takým spôsobom, že raketa v čase $t = \tau = 0$ štartuje z polohy $x = 1/\alpha$, pohybuje sa po svetočiare danej vyššie uvedeným predpisom, až kým nedorazí na miesto s polohou $x = 1/\alpha + D/2$. Raketa sa potom otočí a začne spomaľovať rovnako veľkým zrýchlením, ako bola do polcesty urýchľovaná. Napokon dorazí do cieľa v polohe $x = 1/\alpha + D$. Úlohou je:

1. Načrtnúť svetočiaru rakety, ktorá polovicu času zrýchľovala a polovicu času spomaľovala, vždy so zrýchelním α.

2. Odvodiť vzťahy pre čas, ktorý počas celej cesty uplynie v rakete a na Zemi,

$$
\begin{aligned}
T_{\mathrm{R}} &= \frac{2}{\alpha}\mathrm{arcch}\left(\frac{\alpha D}{2}+1\right), \\
T_{\mathrm{Z}} &= \frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{\alpha D}{2}}\sqrt{\frac{\alpha D}{2}+2}.
\end{aligned}
$$

   S rastúcou vzdialenosťou destinácie D teda čas na Zemi rastie asymptoticky lineárne (rýchlosť rakety je väčšinu času blízka rýchlosti svetla) a čas v rakete rastie asymptoticky logaritmicky.

3. Overiť platnosť vzťahu

$$
T_{\mathrm{Z}} = \left(\frac{2}{\alpha}+D\right)\mathrm{th}\left(\alpha\frac{T_{\mathrm{R}}}{2}\right).
$$

4. Overiť, že v jednotkách, ktoré používame, $c = 1$, je hodnota štandardného tiažového zrýchlenia "1g" $= 9,81\mathrm{ms}^{-2} = 1,03\mathrm{rok}^{-1}$ a vzdialenosť jedného svetelného roka je 1sv.rok = 1rok. Do vzťahov z bodu 2. potom možno za α dosadiť hodnotu $1,03$ a za D hodnotu vzdialenosti destinácie v svetelných rokoch. Nájdite hodnoty časov v rokoch, ktoré uplynú v "1g" rakete T_{R} a na Zemi T_{Z} pre dve ľubovoľne vybrané destinácie (zvoliť si dve dostatočne rôzne hodnoty pre D v svetelných rokoch).

Pr. 2 *Rindlerove súradnice*: Prechod medzi laboratórnymi súradnicami t, x a súradnicami spojenými so zrýchleným pozorovateľom $\bar{t}, \bar{x}$ (Rindlerove súradnice) je daný vzťahmi

$$
\begin{aligned}
t &= \left(\frac{1}{\alpha}+\bar{x}\right)\mathrm{sh}\alpha\bar{t}, \\
x &= \left(\frac{1}{\alpha}+\bar{x}\right)\mathrm{ch}\alpha\bar{t}.
\end{aligned}
$$

Úlohou je:

1. Nakresliť krivočiaru súradnicovú sieť Rindlerových súradníc, teda krivky v rovine t, x dané podmienkami $\bar{t} =$ konšt., $\bar{x} =$ konšt.

2. Prepísať Minkowského metriku do Rindlerových súradníc. Malo by vyjsť

$$
ds^2 = -dt^2 + dx^2 = -\left(1+\alpha\bar{x}\right)^2 d\bar{t}^2 + d\bar{x}^2.
$$

3. Ukázať, že v limite slabého zrýchlenia $|\alpha\overline{x}| \ll 1$ metrika z predchádzajúceho bodu dáva vzťah pre Newtonovský poteniál $\phi \approx \alpha\overline{x}$, teda rovnaký vzťah ako pre fiktívnu silu v klasickej Newtonovskej mechanike. Stačí využiť, že pre metriku blízku Minkowského metrike ($g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$) platí, že rovnica geodetiky pre pomaly sa pohybujúci hmotný bod sa blíži k rovnici pre hmotný bod v slabom ($|\phi| \ll 1$) a konštantnom klasickom Newtonovskom potenciáli, pričom platí vzťah $g_{00} \approx -(1+2\phi)$.

Pr. 3 *Čas na Zemi*: Vráťme sa k situácii z prvého príkladu **Pr. 1**. Raketa cestuje z polohy $x = 1/\alpha$ s konštantným zrýchlením α do polohy $x = 1/\alpha + D/2$ a potom spomaľuje opačným zrýchlením do polohy $x = 1/\alpha + D$. Svetočiara Zeme zodpovedá státiu v polohe $x = 1/\alpha$. Počas celej cesty rakety uplynie v rakete čas T_{R} a na Zemi T_{Z}. V prvom príklade sa použil popis z pohľadu "pozemských" súradníc t, x. Na situáciu sa môžeme pozrieť aj z pohľadu Rindlerových súradníc $\overline{t}, \overline{x}$,

$$\begin{aligned} t &= \left(\frac{1}{\alpha} + \overline{x}\right) \mathrm{sh}\alpha\overline{t}, \\ x &= \left(\frac{1}{\alpha} + \overline{x}\right) \mathrm{ch}\alpha\overline{t}, \end{aligned}$$

v ktorých Raketa stojí ($\overline{x} = 0$) a Zem sa hýbe. Úlohou je:

1. Načrtnúť svetočiaru rakety, ktorá polovicu času zrýchľovala a polovicu času spomaľovala, vždy so zrýchlením α.

2. Ukázať, že počas fázy zrýchľovania rakety je svetočiara Zeme daná vzťahom

$$\Gamma: \quad \overline{x}_{\mathrm{Z}}\left(\overline{t}\right) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}\alpha\overline{t}} - 1\right), \quad \overline{t} \in \left\langle 0, \frac{T_{\mathrm{R}}}{2}\right\rangle.$$

3. Vypočítať časopriestorovú dĺžku krivky z predchádzajúceho bodu

$$T_{\mathrm{Z}(1)} = \int_0^{\frac{T_{\mathrm{R}}}{2}} \sqrt{-g\left(\frac{d\Gamma}{d\overline{t}}, \frac{d\Gamma}{d\overline{t}}\right)} d\overline{t} = \text{...výpočet...} = \frac{1}{\alpha}\mathrm{th}\left(\alpha\frac{T_{\mathrm{R}}}{2}\right),$$

kde $d\Gamma/d\overline{t}$ je dotykový vektor ku svetočiare Zeme s veľkosťou súvisiacou s časovým prírastkom v Rindlerových ("raketových") súradniciach $d\overline{t}$ a metrika g je Minkowského metrika v Rindlerových súradniciach daná vzťahom v **Pr. 2** v bode 2. Výraz $g\left(d\Gamma/d\overline{t}, d\Gamma/d\overline{t}\right)$ teda predstavuje časopriestorovú metriku indukovanú na krivku Γ, takže meria časopriestorovú dĺžku krivky.

4. Rozmyslieť si, že v druhej polovici cesty rakety, vo fáze brzdenia, platí:

$$\frac{1}{\alpha} \stackrel{!}{=} x_{\mathrm{Z}} = \underbrace{\frac{2}{\alpha} + D}_{(a)} + \underbrace{\left(\frac{1}{-\alpha} + \overline{x}_{\mathrm{Z}}\right)\mathrm{ch}\left(-\alpha\left(-\hat{\overline{t}}\right)\right)}_{(b)}, \quad \underbrace{\hat{\overline{t}} \in \left\langle 0, \frac{T_{\mathrm{R}}}{2}\right\rangle}_{(c)}.$$

(a) - posun priesečníka asymptot hyperboly z polohy $x = 0$ do polohy $x = 1/\alpha + D + 1/\alpha$
(b) - otočenie hyperboly: zrýchľovanie $\to$ spomaľovanie: $\alpha \to -\alpha$
(c) - čas $\hat{\overline{t}}$ beží opačným smerom ako čas $\overline{t}$ a je aj vhodne posunutý

5. Zo vzťahu z predchádzajúceho bodu vyjadriť predpis svetočiary Zeme a rovnakým postupom ako v bode 3. odvodiť:

$$T_{\mathrm{Z}(2)} = \text{...výpočet...} = \left(\frac{1}{\alpha} + D\right)\mathrm{th}\left(\alpha\frac{T_{\mathrm{R}}}{2}\right).$$

(Nezabudnúť otočiť znamienko pri α aj v metrike!)

6. Rozmyslieť si, ako súvisí rozdielnosť výsledkov z bodov 3. a 5. s relatívnosťou súčasnosti.

Ak sčítame výsledky z bodov 3. a 5., dostaneme:

$$T_{\mathrm{Z}(1)} + T_{\mathrm{Z}(2)} = \left(\frac{2}{\alpha} + D\right)\mathrm{th}\left(\alpha\frac{T_{\mathrm{R}}}{2}\right),$$

čo je v zhode s výsledkom **Pr. 1** bod 3. Keďže sme tu počítali dĺžku tej istej krivky, iba v iných súradniciach, tak to tak aj muselo vyjsť.
