Sada 2: *Milneho a de Sitterov vesmír*

Pr. 1 *$1+1$ rozmerný Milneho vesmír*: V Minkowského časopriestore so súradnicami t a x (y a z sa neuplatnia) sa nekonečne veľa hmotných bodov v jednom okamihu, $t = 0$, začne rozbiehať pozdĺž priamky x z jedného bodu, $x = 0$, všetkými možnými rýchlosťami z intervalu $(-1, 1)$. Časovú súradnicu t možno nahradiť vlastným časom τ rozbiehajúcich sa hmotných bodov. Keďže sa každý hmotný bod pohybuje inou rýchlosťou, prislúcha každému z nich inak bežiaci vlastný čas, takže je rozumné prejsť od polohovej súradnice x k súradnici spojenej s rozbiehajúcimi sa hmotnými bodmi. Za takúto súradnicu možno vybrať rýchlosť $v \in (-1, 1)$, pretože špecifická rýchlosť dáva špecifickú trajektóriu hmotného bodu a teda v danom čase aj špecifickú polohu. Okrem pôvodných súradníc t a x sú teda v Minkowského časopriestore dobre definované aj súradnice τ a v. Úlohou je:

1. Rozmyslieť si, že súradnice τ a v nepokrývajú celý Minkowského časopriestor, a vyznačiť oblasť, ktorú pokrývajú.

2. Nájsť predpis pre transformáciu súradníc medzi t, x a τ, v. Stačí použiť Lorentzovu transformáciu medzi súradnicami t, x a súradnicami $\tau, \tilde{x}$ v inerciálnej sústave spojenej s hmotným bodom špecifikovaným rýchlosťou v. Keďže je tento hmotný bod v počiatku svojej inerciálnej sústavy, $\tilde{x}$ z transformačných vzťahov vypadne.

3. Nahradiť súradnicu v novou priestorovou súradnicou χ podľa predpisu $v = \mathrm{th}\chi$ a overiť, že výsledná transformácia vyjde

$$t = \tau \mathrm{ch}\chi,$$
$$x = \tau \mathrm{sh}\chi.$$

4. V tranformácii, ktorá vyšla v predchádzajúcom bode, prehodiť hyberbolický sínus a kosínus,

$$t = \tau \mathrm{sh}\chi,$$
$$x = \tau \mathrm{ch}\chi,$$

a porovnať tieto vzťahy so vzťahmi pre Rindlerove súradnice zo **Sady 1**, **Pr. 2**. Ako súvisia súradnice τ a χ z vyššie uvedenej transformácie s Rindlerovými súradnicami?

5. Prepísať Minkowského metriku do súradníc τ, χ z bodov 3. a 4. V oboch prípadoch by malo vyjsť

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 = \pm \left(-d\tau^2 + \tau^2 d\chi^2\right)$$

6. Keďže súradnice v transformáciách z bodov 3. a 4. pokrývajú vždy len časť Minkowského časopriestoru, vymyslieť ďalšie (dve) transformácie súradníc tak, aby boli pokryté aj ostatné oblasti. Rozmyslieť si, že tieto ďalšie transformácie zodpovedajú sústave, v ktorej sa hmotné body zbiehajú (stačí otočiť znamienko pri čase t v bode 3.), a ďalšiemu zrýchlenému pozorovateľovi (otočené znamienka pri t aj x z bodu 4.).

Pr. 2 *Viacrozmerný Milneho vesmír*: $1+1$ rozmerný Milneho vesmír sa dá zovšeobecniť na viac rozmerov modifikovaním transformácie z **Pr. 1** bodu 3.

$$t = \tau \mathrm{ch}\chi,$$
$$\vec{x} = \vec{n}\tau \mathrm{sh}\chi,$$

kde τ je vlastný čas rozbiehajúcich sa hmotných bodov, χ zodpovedá veľkosti rýchlosti ich rozbiehania ($v = \mathrm{th}\chi$) a $\vec{n}$ je jednotkový vektor zodpovedajúci smeru rozbiehania, ktorý sa dá parametrizovať uhlovými súradnicami. Úlohou je:

1. Prepísať $1+3$ rozmernú Minkowského metriku do vyššie uvedených súradníc. Malo by vyjsť

$$ds^2 = -dt^2 + d\vec{x}^2 = -d\tau^2 + \tau^2 \left[d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\chi \left(\sin^2\vartheta d\varphi^2 + d\vartheta^2 \right) \right],$$

kde φ a ϑ sú uhlové súradnice na jednotkovej sfére a výsledok z **Pr. 1** bodu 5. je špeciálnym prípadom tohto výsledku.

2. Ukázať, že ak potlačíme jeden priestorový rozmer (fixujeme ϑ), tak priestorová časť metriky z predchádzajúceho bodu sa redukuje na

$$\tau^2 \left(d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\chi d\varphi^2 \right).$$

3. Uvažovať priestor s Kartézskymi súradnicami u, x, y. Načrtnúť plochu v tomto priestore danú väzbou

$$u^2 - x^2 - y^2 = \tau^2.$$

Ako sa táto plocha nazýva?

4. Indukovať metriku

$$dl^2 = -du^2 + dx^2 + dy^2$$

na plochu zadefinovanú v predchádzajúcom bode cez takú parametrizáciu plochy (súradnice na ploche), aby výsledná metrika bola rovnaká ako v bode 2. Táto plocha s touto metrikou sa nazýva Lobačevského rovina.

5. Zargumentovať, že aj keď to tak z obrázku z bodu 3. na prvý pohľad nevyzerá, Lobačevského rovina je homogénna a izotropná.

Pr. 3 _De Sitterov vesmír_: Uvažujme $1+4$ rozmerný priestor s kartézskymi súradnicami t, x, y, z, w a s metrikou

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2.$$

Ďalej v tomto priestore uvažujme nadplochu danú väzbou

$$-t^2 + x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = K^2.$$

Táto nadplocha s metrikou indukovanou z pôvodného viacrozmernejšieho priestoru sa volá de Sitterov vesmír. Úlohou je:

1. Načrtnúť vyššie definovanú nadplochu pri dvoch potlačených priestorových rozmeroch (položiť $z = 0$ a $w = 0$). Ako sa tento útvar nazýva?

2. Nájsť takú parametrizáciu nadplochy,

$$\begin{aligned} t &= \text{jedna funkcia parametra } \tau, \\ x, y, z, w &= r \cdot \text{goniometrické funkcie s tromi uhlovými súradnicami na 3-sfére} \\ &\qquad \text{vybrané tak, aby } x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = r^2, \\ r &= \text{druhá funkcia parametra } \tau, \\ &\quad (\text{kvôli väzbe musí platiť } -t^2 + r^2 = K^2), \end{aligned}$$

aby metrika, ktorú na ňu indukujeme, vyšla v tvare

$$ds^2 = -dt^2 + \underbrace{dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2}_{dr^2 + r^2 d\Omega^2_{(3)}} = -d\tau^2 + K^2 \mathrm{ch}^2 \frac{\tau}{K} d\Omega^2_{(3)},$$

kde $d\Omega^2_{(3)}$ je objemový element jednotkovej 3-sféry daný vhodne vybranými uhlovými súradnicami. Pri výpočtoch nie je potrebné špecifikovať a používať parametrizáciu 3-sféry cez uhlové súradnice, keďže vo vyššie uvedenom vzťahu je to isté $d\Omega^2_{(3)}$ na ľavej aj pravej strane rovnosti.

(pokračovanie na ďalšej strane →)

3. Porovnať výsledok z predchádzajúceho bodu (de Sitterov vesmír) s výsledkom z **Pr. 2** bodu 1. (Milneho vesmír). Pri porovnávaní interpretovať tieto dve časopriestorové metriky ako metriky s priestormi danými nadplochami konštantného času, ktorých veľkosť sa v čase mení,

$$ds^2 = -d\tau^2 + a(\tau)^2 \cdot \text{priestorová metrika (3-sféra / Lobačevského 3-priestor)},$$

kde $a(\tau)$ je funkcia nazývaná škálovací parameter a popisuje, ako sa s časom priestor rozťahuje alebo zmršťuje. Ako táto funkcia vyzerá v oboch prípadoch, resp. ako sa priestor s časom rozťahuje alebo zmršťuje? Čo majú priestory v dvoch časopriestorových metrikách spoločné a v čom sa líšia?
