$\cdot\bullet$ **Sada 3**: *Súradnice v de Sitterovom vesmíre* $\bullet\cdot$

V **Sade 2** sme sa zoznámili s de Sitterovým vesmírom. Pre $1+N$ rozmerov a pri fixovanom škálovaní (pravá strana nasledujúcej rovnice) je definovaný ako nadplocha v $N+2$ rozmernom priestore daná väzbou

$$-t^2 + \underbrace{\overbrace{x_1^2 + \cdots + x_N^2}^{\rho^2} + w^2}_{r^2} = 1, \tag{1}$$

na ktorú indukujeme metriku

$$ds^2 = -dt^2 + \underbrace{\overbrace{dx_1^2 + \cdots + dx_N^2}^{d\rho^2+\rho^2 d\Omega^2_{(N-1)}} + dw^2}_{dr^2+r^2 d\Omega^2_{(N)}}. \tag{2}$$

Pri parametrizácii nadplochy ako $t = \mathrm{sh}\tau$, $r = \mathrm{ch}\tau$ má časopriestorová metrika de Sitterovho vesmíru tvar

$$ds^2 = -d\tau^2 + \mathrm{ch}^2\tau d\Omega^2_{(N)}, \tag{3}$$

kde $d\Omega^2_{(N)}$ je metrika N rozmernej jednotkovej sféry, teda priestor s konštantnou kladnou krivosťou, pričom aj časopriestorová krivosť de Sitterovho vesmíru je tiež konštantná ($R = N(N+1)$). Je však možné zaviesť také súradnice, aby plochy konštantného súradnicového času mali aj inú krivosť, čo je (okrem tretieho príkladu) náplňou tejto sady. Pre lepšiu predstavu možno uvažovať analógiu s trojrozmerným plochým Euklidovským priestorom, v ktorom možno nájsť dvojrozmerné plochy rôznej krivosti, ako sféry, roviny, či rotačné hypeboloidy.

Pr. 1 *Plochý de Sitterov vesmír*: Nadplochu danú väzbou (1) parametrizujme ako

$$\begin{aligned} t+w &= e^{\zeta}, \\ x_1, \cdots, x_N &= \eta e^{\zeta} \cdot \text{goniometrické funkcie s } N-1 \text{ uhlovými súradnicami na } N-1\text{-sfére} \\ &\qquad \text{vybrané tak, aby } x_1^2 + \cdots + x_N^2 = \eta^2 e^{2\zeta}, \\ t-w &= -e^{-\zeta} + \eta^2 e^{\zeta}, \end{aligned}$$

a uvedomme si, že metriku (2) možno prepísať ako

$$ds^2 = -(dt+dw)(dt-dw) + dx_1^2 + \cdots + dx_N^2.$$

Úlohou je:

1. Overiť, že pri tejto parametrizácii je väzba (1) splnená automaticky.

2. Pre $N = 1$ ($x_1 = \eta e^{\zeta}$, $x_2, \cdots = 0$) vyznačiť na jednodielnom rotačnom hyperboloide (os rotačnej symetrie hyperboloidu je os t a jeho rezy rovinou x_1-w sú kružnice) oblasť, v ktorej sú súradnice η a ζ dobre definované.

3. Na oblasti hyperboloidu z predchádzajúceho bodu nakresliť súradnicovú sieť, teda krivky $\eta =$ konšt. a $\zeta =$ konšt. Mali by to byť rezy hyperboloidu rovinami $x_1 =$ konšt. $\cdot\,(t+w)$ a $t+w =$ konšt..

4. Indukovať metriku (2) na nadplochu danú väzbou (1) s parametrizáciou cez súradnice η, ζ a $N-1$ uhlových súradníc. Malo by vyjsť

$$ds^2 = -d\zeta^2 + e^{2\zeta}\left(d\eta^2 + \eta^2 d\Omega^2_{(N-1)}\right).$$

   Pri výpočte netreba rozpisovať $N-1$ uhlových súradníc, keďže uhlová časť metriky $d\Omega^2_{(N-1)}$ sa len dedí z časti časopriestorovej metriky (2) podľa vzťahu $dx_1^2 + \cdots + dx_N^2 = \left[d\left(\eta e^{\zeta}\right)\right]^2 + \eta^2 e^{2\zeta} d\Omega^2_{(N-1)}$.

Metriku (3), ktorej priestorová geometria je uzavretá (3-sféry), sa nám podarilo prepísať do nových súradníc, v ktorých je priestorová geometria plochá (radiálna súradnica η a $N-1$ uhlových súradníc). Nevýhodou je, že tieto nové súradnice pokrývajú iba polovicu de Sitterovho vesmíru.

Pr. 2 *Otvorený de Sitterov vesmír*: Nadplochu danú väzbou (1) parametrizujme ako

$$\begin{aligned} t &= \mathrm{sh}\xi \mathrm{ch}\chi, \\ x_1, \cdots, x_N &= \mathrm{sh}\xi\mathrm{sh}\chi \cdot \text{goniometrické funkcie s } N-1 \text{ uhlovými súradnicami na } N-1\text{-sfére} \\ &\qquad \text{vybrané tak, aby } x_1^2 + \cdots + x_N^2 = \mathrm{sh}^2\xi\mathrm{sh}^2\chi, \\ w &= \mathrm{ch}\xi. \end{aligned}$$

Úlohou je:

1. Overiť, že pri tejto parametrizácii je väzba (1) splnená automaticky.
2. Pre $N = 1$ ($x_1 = \mathrm{sh}\xi\mathrm{sh}\chi$, $x_2, \cdots = 0$) vyznačiť na jednodielnom rotačnom hyperboloide (os rotačnej symetrie hyperboloidu je os t a jeho rezy rovinou x_1-w sú kružnice) oblasť, v ktorej sú súradnice χ a ξ dobre definované.
3. Na oblasti hyperboloidu z predchádzajúceho bodu nakresliť súradnicovú sieť, teda krivky $\chi =$ konšt. a $\xi =$ konšt. Mali by to byť rezy hyperboloidu rovinami $t/x_1 =$ konšt. $w =$ konšt..
4. Indukovať metriku (2) na nadplochu danú väzbou (1) s parametrizáciou cez súradnice χ, ξ a $N-1$ uhlových súradníc. Malo by vyjsť

   $$ds^2 = -d\xi^2 + \mathrm{sh}^2\xi \left(d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\chi d\Omega^2_{(N-1)} \right).$$

   Pri výpočte netreba rozpisovať $N-1$ uhlových súradníc, keďže uhlová časť metriky $d\Omega^2_{(N-1)}$ sa len dedí z časti časopriestorovej metriky (2) podľa vzťahu $dx_1^2 + \cdots + dx_N^2 = [d(\mathrm{sh}\xi\mathrm{sh}\chi)]^2 +$ $+\mathrm{sh}^2\xi\mathrm{sh}^2\chi d\Omega^2_{(N-1)}$.

Metriku (3), ktorej priestorová geometria je uzavretá (3-sféry), sa nám podarilo prepísať do nových súradníc, v ktorých je priestorová geometria otvorená (Lobačevského 3-roviny zo **Sady 2, Pr. 2**). Nevýhodou je, že tieto nové súradnice pokrývajú iba časť de Sitterovho vesmíru.

Pr. 3 *Statický de Sitterov vesmír*: Nadplochu danú väzbou (1) parametrizujme ako

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{1-\rho^2}\mathrm{sh}T, \\ x_1, \cdots, x_N &= \rho \cdot \text{goniometrické funkcie s } N-1 \text{ uhlovými súradnicami na } N-1\text{-sfére} \\ &\qquad \text{vybrané tak, aby } x_1^2 + \cdots + x_N^2 = \rho^2, \\ w &= \sqrt{1-\rho^2}\mathrm{ch}T. \end{aligned}$$

Úlohou je:

1. Overiť, že pri tejto parametrizácii je väzba (1) splnená automaticky.
2. Pre $N = 1$ ($x_1 = \rho$, $x_2, \cdots = 0$) vyznačiť na jednodielnom rotačnom hyperboloide (os rotačnej symetrie hyperboloidu je os t a jeho rezy rovinou x_1-w sú kružnice) oblasť, v ktorej sú súradnice ρ a T dobre definované.
3. Na oblasti hyperboloidu z predchádzajúceho bodu nakresliť súradnicovú sieť, teda krivky $\rho =$ konšt. a $T =$ konšt. Mali by to byť rezy hyperboloidu rovinami $\rho = x_1 =$ konšt. a $\mathrm{th}T = t/w =$ konšt..
4. Indukovať metriku (2) na nadplochu danú väzbou (1) s parametrizáciou cez súradnice ρ, T a $N-1$ uhlových súradníc. Malo by vyjsť

   $$ds^2 = -\left(1-\rho^2\right) dT^2 + \frac{d\rho^2}{1-\rho^2} + \rho^2 d\Omega^2_{(N-1)}.$$

   Pri výpočte netreba rozpisovať $N-1$ uhlových súradníc, keďže uhlová časť metriky $d\Omega^2_{(N-1)}$ sa len dedí z časopriestorovej metriky (2).

Metriku (3), ktorej komponenty závisia od času τ, sa nám podarilo prepísať do nových súradníc, v ktorých už komponenty metriky od času T nezávisia. Nevýhodou je, že tieto nové súradnice nepokrývajú celý de Sitterov vesmír.

Zhrnutie výsledkov: Z konštrukcie de Sitterovho vesmíru cez indukovanie Minkowského metriky na nadplochu, ktorá je vzhľadom na ňu symetrická, vyplýva, že má rovnako veľa symetrií (Killingových vektorov) ako rovnako rozmerný Minkowského časopriestor. De Sitterov vesmír má preto maximálny možný počet symetrií. Máme štyri rôzne tvary tej istej metriky de Sitterovho vesmíru prislúchajúce štyrom súradnicovým systémom

$$ds^2 = \begin{cases} -d\tau^2 + \mathrm{ch}^2\tau d\Omega^2_{(N)}, \\ -d\zeta^2 + e^{2\zeta}\left(d\eta^2 + \eta^2 d\Omega^2_{(N-1)}\right), \\ -d\xi^2 + \mathrm{sh}^2\xi\left(d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\chi d\Omega^2_{(N-1)}\right), \\ -\left(1-\rho^2\right)dT^2 + \dfrac{d\rho^2}{1-\rho^2} + \rho^2 d\Omega^2_{(N-1)}. \end{cases}$$

V súradniciach $\tau, \cdots$ máme priestorovú metriku uzavretej sféry, ktorá sa najprv zmršťuje a potom sa rozpína, $\sim \mathrm{ch}\tau$; v súradniciach $\zeta, \eta, \cdots$ je priestorová metrika plochá a rozpínanie je exponenciálne, $\sim e^{\zeta}$; v súradniciach $\xi, \chi, \cdots$ máme rozpínajúci sa Lobačevského priestor, $\sim \mathrm{sh}\xi$; a v súradniciach $T, \rho, \cdots$ je metrika sféricky symetrická a statická. Iba prvé z týchto štyroch súradních pokrývajú celý de Sitterov vesmír.
