$\cdot\bullet$ **Sada 4**: *Kozmická struna* $\bullet\cdot$

Pr. 1 *Riemannov tenzor v Taylorovom rozvoji metriky*: Súradnice v lokálnej inerciálnej sústave (LIS) s počiatkom v udalosti x^0 sa zavádzajú tak, aby

$$g_{\mu\nu}(x^0) = \eta_{\mu\nu}, \qquad \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}(x^0) = 0,$$

a nazývajú sa aj Riemannove normálne súradnice. Prvé dva členy Taylorovho rozvoja komponent metriky okolo bodu x^0 potom nedávajú žiaden rozdiel oproti Minkowského metrike, ale tretí člen je daný Riemannovým tenzorom. Úlohou je dokázať, že v LIS platí

$$g_{\mu\beta}(x) = \eta_{\mu\beta} - \frac{1}{3} R_{\mu\alpha\beta\gamma}(x^0) \left(x - x^0\right)^{\alpha} \left(x - x^0\right)^{\gamma} + \mathcal{O}\left(\left(x - x^0\right)^3\right). \tag{1}$$

Navrhovaný postup odvodenia je:

1. Rovnicu geodetiky zderivovať podľa vlatného času, využiť, že v LIS $\dddot{x}^{\mu}(x^0) = 0$, a ukázať, že $\Gamma^{\mu}_{(\alpha\beta,\gamma)}(x^0) = 0$.
2. Ukázať, že v LIS sa dá vo výsledku z predchádzajúceho bodu beztrestne znížiť horný index, teda $\Gamma_{\mu(\alpha\beta,\gamma)}(x^0) = 0$.
3. S využitím výsledku z predchádzajúceho bodu a symetrickosti Christoffelových symbolov $\Gamma_{\mu(\alpha\beta)}$ odvodiť
$$\Gamma_{\mu\alpha\beta,\gamma}(x^0) + \Gamma_{\mu\gamma\alpha,\beta}(x^0) + \Gamma_{\mu\beta\gamma,\alpha}(x^0) = 0.$$
4. Využitím vzťahu pre výpočet Riemannovho tenzora spolu so vzťahom z predchádzajúceho bodu ukázať, že platí
$$R_{\mu\alpha\beta\gamma}(x^0) + R_{\mu\gamma\beta\alpha}(x^0) = -3\left(\Gamma_{\mu\alpha\beta,\gamma}(x^0) + \Gamma_{\mu\gamma\beta,\alpha}(x^0)\right),$$
a po dosadení vzťahu pre výpočet Christoffelových symbolov tento výraz prepísať ako
$$-3g_{\mu\beta,\alpha\gamma}(x^0) - 3\underbrace{\left(g_{\alpha[\mu,\beta]\gamma}(x^0) + g_{\gamma[\mu,\beta]\alpha}(x^0)\right)}_{(\#)}.$$
5. Ukázať, že vďaka symetriám Riemannovho tenzora (na ľavej strane rovnosti z predchádzajúceho bodu) časť výrazu z predchádzajúceho bodu (#) musí byť nulová.
6. Napísať Taylorov rozvoj komponent metriky a s využitím výsledkov z predchádzajúcich dvoch bodov dospieť ku vzťahu (1).

Pr. 2 *Dvojrozmerná symetrická varieta:* Kladne definitná metrika dvojrozmernej variety, ktorá je rotačne symetrická vzhľadom na jeden bod (počiatok), sa vo vhodných súradniciach (vzdialenosť od počiatku r a uhlová súradnica φ) dá zapísať ako

$$dl^2 = dr^2 + f(r)^2 d\varphi^2. \tag{2}$$

Úlohou je:

1. Ukázať, že ak symetrickú dvojrozmernú varietu definujeme ako rotačne symetrickú plochu v trojrozmernom Euklidovskom priestore ($dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$) parametrizovanú ako $x = f\cos\varphi$, $y = f\sin\varphi$, $z = z(f)$, tak fukcia $f(r)$ z metriky (2) musí vždy spĺňať podmienku
$$|f'(r)| \equiv \left|\frac{df(r)}{dr}\right| < 1.$$
(Existujú teda aj také dvojrozmerné variety, ktoré nie je možné definovať ako plochy v trojrozmernom Euklidovskom priestore. Napríklad Lobačevského rovina s $f(r) = \mathrm{sh} r$, kde $|f'(r)| = \mathrm{ch} r \geq 1$.)

2. Vypočítať skalárnu krivosť R pre varietu s metrikou (2). Výhodné je riešiť Cartanove štruktúrne rovnice (Fecko $\boxed{15.6.10}$),

$$\begin{aligned} de^1 + \alpha \wedge e^2 &= 0, \\ de^2 - \alpha \wedge e^1 &= 0, \\ R\, e^1 \wedge e^2 &= 2\, d\alpha, \end{aligned}$$

kde e^1 a e^2 sú repérne 1-formy, $dl^2 = \left(e^1\right)^2 + \left(e^2\right)^2$. Malo by vyjsť

$$R = -2\, \frac{f''}{f}.$$

(Pre Lobačevského rovinu s $f(r) = \text{sh}r$ vychádza konštantná krivosť $R = -2$.)

3. Postupom z bodu 1. nájsť funkciu $f(r)$ pre sféru s polomerom r_0. Využitím výsledku z prechádzajúceho bodu potom ukázať, že skalárna krivosť takejto sféry je konštantná funkcia

$$R = \frac{2}{r_0^2}.$$

4. Rovnakým postupom nájsť funkciu $f(r)$ aj pre kužeľovú plochu, ktorej uhol medzi osou symetrie a priamkami na jej plášti je ω ($\omega = 0$ – kužeľ je nekonečne špicatý, stáva sa (pol)priamkou, $\omega = \pi/2$ – kužeľ je nekonečne tupý, stáva sa rovinou). Malo by vyjsť $f(r) \propto r$, čo dáva nulovú krivosť. Kužeľová plocha je teda plochá (dá sa prestrihnúť a bez pokrčenia nalepiť na rovinu). Problematický je ale špic kužela, kde je krivosť nekonečná.

5. Nahradiť ostrý špic kužeľa z predchádzajúceho bodu časťou sféry z bodu 3 a pre takúto rotačnú plochu vypočítať integrál skalárnej krivosti cez celú plochu. Výsledok by mal byť

$$R_{\text{int}} = 4\pi \left(1 - \sin\omega\right).$$

Ukázať tiež, že funkcia $f(r)$ sa asymptoticky správa ako

$$f(r) = \begin{cases} (\sin\omega)\, r & \text{v limite } r \to \infty, \\ r & \text{v limite } r \to 0. \end{cases}$$

Pr. 3 *Kozmická struna*: Uvažujme časopriestor s metrikou

$$ds^2 = -dt^2 + \underbrace{dr^2 + f(r)^2 d\varphi^2}_{(\star)} + dz^2, \tag{3}$$

kde vyznačená časť metriky $(\star)$ je metrika (2) z **Pr. 2**, ktorej prislúchajúca skalárna krivosť vyšla ako $R^{(\star)} = -2f''/f$. Kozmická struna je (nekonečne) dlhý, tenký a osovo symetrický hmotný objekt, ktorý časopriestor zakrivuje tak, že metrika v ňom vyzerá ako (3) s funkciou $f(r)$, ktorá sa asymptoticky správa ako

$$f(r) = \begin{cases} \frac{2\pi - \alpha}{2\pi} r & \text{v limite } r \to \infty, \\ r & \text{v limite } r \to 0. \end{cases}$$

Súradnica r meria fyzikálnu dĺžku radiálnych kriviek (t =konšt., $r = \lambda$, φ=konšt., z=konšt.), $\int \sqrt{g_{rr}} d\lambda = r$, a funkcia $f(r)$ meria obvody kružníc kolmých na os z a so stredom v počiatku (t =konšt., r =konšt., $\varphi = \lambda$., z=konšt.), $\int \sqrt{g_{\varphi\varphi}} d\lambda = 2\pi f(r)$. Pre takéto dostatočne veľké kružnice teda máme

$$\text{obvod} \approx (2\pi - \alpha)\, \text{polomer}.$$

Uhol α sa preto nazýva uhlový deficit. Ak je metrika $(\star)$ metrikou kužeľovej plochy, ktorej špic by mal uhlol 2ω, ale je nahradený časťou sférickej plochy, tak z **Pr. 2** častí 3.-5. vidno, že $\alpha = 2\pi(1 - \sin\omega)$ a integrál skalárnej krivosti cez celý kužeľ so zaobleným špicom je $R_{\text{int}}^{(\star)} = 2\alpha$, čo nezávisí od polomeru krivosti zaobleného špicu ale iba od uhlového deficitu. Keďže je kužeľová plocha plochá všade okrem špicu, krivky v časopriestore kozmickej struny (3), ktoré sa okolo kozmickej struny neobtáčajú, žiaden uhlový deficit nemajú. Metrika (3) s $f(r) = (1 - \alpha/2\pi)\, r$ je teda metrikou časopriestoru, z ktorého je odstránená časť priestoru prislúchajúca uhlovému deficitu α. (Časť priestoru "zmizla" a "premenila sa" na hmotu.) Úlohou je:

1. Dokázať, že skalárna krivosť metriky kozmickej struny (3) je rovnaká ako skalárna krivosť časti metriky ($\star$), teda $R = R^{(\star)} =$ [**Pr. 2** bod 2.] $= -2f''/f$. Stačí využiť komponentný vzťah pre výpočet skalárnej krivosti a rozmyslieť si, ktoré členy v sumách sa neuplatnia. Integrál zo skalárnej krivosti sa preto tiež nezmení, $R_{\text{int}} = R^{(\star)}_{\text{int}}$, ale teraz má význam dĺžkovej hustoty (pozdĺž osi z) integrálu zo skalárnej krivosti.

2. Dokázať platnosť implikácie $g_{00} = -1 \implies R_{00} = 0$. Navrhovaný postup je založený na dôkaze, že $R_{\mu 0 \beta 0} = 0$, čo zahŕňa fixovanie bodu v časopriestore x^0, prechod do Riemannových normálnych súradníc ($g_{\mu\beta} = \eta_{\mu\beta}$), v ktorých platí (1) z **Pr. 1**, návrat do pôvodných súradníc, a nakoniec "odfixovanie" bodu, v ktorom celý výpočet platí.

3. Využitím výsledkov z predchádzajúcich bodov ukázať, že hustota energie látky, ktorá prislúcha metrike (3) je

$$\rho(r) \equiv T_{00} = -\frac{1}{8\pi\kappa}\frac{f''(r)}{f(r)},$$

   a v prípade kozmickej struny, ktorej priestorové roviny z =konšt. sú kužeľové plochy s uhlovým deficitom α vyjde

$$\rho(r) = \frac{1}{8\pi\kappa}\frac{\alpha}{2\pi - \alpha}\frac{\delta(r)}{r}.$$

   Druhý výsledok dostať s pomocou vzťahu pre $R_{\text{int}} = 2\alpha$ a faktu, že časopriestor s metrikou (3) je plochý všade okrem osi z. Kým prvý výsledok zodpovedá realistickejšej kozmickej strune s konečnou hustotou energie, druhý platí pre ideálnu kozmickú strunu s nulovou hrúbkou.

4. Odvodiť vzťah pre závislosť medzi dĺžkovou hustotou ideálnej kozmickej struny a jej uhlovým deficitom

$$\frac{\delta M}{\delta z} = \frac{\alpha}{8\pi\kappa},$$

   a vyčísliť, koľko hmotností planéty Zem má jeden meter kozmickej struny s uhlovým deficitom $1°$. Najprv ukázať, že v jednotkách s $c = 1$ sa hodnota obrátenej gravitačnej konštanty približne rovná $\kappa^{-1} \doteq 225 M_{\text{Zem}}\text{m}^{-1}$ (stačí poznať $R_{\text{Zem}} \doteq 6,38 \cdot 10^6$m, $g \doteq 9.81\text{ms}^{-2}$, $c \doteq 3 \cdot 10^8\text{ms}^{-1}$).
