## Sada 5: *Konformne Minkowského metrika*

Časopriestorová metrika s komponentami v tvare

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2 \eta_{\mu\nu}, \tag{1}$$

kde $\Omega(t,x,y,z)$ je funkciou všetkých súradníc a $\eta_{\mu\nu}$ sú komponenty Minkowského metriky, sa nazýva konformne Minkowského metrika.

---

**Pr. 1** *Riemannov tenzor konformne Minkowského metriky*: Úlohou je:

1. Pomocou zápisu Christoffelových symbolov cez komponenty metriky ukázať, že komponenty Riemannovho tenzora sa dajú vyjadriť ako

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\beta,\nu\alpha} + g_{\nu\alpha,\mu\beta} - g_{\mu\alpha,\nu\beta} - g_{\nu\beta,\mu\alpha}\right) + g_{\rho\lambda}\left(\Gamma^{\rho}_{\mu\beta}\Gamma^{\lambda}_{\nu\alpha} - \Gamma^{\rho}_{\mu\alpha}\Gamma^{\lambda}_{\nu\beta}\right).$$

2. Pomocou vzťahu z predchádzajúceho bodu vypočítať Riemannov tenzor pre metriku (1). Malo by vyjsť

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\alpha\beta} &= \Omega\left(\eta_{\mu\beta}\Omega_{,\nu\alpha} + \eta_{\nu\alpha}\Omega_{,\mu\beta} - \eta_{\mu\alpha}\Omega_{,\nu\beta} - \eta_{\nu\beta}\Omega_{,\mu\alpha}\right) - \\ &\quad -2\left(\eta_{\mu\beta}\Omega_{,\nu}\Omega_{,\alpha} + \eta_{\nu\alpha}\Omega_{,\mu}\Omega_{,\beta} - \eta_{\mu\alpha}\Omega_{,\nu}\Omega_{,\beta} - \eta_{\nu\beta}\Omega_{,\mu}\Omega_{,\alpha}\right) + \\ &\quad + \left(\eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}\right)\eta^{\rho\lambda}\Omega_{,\rho}\Omega_{,\lambda}. \end{aligned}$$

3. Kontrahovaním Riemannovho tenzora z predchádzajúceho bodu odvodiť vzťah pre Ricciho tenzor

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{\Omega}\left(2\Omega_{,\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\Omega_{,\alpha\beta}\right) + \frac{4}{\Omega^2}\Omega_{,\mu}\Omega_{,\nu} - \frac{1}{\Omega^2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\Omega_{,\alpha}\Omega_{,\beta}.$$

---

**Pr. 2** *Svetelné lúče v konformne Minkowského metrike:* Svetelné lúče (nulové geodetiky), $u_\mu u^\mu = 0$, v konformne Minkowského metrike (1) spĺňajú rovnicu

$$-\dot{t}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 0. \tag{2}$$

Mohlo by sa teda javiť, že očividné riešenie tejto rovnice dáva pre svetelný lúč predpis $\vec{x} = \vec{n}t$, čiže rovné lúče. Existujú však aj iné riešenia, napríklad $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 0$, teda iné ako rovné lúče. Napriek tomu sa však dá ukázať, že zakrivené svetelné lúče nie sú riešeniami rovnice geodetiky, aj keď zákon zachovania (2) spĺňajú. Úlohou je:

1. Ukázať, že rovnica geodetiky pre svetelný lúč v metrike (1) sa s využitím rovnice (2) dá zapísať ako

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = -\frac{2}{\Omega}\left(\frac{d\Omega}{d\tau}\right)\frac{dx^\mu}{d\tau}.$$

2. Parameter geodetiky $\tau$ (Pri fotónoch nemá zmysel nazývať ho vlastný čas.) nahradiť novým parametrom $\lambda$ cez funkciu $f(t,x,y,z)$, ktorá je podielom ich prírastkov, $d\lambda = f d\tau$. Nájsť funkciu $f$ v takom tvare, aby rovnica

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} = 0$$

dávala rovnicu geodetiky z predchádzajúceho bodu. Ak taká funkcia $f$ existuje, znamená to, že svetelné lúče sú rovné, akurát z pohľadu súradnicového času fotóny, ktoré po nich idú, spomaľujú a zrýchľujú.

---

**Pr. 3** *Nordströmova teória gravitácie*: Ešte pred sformulovaním Einsteinovej teórie gravitácie bola sformulovaná Nordströmova teória. V roku 1912 ako teória poľa pre Newtonov gravitačný potencál $\phi$, a v roku 1913 ako geometrická teória s časopriestorovou metrikou (1), v ktorej $\Omega = e^{\phi}$. Úlohu Einsteinových rovníc v nej hrá rovnica

$$\boxed{R = \alpha T_{\mu}{}^{\mu}} \qquad \left(g_{\mu\nu} = e^{2\phi}\eta_{\mu\nu}\right) \tag{3}$$

so skalárnou krivosťou $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ na ľavej strane a so stopou tenzora energie-hybnosti $T_{\mu}{}^{\mu} = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ na pravej strane. Úlohou je:

1. S využitím výsledku z **Pr. 1** bodu 3. vypočítať skalárnu krivosť metriky (3) (v zátvorke), a ukázať, že rovnica (3) (v rámčeku) vedie na

$$\eta^{\mu\nu}\left(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + \phi_{,\mu\nu}\right) = -\frac{1}{6}\alpha\eta^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = [\text{pre ideálnu kvapalinu}] = -\frac{1}{6}\alpha\left(-\rho + 3p\right).$$

2. Nájsť konštantu úmernosti medzi konštantou $\alpha$ a Newtonovou gravitačnou konštantou $\kappa$, aby rovnica z predchádzajúceho bodu mala správnu Newtonovskú limitu, $\triangle\phi = 4\pi\kappa\rho$.

3. Ukázať, že v Newtonovskej limite dáva rovnica geodetiky pre hmotné (pomaly sa pohybujúce) častice v metrike (3) (v zátvorke) správny výsledok. Využiť výsledok odvodenia z prednášky.

Nordströmova teória je teda relativistická teória gravitácie (Dajú sa v nej zavádzať LIS, v ktorých platí špeciálna teória relativity.), ktorá dáva správnu Newtonovskú limitu. Na rozdiel od Einsteinovej teórie však nedáva správnu predpoveď pre ohyb svetla v gravitačnom poli, keďže metrika je v nej konformne Minkowského a v **Pr. 2** sme ukázali, že nulové geodetiky sú v takej metrike rovné.

---