$\cdot\bullet$ $\boxed{\textbf{Sada 6}: \textit{Geodetiky}}$ $\bullet\cdot$

Pr. 1 *Geodetiky v Lobačevského rovine*: Dvojrozmerná Lobačevského rovina sa definuje (ako v **Sade 2**, **Pr. 2** bode 4.) cez metriku $dl^2 = -du^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2$ indukovanú na plochu danú väzbou $u^2 - r^2 = 1$. Metrika sa preto dá napísať ako

$$dl^2 = -du^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 = \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{r^2+1} \\ du = \dfrac{rdr}{\sqrt{r^2+1}} \end{array} \right] = -\frac{r^2 dr^2}{r^2+1} + dr^2 + r^2 d\phi^2 = \boxed{\frac{dr^2}{r^2+1} + r^2 d\phi^2}. \tag{1}$$

Úlohou je:

1. Zo zákonov zachovania pre geodetiku v priestore s metrikou (1) (cykličnosť súradnice ϕ a parametrizácia geodetiky jej dĺžkou, $g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 1$) odvodiť

$$r^2\dot{\phi} = \Omega = \text{konšt.}, \qquad \frac{\dot{r}^2}{r^2+1} + r^2\dot{\phi}^2 = 1, \qquad \dot{x}^i \equiv \frac{dx^i}{d\text{ dĺžka geodetiky}}.$$

2. Rovnice z predchádzajúceho bodu skombinovať, vylúčiť z nich parameter geodetiky, a nájsť riešenie v kvadratúrach

$$\phi = \pm\Omega \int \frac{dr}{r^2\sqrt{(1+r^2)\left(1-\frac{\Omega^2}{r^2}\right)}}.$$

3. Integrál z predchádzajúceho bodu explicitne vypočítať a ukázať, že geodetiky v Lobačevského rovine sú krivky dané predpisom

$$\frac{\Omega}{r^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Omega} - \Omega\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Omega} + \Omega\right)\cos\left[2\left(\phi - \phi_0\right)\right].$$

4. Prepísať predpis geodetiky odvodený v predchádzajúcom bode do Kartézskych súradníc, $x = r\cos(\phi - \phi_0)$, $y = r\sin(\phi - \phi_0)$. Malo by vyjsť

$$\frac{1}{\Omega^2}x^2 - y^2 = 1.$$

   Túto krivku aj načrtnút v rovine x-y.

Pr. 2 *Zvislý vrh nahor v zrýchlenej sústave*: V sústave pozorovateľa urýchľovaného konštantným zrýchlením g sa používajú Rindlerove súradnice, v ktorých má Minkowského metrika tvar

$$ds^2 = -(1+g\overline{x})^2 d\overline{t}^2 + d\overline{x}^2, \tag{2}$$

viď **Sada 1**, **Pr. 2** bod 2. Úlohou je:

1. Nájsť zákon zachovania pre geodetiku v metrike (2) za cykličnosť časovej súradnice $\overline{t}$. Je to zákon zachovania energie $E = -mu_0$, kde $u^0 = d\overline{t}/d\tau$ a m je pokojová hmotnosť telesa idúceho po geodetike.

2. Energiu z predchádzajúceho bodu prepísať do tvaru

$$E = m\frac{1+g\overline{x}}{\sqrt{1-\overline{v}^2}}, \qquad \text{kde } \overline{v} = \frac{d\overline{x}}{d\overline{\tau}} \text{ s časom } \overline{\tau} \text{ takým, ktorý beží na fyzikálnych}$$

   hodinách zrýchleného pozorovateľa, teda $ds^2 = -d\overline{\tau}^2 + d\overline{x}^2$.

3. Vzťah odvodený v predchádzajúcom bode rozvinúť v limite malej rýchlosti $\overline{v}$ a slabého zrýchlenia g a overiť, že v tejto limite sa energia rozpadne na zložky známe z klasickej mechaniky. Jednotlivé zložky identifikovať.

(ešte bod 4. $\rightarrow$)

4. Vypočítať výšku h, do ktorej vyletí teleso vrhnuté nahor s počiatočnou rýchlosťou $\overline{v}_0$. Opäť overiť, že v limite malej rýchlosti dostávame vzťah z klasickej mechaniky. Využiť zachovávanie energie E a okrajové podmienky $\overline{x} = 0 \leftrightarrow \overline{v} = \overline{v}_0$ a $\overline{x} = h \leftrightarrow \overline{v} = 0$.

Pr. 3 *Šikmý vrh v zrýchlenej sústave*: Metriku zrýchleného pozorovateľa z prechádzajúceho príkladu (2) rozšírme o ďalší priestorový rozmer,

$$ds^2 = -(1 + gx)^2 dt^2 + dx^2 + dy^2, \tag{3}$$

aby sme mohli uvažovať šikmé vrhy v rovine x-y, kde os x trčí smerom "hore". Pre zjednodušenie označení sú tu vynechané pruhy nad súradnicami, no celý čas budeme pracovať s touto Minkowského metrikou v Rindlerových súradniciach. Úlohou je:

1. Napísať všetky zákony zachovania pre geodetiky hmotných častíc v metrike (3), ktoré máme k dispozícii. Mali by byť tri. Zachovanie u_0 za cykličnosť času, u_y za cykličnosť súradnice y a tretia rovnica je za normovanie 4-rýchlosti pri parametrizácii geodetiky vlastným časom, $u_\mu u^\mu = -1$.

2. Uvažovať šikmý vrh nahor s počiatočnými podmienkami

$$v^y_{\text{fyz}}\Big|_0 \equiv \frac{dy}{dt_{\text{fyz}}}\Big|_0 = v_{0\|}, \qquad v^x_{\text{fyz}}\Big|_0 \equiv \frac{dx}{dt_{\text{fyz}}}\Big|_0 = v_{0\perp},$$

kde t_{fyz} je fyzikálny čas, ktorý beží na hodinách zrýchleného pozorovateľa, teda metrika (3) má s ním tvar $ds^2 = -dt^2_{\text{fyz}} + dx^2 + dy^2$, a s okrajovými podmienkami

$$x|_0 = 0 \leftrightarrow y|_0 = 0, \qquad x = h \leftrightarrow y = \frac{d}{2},$$

kde h je maximálna výška a d je dostrel.

3. Ukázať, že zachovávajúce sa veličiny z bodu 1. sa v reči počiatočných a okrajových bodmienok z predchádzajúceho bodu dajú zapísať ako

$$u_y \overset{(a)}{=} \gamma_0 v_{0\|}, \quad \text{kde } \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2_{0\|} - v^2_{0\perp}}}, \qquad u_0 \overset{(b)}{=} -\sqrt{1 + u_y^2}\,(1 + gh)\,,$$

$$u_0 \overset{(c)}{=} -\sqrt{1 + u_y^2 + (\gamma_0 v_{0\perp})^2}.$$

Na odvodenie (a) využiť $u_y = u^y = \dot{y} = dy/d\tau$ spolu s $-d\tau^2 = ds^2$, pri (b) využiť $u_\mu u^\mu = -1$ spolu s $x = h \leftrightarrow \dot{x} = 0$, a (c) odvodiť tiež z $u_\mu u^\mu = -1$ ale pri $x = 0$.

4. Rovnice z bodu 1. pokombinovať tak, aby sa z rovnice $u_\mu u^\mu = -1$ vylúčili $\dot{t}$ a $\dot{y}$ a odvodiť

$$u^x \equiv \frac{dx}{d\tau} = \sqrt{\frac{u_0^2}{(1 + gx)^2} - \left(1 + u_y^2\right)}.$$

5. Ukázať, že dostrel d sa dá vypočítať ako

$$d = 2\int_{x=0}^{x=h} dy = 2\int_0^h \frac{u^y}{u^x} dx = 2u_y \int_0^h \frac{(1 + gx)\,dx}{\sqrt{u_0^2 - \left(1 + u_y^2\right)(1 + gx)^2}}.$$

6. Dopočítať integrál z predchádzajúceho bodu, kde by malo vyjsť

$$d = \frac{2}{g}\frac{u_y}{\left(1 + u_y^2\right)}\left[\sqrt{u_0^2 - \left(1 + u_y^2\right)} - \underbrace{\left(u_0^2 - \left(1 + u_y^2\right)(1 + gh)^2\right)}_{=0 \leftarrow \text{ výsledok } (b) \text{ z bodu 3.}}\right],$$

a s pomocou vzťahov z bodu 3. prepísať výsledok integrovania do tvarov

$$d = \frac{2}{g}\frac{v_{0\|} v_{0\perp}}{1 - v^2_{0\perp}} = \frac{2}{g} v_0^2 \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1 - v_0^2 \sin^2\alpha},$$

kde α je zámerný uhol definovaný ako $v_{0\|} = v_0 \cos\alpha$, $v_{0\perp} = v_0 \sin\alpha$.
