$\cdot\bullet$ **Sada 7**: *Synchronizácia časovej súradnice* $\bullet\cdot$

Pr. 1 *Lorentzova transformácia*: Ak uvažujeme Galileiho transformáciu medzi dvomi inerciálnymi sústavami, tak zistíme, že takáto transformácia nezachováva tvar Minkowského metriky, a teda nie je v súlade s princípom rovnocennosti inerciálnych sústav. Potrebujeme preto (špeciálnu) Lorentzovu transformáciu. Tá sa dá získať opravením Galileiho transformácie pomocou synchronizácie časovej súradnice. Úlohou je:

1. Prepísať Minkowského metriku $ds^2 = -dt'^2 + dx'^2$ do nových súradníc daných Galileiho transformáciou, $t' = \widetilde{t}$, $x' = \widetilde{x} + v\widetilde{t}$. Akou rýchlosťou a akým smerom sa voči sebe čiarkovaná a vlnkovaná sústava pohybujú?

2. Časovú súradnicu $\widetilde{t}$ nahradiť synchronizovaým časom $\widehat{t}$ pomocou postupu z prednášky, $\widehat{t} = \widetilde{t} - \Delta\widetilde{t}$, kde synchronizačný čas sa počíta ako $\Delta\widetilde{t} = -\int \widetilde{g}_{0i}/\widetilde{g}_{00} d\widetilde{x}^i$. Rozmyslieť si, že synchronizačný čas nezávisí od výberu krivky, pozdĺž ktorej synchronizujeme.

3. Minkowského metriku prepísať do nových súradníc, $\widehat{t}, \widetilde{x}$. Malo by vyjsť
$$ds^2 = -\left(1 - v^2\right) d\widehat{t}^2 + \frac{1}{1 - v^2} d\widetilde{x}^2.$$

4. Súradnice $\widehat{t}, \widetilde{x}$ preškálovať tak, aby sa metrika z predchádzajúceho bodu dala zapísať v tvare $ds^2 = -dt^2 + dx^2$. Zhrnúť všetky čiastkové transformácie z predchádzajúcich bodov a tak nájsť vzťahy medzi súradnicami t', x' a t, x.

Týmto postupom (podmienka zachovania tvaru Minkowského metriky) sme odvodili špeciálne Lorentzove transformácie,
$$t' = \frac{t + vx}{\sqrt{1 - v^2}}, \qquad x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Pr. 2 *Rotujúci disk*: V Minkowského časopriestore zaveďme také súradnice, ktoré sú spojené s diskom rotujúcim s uhlovou rýchlosťou ω. Metriku
$$ds^2 = -dt'^2 + dr'^2 + r'^2 d\phi'^2,$$
teda prepíšeme do nových súradníc, spojených s rotujúcim diskom, daných transformáciou
$$t' = t, \qquad r' = r, \qquad \phi' = \phi + \omega t.$$
Úlohou je:

1. Rozmyslieť si smer otáčania disku zodpovedajúci vyššie uvedeným vzťahom.

2. Prepísať Minkowského metriku z pôvodných súradníc t', r', ϕ' do súradníc rotujúceho disku t, r, ϕ.

3. Rozmyslieť si, v akej oblasti je možné definovať použitú súradnicovú transformáciu (znamienko g_{00}, resp. uhlová rýchlosť).

4. Z g_{00} komponenty odvodiť vzťah medzi súradnicovým časom t a vlastným časom pozorovateľa prilepeného na rotujúcom disku (r, ϕ=konšt.). Mal by vyjsť rovnaký vzťah ako pre špeciálne relativistickú dilatáciu času prislúchajúcu rýchlosti $v = \omega r$ (uhlová rýchlosť).

5. Vypočítať synchronizačný čas $\Delta t = -\int g_{0i}/g_{00} dx^i$ pre synchronizáciu po slučke – po kružnici s polomerom R so stredom v počiatku. Výsledok je nenulový, čo znamená, že tieto súradnice nemožno synchronizovať.

6. Nájdite priestorovú metriku, $\gamma_{ij} = g_{ij} - g_{0i}g_{0j}/g_{00}$. Malo by vyjsť
$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j = dr^2 + \frac{r^2}{1 - \omega^2 r^2} d\phi^2.$$

(ešte bod 7. $\rightarrow$)

7. Z priestorovej metriky odvodenej v predchádzajúcom bode ukázať, že pre obvody kružníc s polomerom r a so stredom v počiatku $\mathcal{O}_{\mathrm{bvod}}(r)$, $dl^2 = dr^2 + \left(\mathcal{O}_{\mathrm{bvod}}(r)/2\pi\right)^2 d\phi$, platí špeciálne relativistická kontrakcia dĺžky prislúchajúca rýchlosti $v = \omega r$ (uhlovej rýchlosti).

Pr. 3 *Zrýchlenie a uhlová rýchlosť stojaceho pozorovateľa*: Aby pozorovateľ namiesto pohybu po geodetike mal zafixované priestorové súradnice a aby sa jeho repér vzhľadom na tie súradnice neotáčal, musia na neho pôsobiť sily. V dôsledku toho takýto pozrovateľ pociťuje zrýchlenie a uhlovú rýchlosť, ktoré sú dané vzťahmi

$$a_a = \left(\ln\sqrt{-g_{00}}\right)_{,a}, \qquad \omega_{ab} = -\sqrt{-g_{00}}g_{[i,j]}e_a{}^i e_b{}^j, \qquad g_i \equiv -\frac{g_{0i}}{g_{00}}, \qquad \omega_{ab} \equiv \varepsilon_{abc}\omega_c,$$

kde indexy a, b, c sa vzťahujú k súradniciam natiahnutým na repér pozorovateľa $e_a{}^\mu$, $g_{\mu\nu}e_a{}^\mu e_b{}^\nu = \eta_{ab}$, takže $\partial_a = e_a{}^\mu \partial_\mu$. Úlohou je:

1. Vypočítať zrýchlenie a uhlovú rýchlost pozorovateľa v Minkowského metrike, ktorý stojí v Rindlerových súradniciach (v súradniciach zrýchleného pozorovateľa), kde má Minkowského metrika tvar ako v **Sade 1**, **Pr. 2**

$$ds^2 = -\left(1 + \alpha x\right)^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

   Malo by vyjsť

$$a_a = \frac{\alpha}{1 + \alpha x}\delta_a^x, \qquad \omega_{ab} = 0.$$

2. Vypočítať zrýchlenie a uhlovú rýchlost pozorovateľa v Minkowského metrike, ktorý stojí v súradniciach spojených s rotujúcim diskom z **Pr. 2**. Príslušná metrika je

$$ds^2 = -\left(1 - \omega^2 r^2\right) dt^2 + 2\omega r^2 dt d\phi + dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2,$$

   a kvôli nenulovej komponente $g_{0\phi}$ repérny vektor $e_\phi{}^\mu$ trčí aj do časového smeru, $e_\phi = (\#1)\partial_0 + $ $+(\#2)\partial_\phi$. Výrazy #1 a #2 určiť z podmienky $g_{\mu\nu}e_\phi{}^\mu e_\phi{}^\nu = 1$ a z faktu, že pri voľbe $\omega = 0$ musí platiť $e_\phi{}^\mu = \delta_\phi^\mu / r$. Malo by vyjsť

$$a_a = -\frac{\omega^2}{1 - \omega^2 r^2}\left(x\delta_a^x + y\delta_a^y\right), \qquad \omega_a = -\frac{\omega}{1 - \omega^2 r^2}\delta_a^z.$$

   Prvý vzťah je vzhľadom na repér e_x, e_y, e_z. Druhý vzťah odvodiť cez výpočet jedinej nenulovej nezávislej zložky ω_{ab}, ktorá by mala byť $\omega_{\widehat{\phi}\widehat{r}} = = -\omega_{\widehat{r}\widehat{\phi}}$ (strieškované indexy sú repérne, vzhľadom na repér e_r, e_ϕ, e_z), (Ukázať, že ostatné komponenty sú nulové!), a so zohľadnením pravotočivosti repérnych súradníc, teda $\varepsilon_{\widehat{r}\widehat{\phi}\widehat{z}} = 1$.
