Sada 8: *(pseudo)Tenzor energie-hybnosti*

Pr. 1 *Hustota Lagranžiánu ideálnej kvapaliny*: Hustota Lagranžiánu ideálnej kvapaliny sa dá definovať ako

$$\mathcal{L}_{\mathrm{M}} = -\rho(n), \qquad n \propto \sqrt{\det \Gamma^{IJ}}, \qquad I, J = 1, 2, 3,$$

kde hustota energie ρ závisí od koncentrácie častíc n, a tá je daná determinantom metriky Γ^{IJ}, ktorá meria vzdialenosti v tzv. telesovom priestore so súradnicami $\mathcal{X}^I$. Súradnice $\mathcal{X}^I$ sú spojené s objemovými elementmi kvapaliny, resp. objemové elementy sú parametrizované (očíslované) tromi funkciami na časopriestore

$$x^\mu \mapsto \mathcal{X}^I,$$

a telesová metrika je iba push-forwardom časopriestorovej metriky vzhľadom na takého zobrazenie,

$$\Gamma^{IJ} = g^{\mu\nu} \mathcal{X}^I{}_{,\mu} \mathcal{X}^J{}_{,\nu}.$$

Úlohou je:

1. Ukázať, že ak telesovú metriku prenesieme naspäť do časopriestoru, tak nedostaneme pôvodnú časopriestorovú metriku, ale jej projekciu na nadplochy kolmé na 4-rýchlosť objemových elementov kvapaliny $u^\mu = dx^\mu / d\tau$,

$$\mathcal{X}^I{}_{,\mu} \mathcal{X}^J{}_{,\nu} \Gamma_{IJ} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu.$$

   Stačí využiť, že $u^\mu u_\mu = -1$, a skutočnosť, že v telesových súradniciach objemové elementy kvapaliny stoja, $d\mathcal{X}^I / d\tau = 0$.

2. Z tretej vety termodynamickej pre izobarické stláčanie elementu kvapaliny s objemom $V \propto n^{-1}$, teda zo vzťahu $dE + p dV = 0$, kde $E = \rho V$, odvodiť diferenciálny vzťah medzi hustotou energie a koncetráciou častíc

$$\frac{d\rho}{dn} = \frac{\rho + p}{n}.$$

3. Pomocou výsledkov z predchádzajúcich bodov nájsť tenzor energie-hybnosti ideálnej kvapaliny

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \left(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\mathrm{M}} \right) = \text{...výpočet...} = (\rho + p)\, u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}.$$

   Využiť aj vzťah pre deriváciu determinantu matice podľa jej komponenty (na prednáške sa odvodil z identity det = exp Tr ln).

Pr. 2 *Einsteinov tenzor v pseudo-LIS*: V pseudo-LIS (pseudo - Lokálna Inerciálna Sústava) sa súradnice zavádzajú tak, aby v jej počiatku v bode x^0 platilo

$$g_{\mu\nu}(x^0) = \text{konšt.}_{\mu\nu}, \qquad g_{\mu\nu,\alpha}(x^0) = 0.$$

Úlohou je:

1. Ukázať, že pre Einsteinov tenzor v pseudo-LIS v bode x^0 platí

$$G^{\mu\nu} \overset{x^0}{=} \frac{1}{2(-g)} \left[(-g) \left(g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \right) \right]_{,\alpha\beta}.$$

Táto úloha má iba jeden bod, je však pracnejší. Odporúča sa:
(a) - pripomenúť si vzťah pre deriváciu determinantu matice podľa jej komponenty (na prednáške sa odvodil z identity det = exp Tr ln);
(b) - uvedomiť si, že v pseudo-LIS síce prvé derivácie vypadnú, ale druhé derivácie nie (napríklad pre

determinant metriky $(-g)_{,\alpha} = 0$, ale $(-g)_{,\alpha\beta} \neq 0$);
c - rozrátať vzťah, ktorého platnosť dokazujeme;
d - rozrátať Einsteinov tenzor podľa známeho vzorca;
e - Výrazy z predchádzajúcich dvoch bodov porovnať s použitím vzťahu $0 = (g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda})_{,\alpha\beta} = ...$ (Leibnitz-ovo pravidlo).

Pr. 3 *Hmotnosť ostrovného systému*: Celková 4-hybnosť ostrovného systému vo vnútri objemu V sa počíta ako

$$P^{\mu} = \oint_{\partial V} h^{\mu 0 i} dS_i, \quad \text{kde} \quad h^{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{16\pi\kappa} \left[(-g)\left(g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}\right)\right]_{,\beta},$$

Pre pomaly sa pohybujúce zdroje ($u^i \approx 0$) budiace slabé gravitačné pole na hranici ostrovného systému ($g_{\mu\nu} \overset{\partial V}{\approx} \eta_{\mu\nu}$) zo vzťahu $u_\mu u^\mu = -1$ vyplýva $u^0 \approx 1$. Hmotnosť celého systému sa potom dá počítať ako

$$M \approx P^0 = \oint_{\partial V} h^{00i} dS_i.$$

Úlohou je:

1. Uvažovať metriku v tvare

$$g_{00} = -\left(1 + 2\phi\right), \qquad g_{0i} = 0 \quad \text{(vhodná voľba súradníc)},$$
$$g_{ij} = \left(1 - 2\psi\right)\delta_{ij} \quad \text{(priestorové súradnice natiahnuté na priestorový repér)},$$

   kde funckie ϕ (Newtonov gravitačný potenciál) a ψ sú malé a v čase sa menia pomaly. Nájsť komponenty inverznej metriky $g^{\mu\nu}$ do prvého rádu v malosti funkcií ϕ a ψ.

2. Vypočítať vedúci člen v h^{00i} pre túto metriku. Malo by vyjsť

$$h^{00i} \approx \frac{1}{4\pi\kappa}\psi_{,i}.$$

3. Porovnať vzťah pre hmotnosť systému M s dosadeným výsledkom z predchádzajúceho bodu s Newtonovou teóriou gravitácie, kde $M = \int \rho dV$ s $\rho = \triangle\phi / 4\pi\kappa$, a odvodiť vzťah medzi funkciou ψ a Newtonovým gravitačným potenciálom ϕ.

Z výsledku tejto úlohy vyplýva ekvivalencia medzi:
– tvarom kompletnej časopriestorovej metriky zodpovedajúcej Newtonovej limite a
– správnosťou intuitívnej interpretácie t^{00}_{celk} komponenty celkového pseudotenzora energie-hybnosti opäť v Newtonovej limite.
