**Sada 9**: *Post-Newtonovské priblíženie - rotácia zdroja*

**Pr. 1** *Moment hybnosti a $g_{0i}$ komponenta metriky*: Celkový pseudotenzor energie-hybnosti sa počíta ako

$$t^{\mu\nu}_{\text{celk}} = h^{\mu\nu\alpha}{}_{,\alpha}, \qquad h^{\mu\nu\alpha} = \lambda^{\mu\nu\alpha\beta}{}_{,\beta}, \qquad \lambda^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{16\pi\kappa}(-g)\left(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\right),$$

a celkový moment hybnosti je

$$L_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}L^{jk}, \qquad L^{ij} = \int \left(x^i t^{j0}_{\text{celk}} - x^j t^{i0}_{\text{celk}}\right) dV.$$

Úlohou je:

1. Pomocou vyššie uvedených vzťahov a Gaussovej vety ukázať, že

$$L^{ij} = \int \left(x^i h^{j0k} - x^j h^{i0k} + \lambda^{i0kj}\right) dS_k.$$

2. Uvažovať metriku blízku Minkowského metrike,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad g^{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu},$$

kde porucha metriky $h_{\mu\nu}$ sa v čase mení pomaly, $\boxed{|h_{\mu\nu,0}| \ll |h_{\mu\nu,i}|}$, a používame také súradnice, v korých $\boxed{h_{0i,i} = 0}$. Pre takúto metriku odvodiť vzťahy

$$h^{i0j} \approx \frac{1}{16\pi\kappa}h_{0i,j}, \qquad \lambda^{i0jk} \approx \frac{1}{16\pi\kappa}\left(\delta_{jk}h_{0i} - \delta_{ij}h_{0k}\right),$$

kde sú ponechané iba vedúce členy v aproximácii takmer plochého časopriestoru.

3. Parametrizovať komponenty metriky $g_{0i} = h_{0i}$ ako

$$h_{0i} = -2\kappa\mathcal{L}_{ij}\left(\partial_j \frac{1}{r}\right), \qquad r = \sqrt{x^i x^i},$$

a pomocou vzťahov z predchádzajúcich dvoch bodov ukázať, že platí

$$L^{ij} \approx \mathcal{L}_{ij}.$$

Keďže $g_{0i} = h_{0i}$ a $\mathcal{L}_{ij} = L^{ij} = \varepsilon_{ijk}L^k$, tak dostávame vzťah medzi $g_{0i}$ komponentou metriky a celkovým momentom hybnosti

$$\boxed{g_{0i} = \frac{2\kappa}{r^2}\varepsilon_{ijk}n^j L^k}, \qquad n^i = \frac{x^i}{r}.$$

---

**Pr. 2** *Vplyv rotácie zdroja na ohyb svetla*: Uvažujme Minkowského metriku s malou poruchou, ktorá je rovnako ako vo výsledku predchádzajúcej úlohy daná komponentami

$$g_{0i} = \frac{2\kappa}{r^2}\varepsilon_{ijk}n^j L^k, \qquad n^i = \frac{x^i}{r},$$

a moment hybnosti $L^i$ nech trčí v smere osi $z$, teda $L^i = \delta^i_z L$. Úlohou je:

1. Ukázať, že jediné nenulové komponenty opravy Minkowského metriky v tomto prípade sú

$$g_{0x} = 2\kappa L\frac{y}{r^3}, \qquad g_{0y} = -2\kappa L\frac{x}{r^3}.$$

2. Z rovnice geodetiky pre svetelný lúč šíriaci sa v rovine $x$-$y$ odvodiť

$$\frac{d^2y}{dx^2} \approx -2\kappa L\frac{1}{r^3}.$$

Postup je podobný prednáške.

3. Vypočítať uhol ohybu svetelného lúča $\delta\alpha$ šíriaceho sa prevažne v smere osi $x$. Rovnako ako na prednáške možno použiť vzťah

$$\delta\alpha = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{y=b} dx,$$

kde $b$ je zámerný parameter lúča. Výsledok by mal byť $\delta\alpha = 4\kappa L/b^2$.

4. Porovnať korekciu k ohybu svetla vypočítanú v predchádzajúcom bode s ohybom svetla bez opravy od rotácie zdroja $\alpha = 4\kappa M/b$. Vyčísliť pomer $\delta\alpha/\alpha$ pre svetlený lúč tesne obchádzajúci povrch Slnka. Pre Slnko $M = 2 \cdot 10^{30}$ kg, $b = R = 700\,000$ km, $T = 24,5$ dňa, moment hybnosti Slnka možno aproximovať cez moment zotrvačnosti homogénnej gule $(2/5)MR^2$ a vo fyzikálnych jednotkách $\delta\alpha/\alpha \to (1/c)\delta\alpha/\alpha$ (pretože bez $c$ by sme mali $[\delta\alpha/\alpha] = \mathrm{m\ s^{-1}} = [c]$, ale výsledok má byť bezrozmerný).

---

**Pr. 3** *Precesia kruhovej obežnej dráhy*: Kvôli nenulovým komponentám metriky $g_{0i}$ dochádza ku stáčaniu aj kruhových obežných dráh v prípade, ak má orbitálny moment hybnosti obežnice $\vec{l}$ iný smer ako moment hybnosti telesa, okolo ktorého obieha, $\vec{L}$. Úlohou je:

1. Z rovnice geodetiky pre pomaly sa pohybujúci hmotný bod, $|\dot{x}^i| \ll |\dot{x}^0|$, v metrike s komponentami $g_{00} = -(1+2\phi)$, $g_{0i} \neq 0$, $g_{ij} = \delta_{ij}(1-2\phi)$, ktoré sa v čase menia veľmi pomaly, odvodiť

$$\ddot{x}^i \approx -\phi_{,i} - \left(g_{0i,j} - g_{0j,i}\right)\dot{x}^j.$$

2. Zaviesť vektor $\vec{g}$ ako $g_i = -g_{0i}/g_{00} \approx g_{0i}$ a ukázať, že rovnica geodetiky v Newtonovskej limite z predchádzajúceho bodu vedie na silu, ktorá obsahuje aj zložku magnetického typu

$$\vec{F} = -m\vec{\nabla}\phi + m\vec{v} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{g}\right),$$

kde $m$ je hmotnosť hmotného bodu a $\vec{v}$ je jeho rýchlosť.

3. Vypočítať moment sily $\vec{M}$ pôsobiaci na obežnicu obiehajúcu po kruhovej dráhe, $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, okolo telesa s momentom hybnosti $\vec{L}$, ktoré podľa **Pr 1.** budí gravitačné pole, v ktorom

$$\vec{g} = \frac{2\kappa}{r^2}\vec{n} \times \vec{L}, \qquad \vec{n} = \frac{\vec{x}}{r}.$$

Malo by vyjsť

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \cdots = -\frac{4\kappa m}{r}\left(\vec{n} \cdot \vec{L}\right)(\vec{\omega} \times \vec{n}) = -\frac{4\kappa}{r^3}\left(\vec{n} \cdot \vec{L}\right)\left(\vec{l} \times \vec{n}\right),$$

kde sa posledná rovnosť dá ukázať výpočtom $\vec{l} \times \vec{n} = [\vec{r} \times m\,(\vec{\omega} \times \vec{r})] \times \vec{n} = ...$

4. Pohybovú rovnicu pre momenty $\dot{\vec{l}} = \vec{M}$, kde pravá strana je vypočítaná v predchádzajúcom bode, za predpokladu kolmosti vektorov $\vec{l}$ a $\vec{L}$ ustredniť cez periódu obehu,

$$\langle \cdots \rangle_{\text{per.}} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \cdots\ dt,$$

(Treba ukázať, že vo vhodných súradniciach $\langle n_A n_B \rangle_{\text{per.}} = \frac{1}{2}\delta_{AB}$ pre $A, B = 1, 2$ ak $n_3 = 0$.), a odvodiť

$$\boxed{\left\langle \dot{\vec{l}}\, \right\rangle_{\text{per.}} = -\frac{2\kappa}{r^3}\vec{l}\vec{L}}.$$

---