Sada 10: *Kruhové geodetiky & Nestlačiteľná hviezda*

Pr. 1 *Kruhové geodetiky v Schwarzschildovej metrike*: V ekvatoriálnej rovine ($\vartheta = \pi/2$) sa Schwarzschildova metrika redukuje na tvar

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \dfrac{r_g}{r}}\, dr^2 + r^2 d\phi^2.$$

Pre geodetiky sú tu tri zákony zachovania: dve za cykličnosť súradníc t a ϕ a tretia za normovanie (parametrizáciu) 4-rýchlosti, $u_\mu u^\mu = -1$ pre hmotné body a $u_\mu u^\mu = 0$ pre svetelné lúče. Úlohou je:

1. Rovnice (zákony zachovania) pre geodetiky upraviť do tvaru

   $$\mathcal{E}_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r),$$

   kde bodka označuje deriváciu podľa vlastného času resp. parametra geodetiky pre svetelný lúč. Spraviť to pre hmotné body ako aj pre svetelné lúče. (Postup ako na prednáške.)

2. Vyšetriť správanie sa efektívneho potenciálu $V_{\text{eff}}(r)$ pre hmotné body aj svetelné lúče v závislosti od voľby zachovávajúcej sa veličiny u_ϕ, ktorá je úmerná momentu hybnosti.

3. Z extrémov efektívneho potenciálu zistiť: (a) aký je povolený rozsah polomerov pre stabilné kruhové dráhy hmotných častíc; (b) ako sa tento rozsah rozšíri, ak povolíme aj nestabilné kruhové dráhy hmotných častíc; (c) rovnaké rozsahy aj pre kruhové dráhy svetelných lúčov (pre svetelné lúče len jedna povolená hodnota polomeru). (Vo výsledkoch (a), (b) aj (c) by sa mali vyskytovať iba hraničné hodnoty $3r_g/2$ a $3r_g$.)

4. Nájsť frekvenciu obiehania fotónu $\Omega = d\phi/dt$ po kruhovom svetelnom lúči. Vo fyzikálnych jednotkách (bez $c = 1$) by malo vyjsť

   $$\Omega = \frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{c}{r_g}.$$

Pr. 2 *Kruhové lúče v Gödelovej metrike*: Uvažujme časopriestorovú metriku

$$ds^2 = \frac{2}{\omega^2}\left(-dt^2 + dr^2 + \left(\text{sh}^2 r - \text{sh}^4 r\right) d\phi^2 - 2\sqrt{2}\,\text{sh}^2 r\, dt\, d\phi + dz^2\right). \tag{1}$$

Tejto metrike prislúcha Einsteinov tenzor s komponentami $G_{tt} = G_{rr} = G_{zz} = 2$, $G_{\phi\phi} = 2\left(\text{sh}^2 r + 3\text{sh}^4 r\right)$, $G_{t\phi} = 2\sqrt{2}\text{sh}^2 r$. Ide teda o riešenie Einsteinových rovníc s kozmologickou konštantou, $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi\kappa T_{\mu\nu}$, s tenzorom energie-hybnosti prislúchajúcim ideálnej kvapaline s nulovým tlakom (prach), $T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu$, $u^\mu = \delta^\mu_0 \omega/\sqrt{2}$, pričom kozmologická konštanta a hustota energie musia byť presne naladené, $\Lambda = -\omega^2$, $\rho = \omega^2/4\pi\kappa$. Uhlová rýchlosť stojaceho pozorovateľa je v tejto metrike $\omega_a = (1/2)\varepsilon_{abc}\left(-\sqrt{-g_{00}}\, g_{[i,j]} {e_b}^i {e_c}^j\right) = \delta^z_a \omega$, a nadplochy konštantného synchronizovaného času v rovinách $z =$ konšt. majú metriku dvojrozmernej Lobačevského roviny. Časopriestor s takouto metrikou je teda homogénny, ale nie je izotropný, a volá sa Gödelov vesmír.

V tomto príklade s metrikou (1) budeme skúmať iba svetelné lúče. Úlohou je:

1. Pomocou zákonov zachovania za cykličnosť súradníc t a ϕ (u_t,$u_\phi =$ konšt.) ukázať, že pre geodetiky v rovine $z =$ konšt. platí

   $$\dot{t} = \left(1 - 2\frac{\text{sh}^2 r + B}{\text{ch}^2 r}\right) C_t, \quad \dot{\phi} = \sqrt{2}\frac{\text{sh}^2 r + B}{\text{sh}^2 r\,\text{ch}^2 r} C_t, \quad \text{kde } C_t = -\frac{\omega^2}{2} u_t,\ C_\phi = -\frac{\omega^2}{2} u_\phi,\ B = -\frac{C_\phi}{\sqrt{2} C_t}.$$

   Obe konštanty u_t aj u_ϕ sú dané výrazmi obsahujúcimi aj $\dot{t}$ a aj $\dot{\phi}$, takže v tomto bode treba riešiť sústavu dvoch rovníc s dvomi neznámymi.

2. Vzťahy odvodené v predchádzajúcom bode dosadiť do rovnice platnej pre svetlené geodetiky, $u_\mu u^\mu = 0$, a výslednú rovnicu napísať v tvare

   $$\mathcal{E}_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r), \quad \text{kde potenciál } V_{\text{eff}} \text{ by mal vyjsť úmerný funkcii } \left(\frac{\text{sh}^2 r + B}{\text{sh} r\,\text{ch} r}\right)^2.$$

3. Rozmyslieť si, že pre kruhovú geodetiku s $r = r_0$ musia platiť dve podmienky:
(a) $V_{\text{eff}}(r_0) = \mathcal{E}_{\text{eff}}$,
(b) $(dV_{\text{eff}}/dr)(r_0) = 0$.

4. Ukázať, že rovnica (b) z predchádzajúceho bodu pre vzťahy nájdené v bode 2. dáva $\text{sh}r_0 = B/(1-2B)$, a po použití rovnice (a) odvodiť polomer kruhovej geodetiky svetelného lúča v rovine $z =$ konšt.

$$r_0 = arc\text{sh}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} = \frac{1}{2}arc\text{sh}1 = \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

Pr. 3 *Hviezda z nestlačiteľnej kvapaliny*: Rovnice relativistickej hydrostatiky pre sféricky symetrické hviezdy majú v jednotkách, kde nielen $c = 1$, ale aj $\kappa = 1$, tvar

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi\rho r^2, \qquad \frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho+p)(m+4\pi p r^3)}{r(r-2m)} \quad \text{(Tolman–Oppenheimer–Volkoff)}.$$

Úlohou je:

1. Uvažovať nestlačiteľnosť látky, z ktorej je hviezda zložená, teda položiť $\rho =$ konšt., a riešením prvej z dvoch vyššie uvedených rovníc nájsť funkciu $m(r)$.

2. Funkciu $m(r)$ nájdenú v predchádzajúcom bode dosadiť do Tolmanovej–Oppenheimerovej–Volkoffovej rovnice a jej vyriešením nájsť funkciu $p(r)$. Malo by vyjsť

$$1 - \frac{8}{3}\pi\rho r^2 = C\left(\frac{\rho+3p}{\rho+p}\right)^2, \quad \text{kde } C \text{ je integračná konštanta.}$$

3. Integračnú konštantu C z prechádzajúceho bodu vyjadriť cez centrálny tlak $p_c = p(0)$ a nájsť závislosť medzi polomerom hviezdy R (podmienka $p(R) = 0$) a centrálnym tlakom p_c.

4. Nájsť rozsah možných pomerov polomeru hviezdy R k jej gravitačnému polomeru $r_g = 2m(R)$, ak predpokladáme, že centrálny tlak môže nadobúdať akékoľvek hodnoty z intervalu $p_c \in (0, \infty)$. Možné pomery R/r_g by mali byť ohraničené zdola, čo však pri zadanej hustote energie znamená horné ohraničenie na polomer resp. hmotnosť. Aká je minimálna hodnota pomeru R/r_g?

5. Bez súvisu s predchádzajúcimi bodmi odvodiť tiažové zrýchlenie na povrchu ($r = R$, $m = M$, $p = 0$) relativistickej hviezdy. Použiť vzťah pre zrýchlenie stojaceho pozorovateľa $a_a = (\ln\sqrt{-g_{00}})_{,i}\, e_a{}^i$ a rovnice pre komponenty časopriestorovej metriky $g_{00} = -A$ a $g_{rr} = B$ vo vnútri hviezdy,

$$\frac{1}{A}\frac{dA}{dr} = 2\kappa\frac{m+4\pi p r^3}{r(r-2\kappa m)}, \qquad B = \frac{r}{r-2\kappa m}.$$

Malo by vyjsť $a_a = \dfrac{\kappa M}{R^{3/2}\sqrt{R-r_g}}\delta_{\hat{r}a}$. Kedy sa tento výsledok blíži Newtonovej teórii?

6. Na základe výsledkov z predchádzajúcich dvoch bodov vypočítať koľkokrát väčšie tiažové zrýchlenie na povrchu hviezdy z nestlačiteľnej kvapaliny s najmenším možným pomerom R/r_g predpovedá všeobecná teória relativity oproti vzťahu v Newtonovej teórii. Mal by vyjsť faktor 3.
