Sada 11: *Čierne diery & Relativistická hviezda*

Pr. 1 *Izotropné súradnice v Schwarzschildovej metrike*: Schwarzschildova metrika

$$ds^2 = -\left(1-\frac{r_g}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{1-\frac{r_g}{r}}dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta d\phi^2$$

má po vhodnej transformácii radiálnej súradnice $r \to \rho$ taký tvar, v ktorom je jej priestorová časť $dl^2 = \gamma_{ij}dx^i dx^j$ ($\gamma_{ij} = g_{ij} - \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}$) konformne Euklidovská,

$$dl^2 = \frac{1}{1-\frac{r_g}{r}}dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta d\phi^2 = \Omega(\rho)^2(d\rho^2 + \rho^2 d\vartheta^2 + \rho^2\sin^2\vartheta d\phi^2). \tag{1}$$

Súradnice s radiálnou súradnicou ρ voláme izotropné súradnice. Úlohou je:

1. Porovnaním ľavej a pravej strany rovnosti (1) sformulovať sústavu dvoch rovníc pre dve neznáme funkcie $\Omega(\rho)$ a $r(\rho)$. Keďže $dr = \frac{dr}{d\rho}d\rho$, jedna z týchto rovníc je diferenciálna.
2. Nájsť riešenie rovníc odvodených v predchádzajúcom bode. Využiť podmienku asymptotickej plochosti $\lim_{\rho\to\infty}\Omega(\rho) = 1$ na určenie integračnej konštanty.
3. Načrtnúť funkciu $r(\rho)$ a rozmyslieť si, aká oblasť je pokrytá súradnicami s radiálnou súradnicou ρ.
4. Do nových súradníc prepísať aj g_{00} komponentu metriky.
5. Ukázať, že limita veľkej vzdialenosti od počiatku, $\rho \gg r_g$, zodpovedá Newtonovskej limite, teda $g_{00} \approx -(1+2\phi)$, $g_{0i} \approx 0$, $g_{ij} \approx \delta_{ij}(1-2\phi)$.

Celá Schwarzschildova metrika má v izotropných súradniciach tvar

$$ds^2 = -\left(\frac{1-\frac{r_g}{4\rho}}{1+\frac{r_g}{4\rho}}\right)^2 dt^2 + \left(1+\frac{r_g}{4\rho}\right)^4\left(d\rho^2 + \rho^2 d\vartheta^2 + \rho^2\sin^2\vartheta d\phi^2\right).$$

Pr. 2 *Interpretácie Schwarzschildovej metriky*: Okrem maximálneho analytického rozšírenia Schwarzschildovej metriky v Kruskalových–Szekeresových súradniciach existujú aj jej ďalšie interpretácie. Interpretácia cez **Einsteinov–Rosenov most** oblasť pod horizontom nezahŕňa a namiesto nej máme "vesmír na druhej strane". Interpretácia Schwarzschildovej metriky pod horizontom cez **Kantowského–Sachsovu metriku** zase zodpovedá anizotropne sa rozpínajúcemu vesmíru s topológiou priestorovej geometrie $\mathbb{R}\times S^2$. Úlohou je:

1. Nájsť dvojrozmernú rotačne symetrickú plochu v trojrozmernom priestore, na ktorú keď indukujeme Euklidovskú metriku, získame priestorovú časť ($dl^2 = \left(g_{ij} - \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}\right)dx^i dx^j$) Schwarzschildovej metriky v ekvatorálnej rovine ($\vartheta = \pi/2$),

   $$dl^2 = \frac{1}{1-\frac{r_g}{r}}dr^2 + r^2 d\phi^2.$$

   Predpis tejto plochy v cylidrických súradniciach v Euklidovskom priestore r, ϕ, z by mal vyjsť $z = \pm 2\sqrt{r_g}\sqrt{r-r_g}$.
2. Načrtnúť plochu nájdenú v predchádzajúcom bode. Rozmyslieť si, že obe vetvy tejto plochy možno spojiť do jedného spojitého útvaru, ktorý zodpovedá dvom spojeným oblastiam nad horizontom, pričom oblasť (alebo oblasti) pod horizontom nie je potrebné brať do úvahy. Toto spojenie sa nazýva **Einsteinov–Rosenov most**.

3. V Schwarzschildovej metrike pod horizontom, $r < r_g$,
$$ds^2 = -\frac{1}{\frac{r_g}{r} - 1} dr^2 + \left(\frac{r_g}{r} - 1\right) dt^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\phi^2,$$
prejsť od časovej súradnice r k časovej súradnici $T = T(r)$ s počiatočnou podmienkou $T(r_g) = 0$ a priestorovú súradnicu t premenovať na R (Kvôli zmene znamienka g_{tt} a g_{rr} majú súradnice t a r pod horizontom vymenené úlohy.) tak, aby metrika nadobudla tvar
$$ds^2 = -dT^2 + q(T)^2 dR^2 + r(T)^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2\right).$$
Časopriestor pod horizontom teda zodpovedá vesmíru s priestorovou geometriou topológie $\mathbb{R} \times S^2$, ktorého anizotropné rozpínanie alebo zmršťovanie je popísané dvomi funkciami $q(T)$ a $r(T)$. Je to metrika typu **Kantowski–Sachs**. Prevodový vzťah medzi časovými súradnicami T a r by mal vyjsť $\widehat{T} = \sqrt{\widehat{r}}\sqrt{1 - \widehat{r}} + arc\text{tg}\sqrt{1/\widehat{r} - 1}$, kde $\widehat{T} = T/r_g$ a $\widehat{r} = r/r_g$.

4. Nakresliť správanie sa funkcií $q(T)$ a $r(T)$ z predchádzajúceho bodu. Ukázať, že singularita Schwarzschildovej metriky zodpovedá času $T_{\text{sing}} = (\pi/2) r_g$. Ako sa správa rozpínanie vesmíru pod horizontom v okolí hraničných časov $T = 0$ a $T = T_{\text{sing}}$? Funkcie $q(T)$ a $r(T)$ by mali byť monotónne s hraničnými hodnotami $q(0) = 0$, $q(T_{\text{sing}}) \to \infty$, $r(0) = r_g$, $r(T_{\text{sing}}) = 0$.

Pr. 3 *Relativistická hviezda s tlakom úmerným hustote energie*: V jednotkách, kde nielen $c = 1$, ale aj $\kappa = 1$, majú rovnice pre relativistické hviezdy tvar
$$m' \overset{(\#)}{=} 4\pi\rho r^2, \quad p' \overset{(\text{TOV})}{=} -\frac{(\rho + p)(m + 4\pi p r^3)}{r(r - 2m)}, \quad \frac{A'}{A} \overset{(g_{00})}{=} 2\frac{m + 4\pi p r^3}{r(r - 2m)}, \quad B \overset{(g_{rr})}{=} \frac{r}{r - 2m},$$
$$\left(\text{čiarka označuje } \frac{d}{dr}, \quad A = -g_{00}, \quad B = g_{rr}\right).$$
Uvažujme hviezdu zloženú z látky so stavovou rovnicou $p \overset{(\text{STAV})}{=} w\rho$, kde w je konštantný pomer tlaku a hustoty energie. Úlohou je:

1. Ukázať, že rovnice (#), (TOV), (g_{00}), (g_{rr}) majú 1-parametrickú škálovaciu symetriu vzhľadom na zámeny $r \to ar$, $\rho \to b\rho$ (aj $p \to bp$), $m \to cm$, teda konštanty a, b, c závisia iba od jedného parametra.

2. Overiť, že veličiny $x = \dfrac{m}{r}$, $y = 4\pi\rho r^2$ a derivácia $(\dot{\ }) = \dfrac{d}{d\ln r} = r\dfrac{d}{dr}$ sú tiež invariantné vzhľadom na škálovaciu symetriu nájdenú v predchádzajúcom bode.

3. S využitím rovníc (#), (TOV), (STAV) odvodiť sústavu rovníc pre veličiny x, y,
$$\dot{x} = y - x, \qquad \dot{y} = \left(2 - \frac{w + 1}{w}\frac{x + wy}{1 - 2x}\right) y.$$

4. Nájsť riešenie sústavy rovníc z predchádzajúceho bodu zodpovedajúce konštatným veličinám x, y.

5. Riešenie nájdené v predchádzajúcom bode prepísať do pôvodných premenných. Malo by vyjsť
$$m = \xi r, \quad \rho = \frac{\xi}{4\pi r^2}, \quad p = \frac{w\xi}{4\pi r^2}, \quad \text{kde } \xi \text{ je konštanta daná parametrom } w.$$
Hviezda nemá ostro definovaný povrch, pretože jej hustota s radiálnou súradnicou postupne klesá, a jej hustota energie v centre diverguje.

6. Po dosadení riešení z predchádzajúceho bodu do rovníc (g_{00}), (g_{rr}) odvodiť $A \propto r^{4w/(w+1)}$, $B = 1/(1 - 2\xi)$. Konštantu úmernosti pri funckii A tu nie je možné špecifikovať pomocou Newtonovkej limity.

7. Ukázať, že pre hviezdu zloženú z látky s pomerom tlaku k hustote energie rovnakým ako fotónový plyn, $w = 1/3$, ktorej povrch je daný rukou zadaným ostrým orezaním, vychádza vzťah pre jej polomer $R/r_g = 7/3$. (Využiť $r_g = 2M = 2m(R)$.)
