$\cdot\bullet$ **Sada 12**: *Gravitačné vlny & Červia diera* $\bullet\cdot$

Pr. 1 *Energia vyžarovaná gravitačnými vlnami*: Výkon gravitačných vĺn sa počíta ako

$$W = \frac{\kappa}{45c^5}\dddot{D}_{ij}\dddot{D}_{ij}, \quad \text{kde } D_{ij} = \sum_{(a)} m_{(a)}\left(3x^i_{(a)}x^j_{(a)} - \delta_{ij}r^2_{(a)}\right) \text{ je kvadrupólový moment.}$$

Úlohou je:

1. Vypočítať kvadrupólový moment pre dvojicu (bodových) objektov s hmotnosťami m_1 a m_2, ktoré okolo seba obiehajú po kruhových dráhach. Uvažovať, že ich obeh je rovnaký ako v Newtonovej teórii, čo je pre veľkú vzdialenosť objektov v porovnaní s ich gravitačnými polomermi rozumné priblíženie.

2. Ukázať, že po dosadení kvadrupólového momentu z predchádzajúceho bodu do vzťahu pre výkon gravitačných vĺn vychádza

$$W = \frac{32\kappa}{5c^5}\mu^2 r^4\omega^6, \quad \text{kde } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ je redukovaná hmotnosť,}$$

   r je vzdialenosť medzi objektmi a ω je frekvencia ich obehu.

3. Vypočítať koľko energie sa vyžiari gravitačnými vlnami za dobu jedného obehu dvoch rovnakých telies s kruhovými dráhami, ktorých hmotnosti sú desaťnásobkom hmotnosti Slnka $M_\odot = 2\cdot 10^{30}$ kg, $m_1 = m_2 = 2\cdot 10^{31}$ kg, ak okolo seba obiehajú vo vzdialenosti rovnej desaťnásobku ich gravitačných polomerov, $r = 10\cdot 2\kappa(10M_\odot)/c^2$. Vzdialenosť medzi telesami by mala približne vyjsť 297,8 km, frekvencia ich obehu 318.6 s^{-1} a vyžiarená energia zhruba $0{,}016 M_\odot c^2$.

Pr. 2 *Sendvičová gravitačná vlna*: Vo svetelných súradniciach u a v definovaných ako

$$u = \frac{t-x}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{t+x}{\sqrt{2}},$$

má Minkowského metrika $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ tvar $ds^2 = -2dudv + dy^2 + dz^2$. Uvažujme metriku, ktorá Minkowského metriku zovšeobecňuje,

$$ds^2 = -2dudv - 2f(u,y,z)du^2 + dy^2 + dz^2,$$

teda pre $f = 0$ máme $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Úlohou je:

1. Ukázať, že nenulové nezávislé komponenty Christoffelových symbolov sú

$$\Gamma_{uuu} = -f_{,u}, \quad \Gamma_{uuA} = -f_{,A}, \quad \Gamma_{Auu} = f_{,A}, \quad \text{kde } A = y, z.$$

2. Ukázať, že prvá časť vzorca pre výpočet komponent Riemannovho tenzora, ktorá má všetky algebraické symetrie kompletného Riamannovho tenzora, $R^{(1)}_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\mu\beta,\nu\alpha} + g_{\nu\alpha,\mu\beta} - g_{\mu\alpha,\nu\beta} - g_{\nu\beta,\mu\alpha})$, dáva nenulové nezávislé komponenty $R^{(1)}_{uAuB} = f_{,AB}$.

3. Ukázať, že druhá časť vzorca pre výpočet komponent Riemannovho tenzora $R^{(2)}_{\mu\nu\alpha\beta} = g^{\rho\sigma}(\Gamma_{\rho\nu\alpha}\Gamma_{\sigma\mu\beta} - -\Gamma_{\rho\nu\beta}\Gamma_{\sigma\mu\alpha})$ vychádza nulová. Komponenty inverznej metriky, ktoré tu treba použiť, by mali byť $g^{uu} = 0$, $g^{uv} = -1$, $g^{vv} = 2f$, $g^{yy} = g^{zz} = 1$.

4. Pomocou výsledkov z predchádzajúcich dvoch bodov, $R_{\mu\nu\alpha\beta} = R^{(1)}_{\mu\nu\alpha\beta} + R^{(2)}_{\mu\nu\alpha\beta}$, vypočítať komponenty Ricciho tenzora. Jediná nenulová komponenta by mala vyjsť $R_{uu} = f_{,AA} = f_{,yy} + f_{,zz}$.

5. Overiť, že riešenie Einsteinových rovníc vo vákuu, $R_{\mu\nu} = 0$, zodpovedá funkcii f v tvaroch

$$f \overset{\oplus}{=} \frac{y^2 - z^2}{2}F(u), \quad f \overset{\otimes}{=} yzF(u).$$

6. Ukázať, že pre prvé riešenie z predchádzajúceho bodu platí $R_{u2u2} = -R_{u3u3}$ a $R_{u2u3} = 0$, a pre druhé riešenie jedine $R_{u2u3} \neq 0$. Keďže pre gravitačné vlny dané malou poruchou metriky, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, platí ${R^i}_{0j0} \approx -(1/2)h_{ij,00}$, tak prvé riešenie pôsobí na testovacie častice (cez rovnicu geodetickej deviácie) rovnakým spôsobom ako gravitačná vlna s polarizáciou $\oplus$ síriaca sa v smere osi x, pre ktorú iba $h_{22} = -h_{33} \neq 0$, a druhé riešenie ako gravitačná vlna s polarizáciou $\otimes$, kde jedine $h_{23} \neq 0$.

Vákuové riešenie Einsteinových rovníc, ktoré sme v tomto príklade našli, sa nazýva **Sendvičová gravitačná vlna**. Na rozdiel od obyčajnej gravitačnej vlny tu nebolo potrebné predpokladať malosť funkcie f. Okrem dvoch nájdených riešení pre funkciu f existuje aj tretie, $f = ay + bz + c$, ale prislúcha mu nulový Riemannov tenzor a metrika s takouto funkciou f je len Minkowského metrika prepísaná do krivočiarych súradníc.

Pr. 3 *Červia diera s nekonečne krátkym ústím*: Uvažujme časopriestor s metrikou

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + f(r)^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2\right), \quad \text{kde} \;\; f(r) = \begin{cases} r, & r > a \\ 2a - r, & r < a \end{cases},$$

pričom radiálna súradnica r môže nadobúdať aj záporné hodnoty. Takýto útvar nazývame **červia diera**, pričom sa dajú uvažovať červie diery aj so zložitejšou metrikou. Úlohou je:

1. Rozmyslieť si, že ide o metriku popisújúcu dvojicu Minkowkých časopriestorov bez oblasti vo vnútri sféry s polomerom a, pričom tieto dva Minkowského časopriestory zdieľajú ten istý povrch takejto sféry. Cestovateľ by mohol prejsť z jedného Minkowského časopriestoru do druhého (alebo do vzdialenej oblasti v tom istom časopriestore) prekročením povrchu sféry, ktorý tieto časopriestory (alebo vzdialené oblasti) spája.

2. Rozmyslieť si, že vo výpočtoch komponent Riemannovho, Ricciho a Einsteinovho tenzora, príp. skalárnej krivosti stačí brať do úvahy iba také výrazy, ktoré obsahujú dvojnásobnú deriváciu podľa súradnice r, pretože $f''(r) = 2\delta(r-a)$.

3. Vypočítať komponenty Ricciho tenzora $\left(R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(g_{\alpha\nu,\mu\beta} + g_{\mu\beta,\alpha\nu} - g_{\alpha\beta,\mu\nu} - g_{\mu\nu,\alpha\beta}\right) + \Gamma\cdot\Gamma\right)$, ktoré obsahujú Diracovu delta funkciu. Nenulové komponenty by mali vyjsť $R_{rr} = -4a^{-1}\delta(r-a)$, $R_{\vartheta\vartheta} = -2a\delta(r-a)$, $R_{\phi\phi} = R_{\vartheta\vartheta}\sin^2\vartheta$.

4. Z $(\ )_{tt}$ komponenty Einsteinových rovníc odvodiť hustotu energie hmoty budiacej metriku červej diery, ktorá by mala vyjsť $\rho = -(1/2\pi\kappa a)\delta(r-a)$, a ukázať, že celková hmotnosť červej diery sa dá v násobkoch hmotnosti Zeme približne počítať ako $M \approx -450 M_{\text{Zem}}(a/1\text{m})$. Najprv ukázať, že v jednotkách s $c = 1$ sa hodnota obrátenej gravitačnej konštanty približne rovná $\kappa^{-1} \doteq 225 M_{\text{Zem}}\text{m}^{-1}$ (stačí poznať $R_{\text{Zem}} \doteq 6,38 \cdot 10^6$m, $g \doteq 9.81\text{ms}^{-2}$, $c \doteq 3 \cdot 10^8\text{ms}^{-1}$).

Na vytvorenie červej diery je potrebné použiť látku so zápornou hmotnosťou. Cestovanie cez červie diery ako aj iné spôsoby cestovania prekonávajúce limity dané rýchlosťou svetla navyše vedú na možnosť cestovať dozadu v čase.
