$\cdot\bullet$ **Sada 13**: *Príprava na skúšku* $\bullet\cdot$

Pr. 1 *4-rýchlosť*: Nájdite 4-rýchlosť hmotnej častice vyjadrenú cez jej vlastný čas, ak sa pohybuje po svetočiare danej predpisom $x = (2/3)\sqrt{A}t^{3/2}$, $y = z = 0$ v Minkowského časopriestore s metrikou $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Výsledky: $u^\mu = \left(1 - \frac{3A}{2}\tau\right)^{-1/3} \delta^\mu_t + \sqrt{\left(1 - \frac{3A}{2}\tau\right)^{-2/3} - 1}\delta^\mu_x$

Pr. 2 *Rotujúca čierna diera*: Riešenie Einsteinových rovníc vo vákuu zodpovedajúce zdroju s hmotnosťou M a s momentom hybnosti $L = Ma^2$ je Kerrova metrika $ds^2 = -dt^2 + 2\kappa Mr(dt - a\sin^2\vartheta d\phi)^2/(r^2 + a^2\cos^2\vartheta) + (r^2 + a^2)\sin^2\vartheta d\phi^2 + (r^2 + a^2\cos^2\vartheta)(dr^2/(r^2 - 2\kappa Mr + a^2) + d\vartheta^2)$. Nájdite červený posun fotónu vyslaného z miesta $r = R$, $\phi = \phi_1$, $\vartheta = \pi/2$ a zachyteného v mieste $r = R$, $\phi =$NaN, $\vartheta = 0$. V špeciálnom prípade, kde vo vhodných jednotkách $\kappa M = 2a = 2$, nájdite Kerrovu metriku v ekvatoriálnej rovine ($\vartheta = \pi/2$), vypočítajte synchronizačný čas po kružnici v ekvatoriálnej rovine s polomerom R a nájdite priestorovú metriku dl^2 (časopriestorová metrika indukovaná na nadplochy konštantného synchronizovaného času, $ds^2 = g_{00}dt^2_{\mathrm{synch}} + dl^2$) v ekvatoriálnej rovine.

Výsledky: $z = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 = \sqrt{\frac{R(R^2 - 2\kappa MR + a^2)}{(R^2 + a^2)(R - 2\kappa M)}} - 1$, $ds^2 = -dt^2 + \frac{4}{r}(dt - d\phi)^2 + (r^2 + 1)d\phi^2 + \frac{r^2}{r^2 - 4r + 1}dr^2$, $t_{\mathrm{synch}} = t + \frac{8\pi}{R - 4} \neq t \implies$ čas sa nedá synchronizovať, $dl^2 = \frac{r^2}{r^2 - 4r + 1}dr^2 + \frac{r^4 - 4r^3 + r^2 + 48}{r(r - 4)}d\phi^2$

Pr. 3 *Kozmická struna v kozmickej strune*: Časopriestorová metrika $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + f(r)^2 d\phi^2 + dz^2$, kde $2\pi f(r) = (2\pi - \alpha_1)r$ pre $r < R$ a $2\pi f(r) = (\alpha_2 - \alpha_1)R + (2\pi - \alpha_2)r$ pre $r > R$ je metrikou časopriestoru, ktorý je vo vnútri valcovej oblasti s polomerom R časopriestorom kozmickej struny s uhlovým deficitom α_1 a pre veľké radiálne súradnice $r \gg R$ sa limitne blíži ku kozmickej strune s uhlovým deficitom α_2. Nájdite tenzor energie-hybnosti na hranici nadpájania dvoch kozmických strún, kde $r = R$. (Ricciho tenzor sa dá počítať ako $R_{\mu\nu} = (1/2)g^{\alpha\beta}(g_{\alpha\nu,\mu\beta} + g_{\mu\beta,\alpha\nu} - g_{\alpha\beta,\mu\nu} - g_{\mu\nu,\alpha\beta}) + \Gamma\cdot\Gamma$.)

Výsledky: $T_{tt}|_{r=R} = -T_{zz}|_{r=R} = -\frac{1}{8\pi\kappa}\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2\pi - \alpha_1}\frac{\delta(r - R)}{R}$

Pr. 4 *Ohyb dráhy veľmi rýchleho projektilu*: Vypočítajte dominantný príspevok k uhlu ohybu hmotnej častice s rýchlosťou $v \sim 1$ a s veľkým zámerným parametrom b na slabom zdroji, ktorému prislúcha Newtonovský potenciál $\phi = -\kappa M/r$, ($b \gg \kappa M$).

Výsledky: $\alpha \approx \left(1 + \frac{1}{v^2}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\,(\phi_{,y})_{y=b} = \left(1 + \frac{1}{v^2}\right)\frac{2\kappa M}{b}$

Pr. 5 *Tretí Keplerov zákon*: Nájdite uhlovú rýchlosť obiehania hmotnej častice po kruhovej dráhe vo Schwarzschildovej metrike z pohľadu súradnicového aj vlastného času častice. (Postupov je viac, keďže máme viacero použiteľných rovníc, $u_\mu u^\mu = -1$, $u_t =$konšt., $u_\phi =$konšt., $V'_{\mathrm{eff}} = 0$, $V_{\mathrm{eff}} = \mathcal{E}_{\mathrm{eff}}$, $\ddot{r} + \Gamma^r_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0$.)

Výsledky: $\frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{r_g}{r^3}}$ – rovnako ako tretí Keplerov zákon v Newtonovskej mechanike, $\frac{d\phi}{d\tau} = \left(1 - \frac{3}{2}\frac{r_g}{r}\right)^{-1/2}\frac{d\phi}{dt}$

Pr. 6 *Elektricky nabitá čierna diera*: Riešenie Einsteinových rovníc v elektrickom poli bodového náboja Q je Reissnerova–Nordströmova metrika $ds^2 = -(1 - r_g/r + r_Q^2/r^2)dt^2 + (1 - r_g/r + r_Q^2/r^2)^{-1}dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2)$, kde $r_g = 2\kappa M$ a $r_Q^2 = \kappa Q^2/4\pi\varepsilon_0$. V tejto metrike odvoďte z rovnice geodetiky pohybovú rovnicu pre veľmi pomaly sa pohybujúce častice ($|\ddot{x}^i| \ll |\ddot{x}^0|$), nájdite zrýchlenie stojaceho pozorovateľa ($a_a = (\ln\sqrt{-g_{00}})_{,a}$) a ukážte, že tieto dva výsledky sú v súlade, teda zrýchlenie veľmi pomalej častice je približne rovnako veľké ako zrýchlenie stojaceho pozorovateľa.

Výsledky: $\ddot{x}^i \approx -\frac{1}{2}\left(\frac{r_g}{r^2} - 2\frac{r_Q^2}{r^3}\right)\frac{x^i}{r}$, $a_a = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}\left(\frac{r_g}{r^2} - 2\frac{r_Q^2}{r^3}\right)\delta_{\hat{r}a}$, súlad týchto dvoch výsledkov vidno až po prepísaní pohybovej rovnice cez repérnu radiálnu súradnicu, $\sqrt{g_{rr}}dr^2 = d\hat{r}^2$, potom $\ddot{\hat{r}} \approx -a_{\hat{r}}$.

Pr. 7 *ŠTR v repérnych súradiciach*: Pozorovateľ sa pohybuje po svetočiare danej predpisom $x^\mu = x^\mu_0\left(\tilde{t}\right)$ a nesie si so sebou repér $e_a{}^\mu\left(\tilde{t}\right)$, na ktorý sú natiahnuté repérne priestorové súradnice $\tilde{x}^a$. Ďalej vieme (prednáška – zrýchlený pozorovateľ), že zrýchlenie a_a a uhlová rýchlosť $\omega_a \equiv (1/2)\varepsilon_{abc}\omega_{bc}$ pôsobiace na pozorovateľa súvisia s časovými deriváciami jeho repérnych vektorov, $\dot{e}_0 = a_a e_a$, $\dot{e}_a = a_a e_0 + \omega_{ab}e_b$.

Prepíšte Minkowského metriku $ds^2 = -dt^2 + d\vec{x}^2$ do repérnych súradníc a nájdite oblasť, v ktorej sú tieto súradnice dobre definované v špeciálnom prípade s $\vec{a} = a\vec{e}_{\hat{x}}$, $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_{\hat{y}}$.

Výsledky: $ds^2 = \left[\left(1 + \vec{a}\cdot\vec{\tilde{x}}\right)^2 - \left(\vec{\omega}\times\vec{\tilde{x}}\right)^2\right] d\tilde{t}^2 - 2\left(\vec{\omega}\times\vec{\tilde{x}}\right)\cdot d\vec{\tilde{x}}d\tilde{t} - d\vec{\tilde{x}}^2$, oblasť spĺňajúca podmienku $1 + a^2x^2 + 2ax - \omega^2z^2 - \omega^2x^2 > 0$, pre $\omega > a$ je rez tejto oblasti rovinou x-z vnútrajškom elipsy a pre $\omega < a$ sú to dve oddelené oblasti za dvomi vetvami hyperboly.

Pr. 8 _Uhlová rýchlosť v Gödelovej metrike_: Vo vhodných jednotkách, kde $\omega = \sqrt{2}$, má Gödelova metrika tvar $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + \left(\text{sh}^2 r - \text{sh}^4 r\right) d\phi^2 - 2\sqrt{2}\text{sh}^2 r d\phi dt + dz^2$. Ukážte, že jej priestorová metrika $\left(\gamma_{ij} = g_{ij} - \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}\right)$ obsahuje Lobačevského roviny, $dl^2 = (1/4)\left[d(2r)^2 + \text{sh}^2(2r)d\phi^2\right] + dz^2$, a uhlová rýchlosť stojaceho pozorovateľa je $\vec{\omega} = \sqrt{2}\vec{e}_{\hat{z}}$. (Vzťah z prednášky je $\omega_{ab} = -\sqrt{-g_{00}}(-g_{0i}/g_{00})_{,j}{e_{[a}}^i {e_{b]}}^j$, pričom priestorové zložky repéru e_a nesmú trčať do časového smeru, takže ich komponenty sa dajú priamo odčítať z komponent priestorovej metriky γ_{ij} merajúcej vzdialenosti na nadplochách konštantného synchronizovaného času.)

Výsledky: Vyjde to.

Pr. 9 _Svetelné lúče v Gödelovej metrike_: V časopriestore s metrikou $ds^2 = (2/\omega^2)(-dt^2 + dr^2 + (\text{sh}^2 r - \text{sh}^4 r)d\phi^2 - 2\sqrt{2}\text{sh}^2 r d\phi dt + dz^2)$ nájdite závislosť $t(r)$ a $\phi(r)$ pre svetelný lúč v rovine $z =$ konšt., ktorý prechádza počiatkom $r = 0$. Ukážte tiež, že svetelný lúč vyslaný z počiatku nepresiahne $r = arc\text{sh}1$, ale obráti sa a vráti sa naspäť do počiatku.

Výsledky: $t = t_0 + \sqrt{2}arc\text{tg}\frac{\sqrt{2}\text{sh}r}{\sqrt{1-\text{sh}^2 r}} - arc\sin(\text{sh}r)$, $\phi = \phi_0 + arc\sin\left(\sqrt{2}\text{th}r\right)$, vďaka limite $\lim_{\text{sh}r\to 1^-} \frac{d\phi}{dr} = +\infty$ vidno, že riešenia treba spojito nadpájať tak, že svetelné lúče sú uzavreté krivky.

Pr. 10* _Rotácia zdroja v post-Newtonovskom priblížení_: Ukážte, že v časopriestore s metrikou $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, kde $h_{\mu\nu}$ je malá a pomaly sa meniaca porucha, $(\ \ )_{0i}$ komponenta Einsteinových rovníc do prvého rádu poruchovej teórie dáva rovnicu $\triangle\vec{g} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{g}) = 16\pi\kappa\rho\vec{v}$, kde komponenty $\vec{g}$ sú $-g_{0i}/g_{00}$ a ρ a $\vec{v}$ sú hustota energie a rýchlosť látky zakrivujúcej časopriestor. Vo vhodných časopriestorových súradniciach sa táto rovnica redukuje na $\triangle\vec{g} = 16\pi\kappa\rho\vec{v}$, čo sa dá riešiť cez Greenovu funkciu. Ukážte, že v ťažiskovej sústave látky ($\int\rho\vec{v}d^3x = 0$) v oblasti ďaleko od zdroja ($r \gg$ hranica integrovania v $\int\cdots d^3x$) sa po ustrednení cez periódu periodického pohybu zdroja ($d(x_ix_j)/dt = 0$) riešenie tejto rovnice redukuje na $\vec{g} = (2\kappa/r^2)\vec{n}\times\vec{L}$, kde $\vec{L} = \int\rho\vec{r}\times\vec{v}d^3x$ je moment hybnosti zdroja.

Výsledky: Vyjde to.

Pr. 11* _Precesia takmer kruhovej dráhy_: Vypočítajte, o koľko sa stočí periastrum za jeden obeh planéty okolo hviezdy po takmer kruhovej dráhe s polomerom dráhy porovnateľným s gravitačným polomerom hviezdy. (Hľadať geodetiku pre hmotnú časticu v Schwarzschildovej metrike, čo dáva rovnicu $\mathcal{E}_{\text{eff}} = (1/2)\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r)$. Namiesto hľadania presne kruhovej dráhy, ktorá zodpovedá minimu V_{eff}, hľadať iba približne kruhovú dráhu. Na to stačí Taylorov rozvoj V_{eff} do druhého rádu v odchýlke od minima $r - r_0$. Skombinovaním rovnice $\mathcal{E}_{\text{eff}} = (1/2)\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r)$ s rovnicou $u_\phi =$ konšt. pre vhodne zavedenú premennú $x = 1/r$ možno odvodiť rovnicu $d^2(x - x_0)/d\phi^2 = -(1 - 3r_gx_0)(x - x_0) + \mathcal{O}(x - x_0)^2$, čo je v uvažovanom priblížení iba rovnica harmonického oscalátora.)

Výsledky: $\Delta\phi = 2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{1 - 3\frac{r_g}{r}}} - 1\right)$

Pr. 12* _Účinný prierez čiernej diery_: Vypočítajte minimálny zámerný paramater svetelného lúča $b_{\min}$, pri ktorom fotón po priblížení sa k čiernej diere môže uniknúť do nekonečna, a určte účinný prierez pre záchyt fotónov σ. (Zámerný parameter b sa ďaleko od počiatku, kde sa Schwarzschildova metrika redukuje na Minkowského metriku, dá napísať cez zachovávajúce sa veličiny ako $b = L/P = (L/m_0)/\sqrt{(E/m_0)^2 - 1} = [\lim_{m_0\to 0}] = u_\phi/\sqrt{u_0^2 - 1}$. Nezápornosť $\dot{r}^2 = 2(\mathcal{E}_{\text{eff}} - V_{\text{eff}})$, čo znamená neotáčanie znamienka $\dot{r}$ a teda neodvratný pád na čiernu dieru, potom v limite $m_0 \to 0$ resp. $u_\phi \to \infty$ dáva podmienku tvaru $b \leq f(r)$ pre $\forall r$, alebo ak $\exists r$ také že $b > f(r)$, tak namiesto pádu na čiernu dieru fotón dosiahne minimálne r, kde $\dot{r} = 0$, a potom sa od čiernej diery začne opäť vzďaľovať.)

Výsledky: $\sigma = \pi b_{\min}^2 = \frac{27}{4}\pi r_g^2$
