

Pr. 1 Dopplerov jav: Subjektívny čas, ktorý uplynie na hodinách pozorovateľa počas určitého úseku jeho svetočiary, je daný dĺžkou tohto úseku meranou časopriestorovou metrikou,

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \sqrt{-g_{\mu\nu}(x(\sigma)) \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma}}.$$

Úlohou je s pomocou tejto poučky:

- a) Odvodiť vzťah pre Dopplerov jav v špeciálnej teórii relativity. Stačí uvažovať pohyb v jednom rozmere.
- b) V časopriestore s metrikou $ds^2 = \Omega(t, \vec{x})^2 (-dt^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j)$ (konformne Minkowského metrika) odvodiť pomer vlnových dĺžok λ_2/λ_1 , ak v čase t_1 a z polohy $x = x_1, y = y_0, z = z_0$ bol pozorovateľom s okamžitou rýchlosťou $\vec{v}_1 = d\vec{x}/dt$ vyslaný lúč s vlnovou dĺžkou λ_1 a druhý pozorovateľ v čase t_2 , v polohe $x = x_2, y = y_0, z = z_0$ a s okamžitou rýchlosťou \vec{v}_2 ho zachytil s vlnovou dĺžkou λ_2 . Treba využiť, že v konformne Minkowského časopriestore majú svetelné lúče rovnaké geodetiky ako v Minkowského časopriestore.

Pr. 2 Experiment - meranie M a Λ : De Sitterova – Schwarzschildova metrika daná hmotnosťou nerotujúceho a sféricky symetrického gravitujúceho telesa M a kozmologickou konštantou Λ má tvar

$$ds^2 = -c^2 f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 (\sin^2 \vartheta d\varphi^2 + d\vartheta^2), \quad \text{kde} \quad f(r) = 1 - \frac{2\kappa M}{c^2} \frac{1}{r} - \frac{1}{3} \Lambda r^2.$$

Okolo nerotujúceho sféricky symetrického telesa s polomerom $r = r_0 = 1000$ m obiehajú dva satelity po kruhových dráhach s $r = r_1 = 2000$ m a $r = r_2 = 3000$ m. Prvý satelit ($r = r_1$) vyslal smerom k telesu, kolmo na jeho povrch, fotón s vlnovou dĺžkou λ_1 . Na povrchu ($r = r_0$) mal fotón vlnovú dĺžku λ_0 , tam sa odrazil, aby ho zachytil druhý satelit ($r = r_2$) s vlnovou dĺžkou λ_2 . Namerané hodnoty modrého a červeného posunu boli

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - 1 = -1,30 \cdot 10^{-10}, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 = 1,25 \cdot 10^{-10}.$$

Úlohou je pomocou týchto hodnôt vypočítať hmotnosť gravitujúceho telesa M a hodnotu kozmologickej konštanty Λ . Treba využiť, že pre satelity obiehajúce po kruhových dráhach platí $d\varphi/dt = \sqrt{Mr^{-3} - \Lambda/3}$.

Pr. 3 Experiment - pokračovanie: Uvažujme situáciu z predchádzajúceho príkladu. Úlohou je:

- a) Odvodiť vzťah pre kruhové dráhy hmotných telies $d\varphi/dt = \sqrt{Mr^{-3} - \Lambda/3}$.
- b) Vypočítať uhol (v uhlových sekundách) medzi sprievodičmi satelitov v čase vyslania fotónu prvým satelitom, aby ho druhý satelit mohol zachytiť tak, ako v predchádzajúcom príklade, ak oba satelity obiehali v jednej rovine a jedným smerom. Treba využiť

$$\int_1^2 \frac{dx}{1 - 10^{-9}x^{-1} - 10^{-11}x^2} - 1 \sim \int_2^3 \frac{dx}{1 - 10^{-9}x^{-1} - 10^{-11}x^2} - 1 \sim 10^{-9}.$$

- c) Vypočítať tiažové zrýchlenie na povrchu telesa ($r = r_0$) z predchádzajúceho príkladu v rámci všeobecnej teórie relativity g_{VTR} ako aj v Newtonovskej teórii gravitácie $g_{\text{Newt.}}$ a porovnať tieto dve hodnoty, teda najšší pomer $g_{\text{VTR}}/g_{\text{Newt.}}$.

Výsledky: $\frac{\Omega(t_2, \vec{x}_2)}{\Omega(t_1, \vec{x}_1)} \sqrt{\frac{1-v_2^2}{1-v_1^2} \frac{1-v_{1x}}{1-v_{2x}}}$; $6,733 \cdot 10^{20}$ kg; $3 \cdot 10^{-17} \text{ m}^{-2}$; $1,8''$; $g_{\text{VTR}} = 44\,039 \text{ m s}^{-2} = 0,98 g_{\text{Newt.}}$

Každá úloha má rovnakú váhu ako úlohy, ktoré sa robia na cvičení. Tieto treba vypracovať a odovzdať (stačí aj fotka v dostatočnom rozlíšení zaslaná na email) do konca semestra, prípadne do skúšky.

Otázky k ústnej časti skúšky:

1. Opis gravitácie vo VTR - metrický tenzor priestoročasu, vlastný čas, metrika 3-priestoru a synchronizačný čas, stacionárna a statická metrika
2. Pôsobenie gravitačného poľa na látku - matematická formulácia princípu ekvivalencie, pravidiel pre zostavovanie pohybových rovníc, ideálna kvapalina
3. Budenie gravitačného poľa - zostrojenie Einsteinovho tenzora, odvodenie Einsteinových rovníc z variačného princípu, pseudotenzor energie-hybnosti
4. Newtonova limita - definícia Newtonovej limity, limita rovnice geodetik a (00)-zložka metrického tenzora, limita Einsteinových rovníc a Einsteinova gravitačná konštanta
5. Postnewtonovské priblíženie - gravitačný červený posun, ohyb svetla v gravitačnom poli a precesia perihélia
6. Schwarzschildovo riešenie - zostrojenie SchR, rovnica hydrostatickej rovnováhy, horizont udalostí a singularita, Kruskalov diagram
7. Gravitačné vlny - linearizácia Einsteinových rovníc, kalibračná voľnosť a vlnová rovnica, polarizácia gravitačných vln, kvadrupólový vzorec