TEMPO
(teória elektromagnetického poľa)

Martin Mojžiš

Obsah

1

ZÁKLADNÉ VZŤAHY OPISUJÚCE ELEKTROMAGNETICKÉ JAVY

V tejto kapitole si zopakujeme tie veci z prvých dvoch semestrov základného kurzu fyziky (mechanika, elektrina a magnetizmus), ktoré sú základom prednášky z teórie elmag poľa. Pri tomto opakovaní a potom v celej prednáške budeme vo veľkej miere používať základy vektorovej analýzy (gradient, rotácia, divergencia, Gaussova a Stokesova veta, ...), kto v nich nemá celkom jasno, musí to čím skôr napraviť. *Bez týchto matematických základov nemá zmysel čítať ďalej.* Našťastie toho nie je až tak veľa, úplne stačia dve kapitoly z Feynmanových prednášok z fyziky, venované diferenciálnemu a integrálnemu počtu vektorových polí (kapitoly 2 a 3 tretieho dielu slovenského vydania).

1. Základné vzťahy elektrodynamiky vo vákuu

Vzájomné pôsobenie elektrických nábojov a elmag polí opisuje jednak Newtonova pohybová rovnica s Lorentzovou silou a jednak Maxwellove rovnice. Newtonova rovnica určuje pohyb nábojov pri zadaných elmag poliach a Maxwellove rovnice určujú časový vývoj elmag polí pri zadanom pohybe nábojov.

Časový vývoj polôh častíc teda opisuje rovnica

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \qquad \text{kde} \qquad \vec{F} = q\vec{E} + q.\vec{v} \times \vec{B}$$

a časový vývoj elmag polí opisujú rovnice

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{D} &= \rho \\
\operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\
\operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}
\end{aligned}$$

pričom vo vákuu platí

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \qquad a \qquad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

(Veličiny ρ, $\vec{j}$, $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$ *a* $\vec{B}$ sú funkciami premenných $\vec{r}$ a t, čo sme, kvôli prehľadnosti zápisov, explicitne nevypisovali.)

Vo všeobecnosti predstavujú Maxwellove rovnice a Newtonova rovnica sústavu viazaných diferenciálnych rovníc pre časový vývoj elmag polí a pohyb častíc. Riešenie tejto sústavy je z matematického hľadiska mimoriadne komplikovaný problém, ktorý skoro nikdy nevieme presne vyriešiť. Našťastie sú však v mnohých prípadoch buď elmag polia alebo pohyb elektrických nábojov *dané zvonku* a vtedy ich časový priebeh dopredu poznáme, čiže ho nemusíme hľadať.

POZNÁMKA. (ktorú nie je nutné čítať). Zadanie vecí zvonku spočíva v prvom rade v tom, že si svet rozdelíme na uvažovaný systém a zvyšok sveta, pričom o tomto zvyšku sveta predpokladáme, že o ňom vieme všetko, čo potrebujeme (z experimentálneho hľadiska ide o delenie na meraný systém a experimentálnu aparatúru, o ktorej by sme v dobrom experimente naozaj mali vedieť všetko, čo potrebujeme). Samotné toto delenie však nestačí, v druhom rade je nutné, aby vonkajšie sily t.j. sily, ktorými pôsobí na častice systému zvyšok sveta, boli oveľa väčšie ako sily, ktorými na seba pôsobia častice systému navzájom. Ak nás v takom prípade zaujíma pohyb častíc systému, potom možno ich vzájomné pôsobenie zanedbať vzhľadom k pôsobeniu vonkajších síl a tým pádom všetky silové polia, čiže aj elektromagnetické, považovať za zadané zvonku. (Príklad: pohyb niekoľkých slabo nabitých guličiek v poli silno nabitého predmetu alebo v poli silného magnetu.) Elektromagnetické polia budené systémom sú v uvažovanom prípade v rámci systému oveľa menšie ako vonkajšie polia, ale mimo systému to už tak byť nemusí, vonkajšie polia môžu s rastúcou vzdialenosťou klesať rýchlejšie ako polia budené systémom. Ďaleko od systému môžu byť naopak zanedbateľné vonkajšie polia a určujúce sa stanú polia budené pohybom častíc systému. Tento pohyb je v nami uvažovanom prípade určený vonkajšími silami, čiže ho možno považovať za zadaný zvonku. (Príklad: pole žiarenia pohybujúcich sa guličiek z predchádzajúceho príkladu, alebo pohybujúcich sa elektrónov v anténe. Iný príklad: pole nabitej paličky, ktorou mávam v ruke.)

V tejto prednáške sa budeme takmer výlučne zaoberať prípadmi, kedy je možné považovať pohyb nábojov za zadaný zvonku. (Prípady zvonku zadaných elmag polí patria do mechaniky a prípady, kedy nie je zvonku zadané ani jedno ani druhé sú pre úvodnú prednášku z teórie elmag poľa príliš zložité.)[1] Zadanie pohybu nábojov je vlastne zadaním funkcií $\rho(\vec{r},t)$, $\vec{j}(\vec{r},t)$ a Maxwellove rovnice v tomto prípade predstavujú diferenciálne rovnice pre neznáme funkcie $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$ a $\vec{B}$ pri zadaných funkciách ρ a $\vec{j}$. Funkcie ρ a $\vec{j}$ pritom nemôžu byť zadané ľubovoľne, ale musia spĺňať tzv. rovnicu kontinuity

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0$$

[1]Keď už je reč o sústave viazaných rovníc Maxwellových a Newtonových, poznamenajme, že polohy častíc sú v týchto rovniciach opísané rôzne, v Maxwellových rovniciach cez $\rho(\vec{r},t)$, $\vec{j}(\vec{r},t)$ a v Newtonovej rovnici cez polohové vektory $\vec{r}_i(t)$. Aby sme mali opis konzistentný, mali by sme v Newtonovej rovnici prejsť k hustotám tak, ako sa to robí v hydrodynamike. Newtonova pohybová rovnica zapísaná v tvare $\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}$ by pritom prešla na tvar $\frac{d}{dt}$hustota hybnosti = hustota sily, pričom vyjadrenie hustoty Lorentzovej sily $\vec{f}(\vec{r},t)$ cez hustoty elektrického náboja a prúdu by bolo $\vec{f} = \rho\cdot\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}$. Takýto postup sa naozaj používa v tzv. magnetohydrodynamike a vo fyzike plazmy, kde treba skutočne riešiť viazané pohybové rovnice pre náboje a polia. Vzhľadom k tomu, že v týchto prednáškach sa uvedenými dvomi oblasťami klasickej elektrodynamiky nemienime zaoberať, nebudeme explicitne prepisovať Newtonove rovnice do hydrodynamického jazyka.

1.1. Čo je vlastne zašifrované v Maxwellových rovniciach a v rovnici kontinuity. (stručné opakovanie)

$\boxed{\operatorname{div}\vec{D}=\rho}$ *Coulombov zákon + princíp superpozície*

Coulombov zákon (elektrostatické pole bodového náboja sediaceho v bode $\vec{r}\,'$)

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

princíp superpozície (elektrostatické pole viacerých nábojov)
pre diskrétne rozloženie bodových nábojov v bodoch $\vec{r}_i\,'$ resp. spojité rozloženie náboja s hustotou ρ:

$$\vec{E}(\vec{r})=\sum_i\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}_i\,'}{|\vec{r}-\vec{r}_i\,'|^3}\qquad\qquad \vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\rho(\vec{r}\,')\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}d^3r'$$

Cesta od Coulombovho zákona a princípu superpozície k prvej Maxwellovej rovnici vedie cez výpočet toku elektrického poľa uzavretou plochou. Začnime výpočtom tohto toku pre plochu obopínajúcu jeden bodový náboj q, a pre jednoduchosť zápisu uvažujme najprv náboj sediaci v počiatku t.j. $\vec{r}\,'=\vec{0}$.

$$\oint_S\vec{E}.d\vec{S}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S\frac{\vec{r}}{r^3}d\vec{S}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S d\Omega=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

kde sme využili $\frac{\vec{r}.d\vec{S}}{r^3}=\frac{\vec{n}.d\vec{S}}{r^2}=\frac{dS_\perp}{r^2}=d\Omega$ (tieto vzťahy človek najrýchlejšie pochopí vtedy, keď si ich nakreslí).

Celkom analogicky, len s dlhšími zápismi, dostaneme vzťah $\oint_S\vec{E}.d\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}$ aj pre $\vec{r}\,'\neq\vec{0}$. (V skutočnosti netreba výpočet pre $\vec{r}\,'\neq\vec{0}$ vôbec robiť, stačí si uvedomiť, že tok elektrického poľa plochou nemôže závisieť od toho, kde máme umiestnený počiatok súradnicovej sústavy.) Pre niekoľko nábojov nachádzajúcich sa v objeme obopnutom uvažovanou plochou dostaneme na základe princípu superpozície $\oint_S\vec{E}.d\vec{S}=\sum\frac{q_i}{\varepsilon_0}$ a pre spojité rozloženie náboja s hustotou ρ

$$\oint_S\vec{E}.d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V\rho(\vec{r}\,')d^3r'$$

Teraz príde k slovu Gaussova veta $\oint_S\vec{u}.d\vec{S}=\int_V\operatorname{div}\vec{u}\;dV$, ktorá nám dá

$$\int_V\operatorname{div}\vec{E}.dV=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V\rho.dV\quad\text{t.j.}\quad\int_V(\operatorname{div}\vec{E}\;-\;\frac{1}{\varepsilon_0}\rho)dV=0$$

a keďže toto má platiť pre ľubovoľný objem V, musí byť

$$\operatorname{div}\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\qquad\text{čiže}\qquad\operatorname{div}\vec{D}=\rho$$

Ukázali sme teda, že z Coulombovho zákona a princípu superpozície vyplýva prvá Maxwellova rovnica. Pozrime sa teraz na opačnú implikáciu.

Rovnica $\operatorname{div}\vec{D} = \rho$ je lineárna parciálna diferenciálna rovnica s pravou stranou. Pre lineárne diferenciálne rovnice platí princíp superpozície, t.j. superpozícia (lineárna kombinácia) riešení je tiež riešením (dôkaz je elementárny, založený len na tom, že derivácia súčtu je súčet derivácií). Čiže princíp superpozície z uvažovanej rovnice vyplýva.

Coulombov zákon ovšem z tejto rovnice nevyplýva, a to v tom zmysle, že nie je jej nevyhnutným dôsledkom. Otázka, či tento zákon je nevyhnutným dôsledkom danej rovnice, je vlastne otázkou, či pole $\vec{D}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{4\pi r^3}$ je jej *jediným* riešením pre $\rho(\vec{r})$ zodpovedajúce jednotkovému bodovému náboju sediacemu v počiatku. Odpoveď je, že riešením samozrejme je (veď rovnicu sme získali ako vzťah, ktorý práve toto pole spĺňa)[2], ale nie riešením jediným. Všeobecné riešenie rovnice s pravou stranou je totiž rovné súčtu jednoho partikulárneho riešenia tejto rovnice (napr. Coulomba) a všeobecného riešenia rovnice bez pravej strany.[3]

$\boxed{\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$ *Faradayov zákon elektromagnetickej indukcie*

Faradayov zákon:

tzv. elektromotorické napätie = – rýchlosť zmeny magnetického toku

Zapísané formálne:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

Tentoraz príde k slovu Stokesova veta $\oint \vec{u}\cdot d\vec{r} = \int_S \operatorname{rot}\vec{u}\cdot d\vec{S}$, ktorá nám dá

$$\int_S \operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r},t)\cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}(\vec{r},t)\cdot d\vec{S}$$

kde sme explicitne vypísali argumenty $\vec{r}$ a t, aby sme si uvedomili, že $\int_S \vec{B}(\vec{r},t)\cdot d\vec{S}$ je z matematického hľadiska parametrický integrál s parametrom t. Pre takéto integrály platí, že ak $\vec{B}(\vec{r},t)$ a $\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{r},t)$ sú spojité funkcie, potom $\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}(\vec{r},t)\cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{r},t)\cdot d\vec{S}$, t.j. možno zameniť poradie integrovania a derivovania podľa parametra.

Poznámka. (O hladkosti elmag polí.) Jedným zo štandardných predpokladov teórie elmag poľa je, že všetky elmag polia sú funkcie dostatočne hladké (t.j. spojité aj s potrebným počtom svojich derivácií) na to, aby bolo oprávnené prehadzovanie ľubovoľných derivácií a integrálov. Na základe tohto predpokladu budeme takéto prehadzovania robiť vždy, keď to bude potrebné, pričom nie vždy budeme explicitne znovu zdôrazňovať predpokladanú hladkosť polí.

[2] O tom, či nejaká funkcia je riešením určitej rovnice sa možno najpriamejšie presvedčiť tak, že ju do tejto rovnice dosadíme. V našom prípade by sme však pri tom narazili na isté technické problémy spojené s tým, že na vyjadrenie hustoty bodového náboja je potrebná tzv. Diracova δ–funkcia, ktorú si zavedieme až neskôr. Skutočnosť, že vzhľadom k tomu, ako sme k uvažovanej rovnici dospeli, vieme dopredu, že Coulombovské pole je jej riešením, nám umožňuje vyhnúť sa týmto problémom.

[3] V uvedenom zmysle je teda rovnica $\operatorname{div}\vec{D} = \rho$ viac, než len Coulombov zákon a princíp superpozície. Mohlo by sa zdať, že to je nevýhoda a že rovnica $\operatorname{div}\vec{D} = \rho$ obsahuje okrem fyziky, ktorú sme v nej chceli mať, aj nejaké nefyzikálne riešenia. Avšak ako uvidíme napr. v kapitole o elektrostatike, bude to, čo táto rovnica obsahuje navyše, veľmi užitočné.

Dostávame teda

$$\int_S (\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} = 0$$

a keďže toto musí platiť pre ľubovoľnú plochu S s uzavretou hranicou, musí byť

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

Tým sme ukázali, že z Faradayovho zákona vyplýva $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ a keďže všetky uvažované implikácie sú vlastne ekvivalencie, platí aj obrátená implikácia.[4]

$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{B} = 0}$ *neexistencia magnetických nábojov*

$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$ *Ampèrov zákon + Maxwellov posuvný prúd*

Základné vlastnosti magnetostatického poľa možno zhrnúť do dvoch bodov:

• magnetostatické pole nemá, na rozdiel od elektrického, zdroje; inými slovami tok magnetostatického poľa každou uzavretou plochou je nulový
• integrál intenzity magnetostatického poľa po každej uzavretej krivke je rovný toku elektrického prúdu plochou, ktorej hranicou je táto krivka.

Zapísané formálne:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int \vec{j} d\vec{S}$$

a postupom analogickým ako v prípade elektrostatického poľa, dostaneme pomocou Gaussovej a Stokesovej vety vzťahy

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \qquad \mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j}$$

Poznámka. Ampèrove poznatky o magnetostatickom poli sa dajú zhrnúť do vzťahu analogického Coulombovmu zákonu

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \cdot d^3 r'$$

z ktorého sa dajú rovnice $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ a $\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j}$ získať podobne, ako sme získali rovnicu $\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$ zo vzťahu $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \rho(\vec{r}\,') \cdot \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \cdot d^3r'$, ale je to technicky náročnejšie (kvôli vektorovému súčinu), tak to nebudeme robiť.

[4] K Faradayovmu zákonu elmag indukcie ešte poznamenajme, že znamienko mínus v ňom má svoje špeciálne meno a volá sa Lenzovo pravidlo.

Najpriamočiarejší prechod od rovníc elektrostatiky a magnetostatiky k rovniciam platným aj pre časovo premenné polia spočíva v jednoduchom pridaní premennej t k argumentom polí, t.j. v prechode od rovníc

$$\operatorname{div}\vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \qquad \operatorname{div}\vec{B}(\vec{r}) = 0 \qquad \operatorname{rot}\vec{H}(\vec{r}) = \vec{j}(\vec{r})$$

k rovniciam

$$\operatorname{div}\vec{D}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t) \qquad \operatorname{div}\vec{B}(\vec{r},t) = 0 \qquad \operatorname{rot}\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{j}(\vec{r},t)$$

Avšak takýto priamočiary prechod vedie k rozporu s rovnicou kontinuity. Ide o to, že v dôsledku identity $\operatorname{div}\operatorname{rot} \equiv 0$ vyplýva z rovnice $\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j}$ vzťah $\operatorname{div}\vec{j} = 0$, pričom podľa rovnice kontinuity $\operatorname{div}\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$.

Maxwell našiel jednoduché zovšeobecnenie rovníc magnetostatiky, ktoré tento rozpor odstraňovalo. Toto zovšeobecnenie vychádza z rovnice $\operatorname{div}\vec{D} = \rho$, z ktorej dostávame

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{D} = \operatorname{div}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

čo v spojení s rovnicou kontinuity dáva

$$\operatorname{div}(\vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}) = 0$$

Ak teda pridáme v uvažovanej magnetostatickej rovnici k prúdu $\vec{j}$ člen $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ (tzv. Maxwellov posuvný prúd), dostaneme rovnicu, ktorá je v prípade časovo nemenných polí totožná s pôvodnou rovnicou a v prípade časovo premenných polí je konzistentná s rovnicou kontinuity. Maxwellove zovšeobecnenie magnetostatickej rovnice sa ukázalo byť tým správnym zovšeobecnením, ktoré bolo neskôr mnohonásobne experimentálne potvrdené (prakticky každé experimentálne potvrdenie elektrodynamiky je potvrdením tohto Maxwellovho zovšeobecnenia).

$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0}$ *zákon zachovania elektrického náboja*

zákon zachovania elektrického náboja:
Rýchlosť zmeny elektrického náboja v objeme uzavretom danou plochou je rovná toku elektrického prúdu touto plochou (t.j. náboj nemôže v danom objeme vzniknúť ani zaniknúť a môže sa meniť len tým, že pritečie alebo odtečie cez plochu, ohraničujúcu tento objem). Zapísané formálne

$$\frac{dQ}{dt} = -\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

kde znamienko $-$ je kvôli štandardnej konvencii, podľa ktorej sa za kladný považuje tok smerom von (premyslieť si, že to naozaj vedie na znamienko $-$).

POZNÁMKA. Takto sformulovanému zákonu zachovania sa hovorí zákon zachovania v lokálnom tvare, na rozdiel od zákona zachovania v globálnom tvare, ktorý požaduje celkové zachovanie danej veličiny na celom svete. Zákon zachovania v lokálnom tvare je silnejší v tom zmysle, že globálny zákon zachovania z lokálneho vyplýva (ak je prúd "na konci sveta" t.j. v nekonečne nulový), ale opačne to pravda nie je. Ak totiž nejaký náboj v istej časti priestoru zmizne a súčasne sa v inej časti priestoru rovnaký náboj objaví, potom sa globálne zachováva, ale lokálne nie.[5]

Ak teraz zapíšeme náboj Q ako $\int_V \rho \cdot dV$ a ak o hustote ρ predpokladáme, že je dostatočne hladká na to, aby sme mohli prehodiť derivovanie s integrovaním, dostaneme

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

odkiaľ cez Gaussovu vetu

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}\right) \cdot dV = 0$$

a keďže toto má platiť pre každý objem V, tak $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$. Vzhľadom k tomu, že všetky uvažované implikácie sú vlastne ekvivalencie môžeme konštatovať, že rovnica kontinuity je ekvivalentná lokálnemu zákonu zachovania.

POZNÁMKA. V celej úvahe nehralo nijakú úlohu to, že zachovávajúcou sa veličinou bol práve elektrický náboj. Čiže sme vlastne ukázali, že pre každú lokálne sa zachovávajúcu veličinu platí

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{hustota zachovávajúcej sa veličiny}) + \operatorname{div}(\text{hustota prúdu tejto veličiny}) = 0$$

Maxwellove rovnice a rovnica kontinuity sú teda zhrnutím základných experimentálnych faktov týkajúcich sa elektriny a magnetizmu. Samotné Maxwellove rovnice sú vlastne:

- rovnice elektrostatiky a magnetostatiky, o ktorých sa predpokladá, že platia aj pre časovo premenné polia
- jedna naozaj elektrodynamická rovnica vyjadrujúca Faradayov zákon
- jedno doplnenie statickej rovnice členom odstraňujúcim nekonzistentnosť vznikajúcu pri prechode od statického prípadu k dynamickému (Maxwellov posuvný prúd)

Do štyroch krátkych Maxwellových rovníc je teda vložené pomerne veľa informácie. Význam týchto rovníc však nespočíva ani zďaleka len v tom, že umožňujú stručný zápis tejto informácie. *Maxwellove rovnice totiž obsahujú oveľa viac informácie, než bolo do nich vložené.*

[5] Poznamenajme, že s nelokálnym zákonom zachovania (zmiznutie a súčasné objavenie sa niekde inde) sú problémy, akonáhle vstúpi do hry teória relativity. Pri takomto nelokálnom zachovaní je totiž podstatná súčasnosť a tá je pre nesúmiestne udalosti relatívna; čo je v jednej inerciálnej vzťažnej sústave súčasné, v inej už súčasné byť nemusí.

1.2. Čo ešte je zašifrované v Maxwellových rovniciach.

V podstate celá prednáška z teórie elmag poľa bude venovaná najdôležitejším informáciám ukrytým v Maxwellových rovniciach a metódam dešifrovania týchto informácií zo samotných rovníc. Aby sme si však uvedomili, nakoľko obsažné sú Maxwellove rovnice, pripomeňme si už v tomto úvodnom paragrafe aspoň jeden príklad informácie v Maxwellových rovniciach obsiahnutej, hoci do nich nevloženej.

Uvažujme Maxwellove rovnice bez nábojov a prúdov a pomocou istého triku upravme tieto rovnice na tvar, z ktorého bude jasne vidieť charakter ich riešení. Trik spočíva v tom, že na rovnice $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ a $\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ aplikujeme operáciu rot a využijeme identitu $\operatorname{rot}\operatorname{rot} = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \triangle$. Dostaneme

$$-\triangle\vec{E} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{B} \qquad \text{a} \qquad -\triangle\vec{H} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{D}$$

čo sa využitím vzťahov $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$, $\vec{j} = 0$ (nulovosť nábojov a prúdov) a $\operatorname{div}\vec{H} = \mu_0^{-1}\operatorname{div}\vec{B} = 0$ zjednoduší na $-\triangle\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{B}$ a $-\triangle\vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{D}$, a keď ďalej ešte raz využijeme rovnice $\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\operatorname{rot}\vec{H} = \mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{D} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$ a $\operatorname{rot}\vec{D} = \varepsilon_0\operatorname{rot}\vec{E} = -\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}$, dostávame nakoniec

$$-\triangle\vec{E} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} \qquad \text{a} \qquad -\triangle\vec{H} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H}$$

čo sú tzv. vlnové rovnice.

Poznámka. Rovnica $\triangle\vec{u} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{u} = 0$ je trojrozmerným zovšeobecnením jednoduchšej, a zo základného kurzu fyziky známejšej, jednorozmernej vlnovej rovnice $\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(x,t) = 0$. Pripomeňme si, prečo sa táto rovnica volá vlnová.

Pod postupnými vlnami rozumieme funkcie dvoch premenných x, t, ktoré sú v skutočnosti funkcie iba jednej premennej α, pričom $\alpha = x \pm v\cdot t$. Funkcie $f(x \pm v\cdot t)$ naozaj zodpovedajú intuitívnemu chápaniu postupnej vlny ako niečoho, čo "nemení svoj profil a pritom sa hýbe rýchlosťou v jedným alebo druhým smerom" (odporúčame poriadne si premyslieť obsah tejto vety, pričom zrejme nezaškodí nakresliť si nejakú konkrétnu funkciu $f(x \pm v \cdot t)$ v niekoľkých rôznych časoch t). Priamym dosadením a využitím štandardných vzťahov pre derivácie zloženej funkcie $\frac{\partial}{\partial x}f(\alpha) = \frac{df}{d\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \frac{df}{d\alpha}$ a $\frac{\partial}{\partial t}f(\alpha) = \frac{df}{d\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \frac{df}{d\alpha}\cdot(\pm v)$ dostaneme $\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(\alpha) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(\alpha) = \frac{d^2f}{d\alpha^2} - \frac{1}{v^2}\frac{d^2f}{d\alpha^2}\cdot(\pm v)^2 = 0$. To znamená, že každá postupná vlna je riešením danej rovnice a preto je prirodzené hovoriť tejto rovnici vlnová.

Ukazuje sa teda, že elmag polia majú v prípade nulových hustôt náboja a prúdu charakter vĺn. Ak za konštanty ε_0 a μ_0 dosadíme ich číselné hodnoty $8.8 \times 10^{-12}F \cdot m^{-1}$ a $12.6 \times 10^{-7}N \cdot A^{-1}$, dostaneme pre rýchlosť týchto vĺn

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \doteq 300000\ km \cdot s^{-1}$$

čo je práve rýchlosť svetla. A vlny pohybujúce sa rýchlosťou svetla predsa poznáme, svetlo samo je takýmito vlnami. Všetko teda nasvedčuje tomu, že svetlo nie je nič iné ako elmag vlny.

Ďalšie teoretické a experimentálne skúmanie tejto viac než prirodzenej hypotézy ju v plnej miere potvrdilo. Ukázalo sa, že v Maxwellových rovniciach je obsiahnutá, hoci do nich explicitne nevložená, celá optika. Zavŕšením zjednotenia elektriny a magnetizmu s nimi teda Maxwell znenazdajky zjednotil aj optiku. Toto zjednotenie dovtedy navzájom nijako nesúvisiacich vecí patrí nesporne k najkrajším a najväčším momentom v celej histórii fyziky.[6]

Príklady

1. Niektoré užitočné identity vektorovej analýzy
(Precvičenie základného matematického aparátu na odvodení niektorých neskôr používaných identít.)
Dokážte nasledovné vzťahy:
$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f = 0$
$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{a} = 0$
$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{a} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{a} - \triangle\vec{a}$
$\mathrm{div}(f\cdot\vec{a}) = \vec{a}\cdot\mathrm{grad}\, f + f\cdot\mathrm{div}\,\vec{a}$
$\mathrm{rot}(f\cdot\vec{a}) = (\mathrm{grad}\, f)\times\vec{a} + f\cdot\mathrm{rot}\,\vec{a}$
$\mathrm{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{a} - \vec{a}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{b}$
$\mathrm{rot}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}\cdot\mathrm{div}\,\vec{b} - \vec{b}\cdot\mathrm{div}\,\vec{a} + (\vec{b}\cdot\bigtriangledown)\vec{a} - (\vec{a}\cdot\bigtriangledown)\vec{b}$
(Návod: vektorový súčin písať cez ε_{ijk}, deriváciu podľa i-tej súradnice ako ∂_i, používať Einsteinovu sumačnú konvenciu t.j. cez opakovaný index automaticky sčitovať a kde treba tam využiť tzv. DC identitu $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$.)

2. Maxwellove rovnice v "obrátenom garde"
(Maxwellove rovnice budeme v celej tejto prednáške chápať ako rovnice pre neznáme polia pri zadaných hustotách náboja a prúdu. Ak však poznáme polia, potom nám Maxwellove rovnice samozrejme umožňujú vypočítať náboje a prúdy.)
Zistite, či môžu existovať nasledujúce elmag polia a ak áno, akými nábojmi a prúdmi sú budené
a) $\vec{E} = (\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{a}$ $\quad\vec{B} = \alpha.\vec{a}\times\vec{r}$
b) $\vec{E} = \alpha.t.\vec{r}$ $\quad\vec{B} = \vec{B}_0$
c) $\vec{E} = (\vec{r}\times\vec{a})\times\vec{r}$ $\quad\vec{B} = \alpha\vec{r}$
Aké musia byť rozmery konštánt α a $\vec{a}$, aby boli tieto vzťahy rozmerovo správne?

3. Elmag polia v niektorých symetrických situáciách
(Niekoľko jednoduchých úloh, ktoré sa riešia využitím Maxwellových rovníc a predpokladom, že riešenie má rovnakú symetriu ako zadanie)
a) Nájdite elektrické pole homogénne nabitej priamky a homogénne nabitej roviny.
b) Nájdite magnetické pole nekonečne dlhého drôtu, ktorým preteká prúd I.
c) Prúd v cievke s hustým vinutím môžeme v rozumnom priblížení považovať za plošný prúd. Uvažujme nekonečne dlhú valcovú cievku s n závitmi na 1 m, pričom každým závitom preteká prúd I. Určte magnetické pole vnútri cievky aj mimo nej.

[6] Pre zaujímavosť dodajme, že väčšina kľúčových momentov v dejinách fyziky súvisí s nejakým zjednotením vecí, ktoré sa dovtedy považovali za celkom odlišné. Spomeňme aspoň Newtonovo zjednotenie pozemskej a nebeskej mechaniky, ktoré sa stalo základom celej klasickej fyziky, alebo Einsteinovo zjednotenie gravitácie a geometrie (vo všeobecnej teórii relativity), ktoré je považované za vyvrcholenie klasickej fyziky. Najvýznamnejším momentom medzi týmto základom a vyvrcholením bolo práve Maxwellovo zjednotenie elektriny, magnetizmu a optiky.

4. Vyjadrenie rôznych fyzikálnych zákonov v lokálnom diferenciálnom tvare
(Maxwellove rovnice sú vlastne zápisom základných zákonov elektriny a magnetizmu v lokálnom diferenciálnom tvare. Aby sme si precvičili tento spôsob zápisu fyzikálnych zákonov, pozrime sa na niekoľko ďalších oblastí fyziky, v ktorých sa takýto zápis veľmi často používa.)

a) rovnica difúzie
Pri nerovnomernom rozložení koncentrácie nejakých častíc v určitom objeme dochádza s rastúcim časom k vyrovnaniu koncentrácie, častice prechádzajú z oblastí s vyššou koncentráciou do oblastí s koncentráciou nižšou.[7] Podľa tzv. Fickovho zákona má tok častíc $\vec{j}(\vec{r},t)$ smer najväčšieho poklesu koncentrácie $\rho(\vec{r},t)$ a veľkosť toku je priamo umerná rýchlosti zmeny koncentrácie v tomto smere (koeficient úmernosti sa zvykne označovať D a hovorí sa mu koeficient difúzie).
Vyjadrite tok pomocou gradientu koncentrácie a spojením takto získaného vzťahu s rovnicou kontinuity vyjadrujúcou zachovanie počtu častíc odvoďte tzv. rovnicu difúzie $\partial_t \rho - D \cdot \triangle\rho = 0$.
(Uvedená rovnica platí len v homogénnom prostredí, v ktorom D nezávisí od $\vec{r}$. Ako vyzerá rovnica difúzie v nehomogénnom prostredí charakterizovanom funkciou $D(\vec{r})$?)

b) rovnica vedenia tepla
Podľa tzv. Fourierovho zákona má tok tepla v telese s nerovnomerne rozdelenou teplotou v každom mieste smer najväčšieho poklesu teploty a veľkosť tohto toku je priamo umerná rýchlosti zmeny teploty v tomto smere (koeficient úmernosti sa zvykne označovať κ a hovorí sa mu koeficient tepelnej vodivosti). Z vyjadrenia toku tepla cez gradient teploty a z kalorimetrickej rovnice (vyjadrenej v lokálnom diferenciálnom tvare) ukážte, že rovnica vedenia tepla je formálne zhodná s rovnicou difúzie.

[7] Poznamenajme, že táto skutočnosť je dôsledkom "slepého" pohybu častíc a nie nejakej ich "vedomej" snahy dostať sa na miesta s nižšou koncentráciou. Pod "slepým" pohybom rozumieme to, že častice sa z daného miesta hýbu s rovnakou pravdepodobnosťou vo všetkých smeroch, pričom čím je v danom mieste vyššia koncentrácia, tým viac ich z tohto miesta odchádza. Ak je teda v mieste 1 vyššia koncentrácia ako v susednom mieste 2, potom z 1 odchádza v smere do 2 viac častíc ako z 2 v smere do 1 (z 1 odchádza vo všetkých smeroch viac častíc ako z 2), čo v súčte dáva výsledný tok z 1 do 2.

2. Základné vzťahy elektrodynamiky v látkach

2.1. Rôzna závislosť $\vec{D}(\vec{E})$ a $\vec{H}(\vec{B})$ v rôznych látkach.

Elektrodynamika v mnohých látkach (vzduch a bežné plyny, voda a bežné kvapaliny, väčšina tuhých látok) vyzerá rovnako ako elektrodynamika vo vákuu, s tým jediným rozdielom, že konštanty ϵ a μ, vystupujúce vo vzťahoch $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ a $\vec{B} = \mu\vec{H}$, sú pre každú z týchto látok iné. Existujú však aj látky, v ktorých je situácia zložitejšia. Aj v týchto prípadoch je elektrodynamika v látke opísaná Maxwelovými rovnicami formálne zhodnými s Maxwellovými rovnicami, ktoré sme si uviedli pre vákuum, zložitejšími sa však stávajú vzťahy medzi poliami $\vec{D}$, $\vec{H}$ a poliami $\vec{E}$, $\vec{B}$.

Poznámka. Všade ďalej budeme za "primárne" považovať polia $\vec{E}$ a $\vec{B}$, ktoré môžu byť definované pomocou Lorentzovej sily, a polia $\vec{D}$ a $\vec{H}$ budeme považovať za ich funkcie.

Anizotropia. Prvým typom komplikovanejšieho vzťahu medzi poliami $\vec{D}$, $\vec{H}$ a poliami $\vec{E}$, $\vec{B}$ je zovšeobecnenie lineárnej závislosti na všeobecnú lineárnu závislosť v trojrozmernom priestore, ktorú vykazujú tzv. anizotropné látky (väčšina kryštálov). V týchto látkach majú polia $\vec{D}$ a $\vec{E}$ vo všeobecnosti rôzny smer, pričom ale platí, že keď sa zväčší $\vec{E}$ n-násobne, zväčší sa n-násobne aj príslušné $\vec{D}$. Okrem toho platí, že keď poľu $\vec{E}_1$ prislúcha pole $\vec{D}_1$ a poľu $\vec{E}_2$ prislúcha pole $\vec{D}_2$, potom poľu $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$ prislúcha pole $\vec{D}_1 + \vec{D}_2$. Zobrazeniu, ktoré má uvedené dve vlastnosti, sa hovorí lineárne a lineárnemu zobrazeniu, ktoré vektoru priraďuje vektor, sa hovorí tenzor. V anizotropných látkach je teda prirodzené považovať permitivitu za tenzor a písať

$$\vec{D} = \bar{\bar{\epsilon}} \cdot \vec{E}$$

a pre magnetické polia analogicky

$$\vec{H} = \bar{\bar{\mu}}^{-1} \cdot \vec{B}$$

Nelineárnosť. Anizotropia však ešte nie je až taká veľká komplikácia, oveľa vážnejšia je nelineárnosť. Existujú totiž látky, v ktorých $\vec{D}$ nie je lineárnou funkciou $\vec{E}$, resp. $\vec{H}$ nie je lineárnou funkciou $\vec{B}$. Takýmito látkami sú napríklad tzv. ferroelektriká a ferromagnetiká, ale pri dostatočne silných poliach sa stávajú nelineárnymi prakticky všetky látky (takéto dostatočne silné polia sa však pre väčšinu látok dosahujú len v laserových lúčoch, takže v bežných situáciách sa tieto látky chovajú lineárne). Elektrické a magnetické vlastnosti nelineárnych látok nie je možné charakterizovať dvoma číslami resp. tenzormi (permitivitou a permeabilitou), na ich charakterizovanie treba dve funkcie $\vec{D}(\vec{E})$ a $\vec{H}(\vec{B})$[8]

[8]Poznamenajme, že vo všeobecnosti môže pole $\vec{D}$ závisieť nielen od $\vec{E}$, ale aj od $\vec{B}$, a podobne pole $\vec{H}$ môže závisieť od $\vec{B}$ aj od $\vec{E}$. Avšak závislosť $\vec{D}$ od $\vec{B}$ resp. $\vec{H}$ od $\vec{E}$ býva väčšinou zanedbateľná.

POZNÁMKA. Akonáhle si uvedomíme, že závislosť $\vec{D}(\vec{E})$ resp. $\vec{H}(\vec{B})$ môže byť vo všeobecnosti nelineárna, vzniká otázka, prečo je tak často lineárna. Cesta k porozumeniu častej lineárnej závislosti veličín vo fyzike vedie cez rozvoj funkcií do Taylorovho radu. Rozvojom funkcie $\vec{D}(\vec{E})$, t.j. troch funkcií $D_i(E_1, E_2, E_3)$, okolo bodu $\vec{E} = \vec{0}$ dostaneme

$$D_i(E_1, E_2, E_3) = D_i(0,0,0) + \sum_j \frac{\partial D_i(0,0,0)}{\partial E_j} \cdot E_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial^2 D_i(0,0,0)}{\partial E_j \partial E_k} \cdot E_j \cdot E_k + \dots$$

Pre dostatočne malé $\vec{E}$ sú členy kvadratické a vyššie zanedbateľne malé vzhľadom k členom nižšieho rádu a vtedy prechádza všeobecná nelineárna závislosť na lineárnu. Z praktického hľadiska je pritom dôležité, že bežne dosiahnuteľné polia $\vec{E}$ sú často z uvedeného hľadiska dostatočne malé.

POZNÁMKA. (K predchádzajúcej poznámke.) Látkam, pre ktoré $\vec{D}(\vec{0}) \neq \vec{0}$, sa hovorí tvrdé dielekriká, látkam, pre ktoré $\vec{D}(\vec{0}) = \vec{0}$, mäkké dielektriká. Deväť čísiel $\frac{\partial D_i(\vec{0})}{\partial E_j}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ predstavuje deväť zložiek tenzora permitivity $\epsilon_{ij} = \frac{\partial D_i(\vec{0})}{\partial E_j}$. Pokiaľ sú tieto čísla nulové pre $i \neq j$ a rovnaké pre $i = j$, $(i = 1, 2, 3)$, t.j. pokiaľ $\epsilon_{ij} = \epsilon \cdot \delta_{ij}$, potom dostávame najjednoduchší prípad závislosti $\vec{D}(\vec{E}) = \epsilon \cdot \vec{E}$. Pre magnetické polia sú úvahy úplne analogické.[9]

Pamäť a nelokálnosť. Ďalšou komplikáciou je pamäť niektorých látok. Existujú totiž látky, v ktorých nie je hodnota $\vec{D}(\vec{r}, t)$ daná len hodnotou $\vec{E}(\vec{r}, t)$ v tom istom čase, ale aj hodnotami $\vec{E}$ v skorších časoch. Analogické tvrdenie platí pre polia $\vec{H}$ a $\vec{B}$. Typickým príkladom pamäti je jav hysterézie ferromagnetík, ale pri dostatočne rýchlych zmenách $\vec{E}$ a $\vec{B}$ sa prakticky všetky látky chovajú tak, ako keby mali určitú pamäť (napr. kovy pri vysokofrekvenčných napätiach, niektoré dielektriká pri frekvenciách viditeľného svetla a pod). Okrem pamäti sa v niektorých prípadoch stretávame s tzv. nelokálnosťou, kedy hodnota $\vec{D}(\vec{r}, t)$ nie je daná len hodnotou $\vec{E}(\vec{r}, t)$ v tom istom mieste, ale aj hodnotami $\vec{E}$ v iných miestach, a analogická vec platí pre $\vec{H}$ a $\vec{B}$. (Nelokálnosť sa prejavuje napr. pri šírení elmag vĺn s malou vlnovou dĺžkou v kovoch.)

POZNÁMKA. A znova otázka: ak môže byť závislosť $\vec{D}(\vec{E})$ resp. $\vec{H}(\vec{B})$ všeobecnosti nelokálna (či už v čase alebo v priestore), prečo je tak často lokálna? A odpoveď je znova ukrytá v Taylorovom rade, jej dešifrovanie je však v tomto prípade o niečo náročnejšie, preto ho odložíme do jednej z neskorších kapitol. Už teraz však môžeme prezradiť, že lokálnosť zodpovedá Taylorovmu radu v ktorom sú zanedbateľné všetky členy okrem člena nultého rádu a najjednoduchšia nelokálnosť zodpovedá Taylorovmu radu v ktorom je nezanedbateľný aj lineárny člen. Pre takúto lineárnu nelokálnosť (ktorej v prípade nelokálnosti v čase hovoríme lineárna pamäť) sa dá rozumne definovať pojem akejsi zovšeobecnej permitivity resp. permeability. Ešte sa k tomu vrátime.

[9] Poznamenajme, že pomocou istých termodynamických úvah sa dá nahliadnuť, že v prípade anizotropných látok musí byť tenzor permitivity resp. permeability symetrický.

V súvislosti s rôznorodou závislosťou polí $\vec{D}$ a $\vec{H}$ od polí $\vec{E}$ a $\vec{B}$ sa vynára otázka, koľko je vlastne elektrodynamík. Tieto závislosti totiž určujú teóriu v rovnakej miere ako Maxwellove rovnice, takže ak aj Maxwellove rovnice vyzerajú vo všetkých látkach rovnako, tak to vôbec neznamená, že elektrodynamika je vo všetkých látkach rovnaká. Otázka teda je, či je prirodzenejšie považovať elektrodynamiky v rôznych látkach za rôzne (a mať ich potom toľko, koľko je rôznych látok), alebo ich považovať v istom zmysle všetky za prejav jednej elektrodynamiky, ale potom v akom zmysle a ktorej.

Rôznorodá závislosť polí $\vec{D}$ a $\vec{H}$ od polí $\vec{E}$ a $\vec{B}$ prináša so sebou ešte jednu, ešte vážnejšiu otázku: *Čo sú vlastne polia $\vec{D}$ a $\vec{H}$?* V prípade elektrodynamiky vo vákuu boli tieto polia jasne definované ako určité násobky polí $\vec{E}$ a $\vec{B}$ a tieto možno v princípe definovať pomocou Lorentzovej sily, meranej pomocou pohybu nejakých testovacích nábojov. V látkach sa však tento jednoduchý súvis medzi poliami $\vec{D}$, $\vec{H}$ na jednej a $\vec{E}$, $\vec{B}$ na druhej strane stráca a tým pádom prestáva byť celkom jasné, čo sú vlastne polia $\vec{D}$ a $\vec{H}$. Je samozrejme možné považovať tieto polia len za akési pomocné veličiny, slúžiace na formuláciu rovníc určujúcich časový vývoj polí $\vec{E}$ a $\vec{B}$ (a takýto prístup je úplne korektný), predsa by však bolo dobré mať nejakú prirodzenú interpretáciu polí $\vec{D}$ a $\vec{H}$. Otázka teda stojí tak, či neexistuje nejaká prirodzená interpretácia týchto polí, a ak áno, tak aká.

Odpoveď na otázky z predchádzajúcich dvoch odstavcov dáva tzv. Lorentzova mikroskopická teória elmag poľa v látkach. Základná idea je veľmi jednoduchá: látky sa skladajú z elektrónov, jadier a vákua medzi nimi a elektrodynamika v látkach je teda elektrodynamikou vo vákuu, do ktorej ale treba zahrnúť náboje a prúdy elektrónov a jadier látky. Praktické použitie tejto myšlienky, t.j. prechod od takýchto tzv. mikroskopických polí vo vákuu k tzv. makroskopickým poliam v látkach, už až také jednoduché nie je. Aby sme zbytočne nezaťažovali náš výklad technickými podrobnosťami, ktoré nie sú nevyhnutné pre chápanie ďalších kapitol, nebudeme sa Lorentzovej mikroskopickej teórii venovať na tomto mieste, ale presunieme ju do dodatku.

Poznámka. Lorentzova mikroskopická teória nielenže umožňuje chápať elektrodynamiku v rôznych látkach ako rôzne prejavy jednej fundamentálnej elektrodynamiky vo vákuu, ale že umožňuje v princípe *vypočítať ako bude vyzerať elektrodynamika v danej látke, ak poznáme mikroskopické vlastnosti tejto látky a elektrodynamiku vo vákuu.*

Treba si však uvedomiť, že tzv. mikroskopické vlastnosti látok sú vlastne vlastnosťami jej atómov a molekúl, takže adekvátnym prostriedkom na opis týchto vlastností nebude klasická, ale kvantová mechanika. Okrem toho, v prípade makroskopických látok máme samozrejme dočinenia s obrovským množstvom atómov a molekúl, takže opis bude nevyhnutne opisom v rámci štatistickej fyziky. Kvantová štatistická fyzika zjavne presahuje možnosti tejto prednášky, takže aj v spomínanom dodatku sa budeme musieť zastaviť niekde na pol cesty.[10]

[10] Poznamenajme, že existujú prípady, kedy sa dá namiesto kvantovej mechaniky použiť jej klasické priblíženie a namiesto štatistickej fyziky jej najjednoduchšie verzie, napr. kinetická teória ideálneho plynu. Tieto prípady sa často spomínajú v úvodných kurzoch, práve pre svoju relatívnu jednoduchosť. Ak sa však človek zoznámi len s týmito zjednodušenými situáciami, je na najlepšej ceste vytvoriť si o celej problematike neadekvátnu predstavu.

2.2. Ohmov zákon.

Ako sme už povedali na začiatku, v tejto prednáške sa budeme zaoberať situáciami, v ktorých sú hustoty náboja a prúdu zadané. Jedinou (dôležitou) výnimkou bude hustota prúdu tzv. vodivostných elektrónov v kovoch. Medzi touto hustotou a elektrickým poľom platí v bežných situáciách jednoduchý lokálny lineárny vzťah

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

Tomuto vzťahu sa hovorí *Ohmov zákon v lokálnom tvare.* Súvis s bežne známym Ohmovým zákonom je zjavný ak uvažujeme prúd voľných nábojov v kove, v ktorom je homogénne elektrické pole $\vec{E}$. Ak je dĺžka kovu v smere poľa l, potom napätie medzi koncami je $U = E.l$ a ak je prierez vodiča v smere kolmom na smer poľa S, potom celkový prúd týmto prierezom je daný vzťahom

$$I = j \cdot S = \sigma \cdot E \cdot S = \frac{\sigma \cdot S}{l} \cdot U$$

čo nie je nič iné, ako bežný Ohmov zákon s $R = \frac{l}{\sigma \cdot S}$ (z čoho zároveň vidíme, že koeficient σ je rovný mernej vodivosti daného kovu).

Poznámka. Vzťah medzi $\vec{j}$ a $\vec{E}$ môže byť komplikovanejší ako Ohmov zákon, pričom zložitejšie vzťahy sú analogické zložitejším vzťahom medzi vektormi $\vec{D}$ a $\vec{E}$, o ktorých bola reč v úvode tejto časti. Pre anizotropné látky zostáva vzťah lineárny, ale merná vodivosť sa stáva tenzorom, pre silné polia môže byť vzťah nelineárny, pre rýchlo sa meniace elektrické pole vykazuje závislosť $\vec{j}(\vec{E})$ pamäť a stáva sa nelokálnou. V polovodičoch sa navyše stáva nezanedbateľnou závislosť $\vec{j}$ od $\vec{B}$ (Hallov jav).

Pre hustotu voľného náboja platí v kovoch veľmi jednoduchý vzťah

$$\rho = 0$$

Že je tomu naozaj tak ľahko nahliadneme ak v rovnici kontinuity využijeme najprv Ohmov a potom Coulombov zákon.

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = -\operatorname{div}\vec{j} = -\sigma \cdot \operatorname{div}\vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \cdot \rho$$

Pre hustotu ρ sme takto dostali jednoduchú diferenciálnu rovnicu, ktorej riešením je

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, 0) \cdot e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} \cdot t}$$

Ak teda máme na začiatku nenulovú hustotu náboja, táto s časom exponenciálne klesá, pričom za čas $\frac{\varepsilon}{\sigma}$ klesne e-násobne. Pre typické hodnoty vodivosti a permitivity kovov $\sigma \simeq 10^8 \Omega^{-1} m^{-1}$, $\varepsilon \simeq 10^{-9} F \cdot m^{-1}$ dostávame čas 10^{-17} s, čo je doba aj z mikroskopického hľadiska veľmi krátka. To ale znamená, že každá reálne dosiahnuteľná hustota náboja v kove klesne za mikroskopicky malý čas prakticky na nulovú hodnotu. Hodnoty ustrednené cez mikroskopicky veľký čas sú potom prirodzene nulové.[11]

[11] V tejto súvislosti môže vzniknúť prirodzená otázka, kam mizne elektrický náboj, ak v celom vodiči s časom exponenciálne klesá? Jediná možná odpoveď je, že náboj sa hromadí na povrchu vodiča (úvahy vedúce k exponenciálnemu poklesu sa totiž týkali len vnútra vodiča). Tento záver je skutočne správny a potvrdený experimentom.

2.3. Ostré rozhranie dvoch materiálov a hraničné podmienky.

Zdanlivo vážny problém: V súvislosti s Maxwellovými rovnicami v látkach vzniká takýto problém: Predstavme si ostré rozhranie dvoch materiálov charakterizovaných rôznymi vzťahmi medzi poliami $\vec{D}$, $\vec{H}$ a $\vec{E}$, $\vec{B}$, napríklad rovinu oddeľujúcu dva polpriestory vyplnené látkami s permitivitami a permeabilitami ε_1, μ_1 a ε_2, μ_2, pričom $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ a $\mu_1 \neq \mu_2$. Môžu byť všetky štyri polia $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$ spojité v mieste rozhrania? Nemôžu. Ak je totiž napríklad spojité $\vec{E}$, potom $\vec{D}$ je automaticky nespojité, pretože $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$ a spojite sa meniace $\vec{E}$ je násobené ε-nom nespojite sa meniacim z hodnoty ε_1 na hodnotu ε_2. Ak je naopak spojité $\vec{D}$ potom analogicky dostaneme nespojitosť $\vec{E}$ a s poliami $\vec{B}$ a $\vec{H}$ je to rovnaké. Avšak pre nespojité polia nemôžu platiť Maxwellove rovnice (to je ten problém), pretože v týchto rovniciach vystupujú derivácie všetkých polí podľa všetkých súradníc a nutným predpokladom existencie derivácie je spojitosť funkcie.

V skutočnosti však nejde o vážny problém. Pojem ostrého rozhrania dvoch látok je totiž pojem makroskopický, z mikroskopického hľadiska nie je nijaké rozhranie ostré, jedno prostredie prechádza do druhého postupne na vzdialenosti rádove nanometrov. Nespojitosti polí súvisiace s ostrým rozhraním teda vznikajú len pri makroskopickom pohľade, z mikroskopického hľadiska dochádza síce k prudkej, ale spojitej zmene. Mikroskopické Maxwellove rovnice platia aj na makroskopicky ostrom rozhraní. To, čo tu neplatí sú menej fundamentálne, aj keď technicky veľmi užitočné, makroskopické Maxwellove rovnice. Nejde teda o nijaký hlboký problém skutočných mikroskopických Maxwellových rovníc, ale len o technický problém, čím nahradiť makroskopické Maxwellove rovnice na ostrom rozhraní.

Vzťahy, ktoré nahrádzajú na ostrom rozhraní Maxwellove rovnice sú tzv. hraničné vzťahy pre elmag polia a odvádzajú sa nasledovne. Uvažuje sa integrálny tvar makroskopických Maxwellových rovníc t.j. tvar, ktorý dostaneme preintegrovaním cez uzavretý objem resp. plochu natiahnutú na uzavretú krivku a následným využitím Gaussovej resp. Stokesovej vety.

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \rho \cdot dV$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$$

Za oblasť integrovania sa berie v prípade uzavretej plochy povrch kvádra s dvomi stenami rovnobežnými s rozhraním, pričom rozhranie je medzi nimi, v prípade uzavretej krivky obvod obdĺžnika s dvomi stranami rovnobežnými s rozhraním, pričom rozhranie je medzi nimi (odporúčame nakresliť si). Základná finta pri odvodzovaní hraničných podmienok pre elmag polia spočíva v tom, že steny kvádra resp. strany obdĺžnika rovnobežné s rozhraním uvažujeme natoľko malé, aby sa hodnoty polí na nich prakticky nemenili a steny resp. strany kolmé na rozhranie infinitezimálne malé, takže ich príspevky do integrálov sú zanedbateľné. Integrály na ľavej strane rovníc tak budú dané hodnotami kolmých zložiek polí na oboch stranách rozhrania násobenými plochou rovnobežných stien, resp. hodnotami rovnobežných zložiek polí násobenými dĺžkou rovnobežných strán (myslí sa kolmosť a rovnobežnosť s rozhraním). Integrály na pravej strane sú za uvažovaných okolností integrálmi cez infinitezimálne oblasti a pokiaľ by boli podintegrálne funkcie ohraničené, boli by tieto integrály nulové. Avšak makroskopické hustoty náboja a prúdu vždy ohraničené nie sú. Na povrchu látok (najmä kovov) môže totiž nastať situácia, kedy je v makroskopicky infinitezimálnej povrchovej oblasti sústredený makroskopicky nenulový náboj a prúd. Integrál na pravej strane prvej rovnice je v takom prípade daný tzv. povrchovou hustotou náboja η násobenou plochou stien rovnobežných s rozhraním. Integrál na pravej strane štvrtej rovnice je daný tzv. povrchovou hustotou prúdu $\vec{k}$, a síce jej zložkou kolmou na plochu obdĺžnika násobenou dĺžkou strán rovnobežných s rozhraním. Celkove teda dostávame

$$\begin{aligned} D_{2n} - D_{1n} &= \eta \\ E_{2t} - E_{1t} &= 0 \\ B_{2n} - B_{1n} &= 0 \\ H_{2t} - H_{1t} &= k_{t'} \end{aligned}$$

Indexy 1 a 2 zodpovedajú rôznym prostrediam po oboch stranách rozhrania, index n znamená normálové (vzhľadom k rozhraniu) zložky vektorov, indexy t, t' navzájom kolmé tangenciálne zložky. Uvedeným vzťahom sa hovorí hraničné podmienky pre elmag polia a práve tieto vzťahy nahrádzajú makroskopické Maxwellove rovnice na ostrom rozhraní dvoch prostredí.

Hraničné podmienky sa často zvyknú zapisovať v kompaktnejšej forme pomocou jednotkového vektora $\vec{n}$, kolmého na rozhranie a smerujúceho z prostredia 1 do prostredia 2:

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) &= \eta \\ \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) &= 0 \\ \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) &= 0 \\ \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= \vec{k} \end{aligned}$$

Poznámka. Štandardné odvodenie hraničných podmienok, ktoré sme práve predviedli, skrýva v sebe jednu záludnosť, ktorá sa vo väčšine kníh prejde mlčaním. Ide o to, že infinitezimálne veličiny uvažované v tomto odvodení nie sú v skutočnosti infinitezimálne, t.j. ľubovoľne malé. Samotné rozhranie totiž nie je nekonečne tenké, ale meria, ako sme už povedali, rádove nanometre. Ak má kváder resp. obdĺžnik uvažovaný v štandardnom odvodení zasahovať do oboch prostredí (a to má), potom infinitezimálne veľkosti v tomto odvodení nemôžu klesnúť pod hrúbku rozhrania. Alebo inými slovami: celé štandardné odvodenie sa deje na makroskopickej úrovni a na tejto úrovni "infinitezimálny" neznamená ľubovoľne blízky nule (zhora), ale ľubovoľne blízky nanometrom (zhora). Z toho ovšem vyplýva, že treba byť opatrný pri zanedbávaní členov v dôsledku tejto infinitezimálnosti. Zanedbávané členy nie sú nulové a je otázne, či sú vo všetkých prípadoch zanedbateľné. Táto otázka prestáva byť len akademickou otázkou v prípade, ak sú aj ostatné vzdialenosti v štandardnom odvodení na úrovni nanometrov alebo desiatok nanometrov. A takáto situácia môže nastať pri poliach výrazne sa meniacich na malých vzdialenostiach (napr. v elmag vlne s vlnovou dĺžkou rádove stoviek nanometrov), pretože všetky vzdialenosti v štandardnom odvodení musia byť dostatočne malé na to, aby sa na nich elmag polia prakticky nemenili. V takýchto prípadoch teda nemožno považovať štandardné odvodenie hraničných podmienok za skutočné odvodenie a hraničné podmienky treba v takýchto prípadoch buď odvodiť inak, alebo ich považovať skôr za nezávislé postuláty. "Odvodenie" má v takýchto prípadoch funkciu akejsi rozumnej motivácie pre postulovanie takýchto hraničných podmienok.

Príklady

1. Rovnice pre elmag vlny v rôznych materiáloch
(Ilustrácia toho, že rovnaké Maxwellove rovnice a rôzne materiálové vzťahy môžu viesť k podstatne odlišným fyzikálnym javom.)
Postupom podobným ako sme použili pri odvodzovaní vlnovej rovnice pre elmag polia vo vákuu bez nábojov a prúdov odvoďte analogické rovnice pre elmag polia bez nábojov a prúdov v
a) homogénnom kove
b) supravodiči prvého druhu, kde namiesto Ohmovho zákona platia tzv. rovnice bratov Londonovcov

$$\vec{E} = \Lambda \cdot \frac{\partial}{\partial t}\vec{j} \qquad\qquad \vec{B} = -\mu \cdot \lambda^2 \cdot \operatorname{rot}\vec{j}$$

c) homogénnom anizotropnom dielektriku
d) homogénnom nelineárnom dielektriku, pre ktoré $\vec{D} = (\varepsilon + \alpha \cdot E^2) \cdot \vec{E}$

komentár:
a) Rovnica, ktorú dostaneme, obsahuje oproti vlnovej rovnici navyše člen s prvou časovou deriváciou. Tento člen spôsobuje exponenciálny útlm elmag vĺn v kovoch.
b) Rovnica, ktorú dostaneme pre $\vec{B}$ obsahuje oproti vlnovej rovnici navyše člen úmerný $\vec{B}$. Tento člen spôsobuje, že časovo nepremenné magnetické pole v supravodiči prvého druhu smerom od hraníc do vnútra exponenciálne klesá a vo vnútri supravodiča je nulové – tzv. Meissnerov jav. (Pre elektrické pole platia rovnaké úvahy – elektrické pole v supravodiči je v statickom prípade nulové, rovnako ako v obyčajnom vodiči.)
c) Rovnica, ktorú dostaneme, sa od vlnovej rovnice líši tým, že v nej vystupujú aj členy typu grad div a navyše sa v nej vyskytujú tenzory. S vlnovou rovnicou má spoločné to, že rovinné vlny t.j. funkcie typu $\vec{f}(\vec{r} \pm \vec{v} \cdot t)$ sú jej riešeniami, avšak len pre určité $\vec{v}$, pričom pre rôzne smery $\vec{v}$ je veľkosť v rôzna. To znamená, že rýchlosť šírenia vĺn je pre rôzne smery šírenia rôzna čo má medziiným za následok dvojlom svetla v niektorých kryštáloch.
d) Rovnica, ktorú dostaneme je pomerne komplikovaná. Ak sa však veľkosť poľa E mení v priestore aj čase dosť pomaly na to, aby boli členy obsahujúce derivácie štvorca E^2 zanedbateľné oproti ostatným členom (čo je napr. splnené v prípade šírenia sa rovinnej vlny v danom prostredí), potom oproti obyčajnej vlnovej rovnici zostane navyše len člen $\mu \cdot \alpha \cdot E^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}$, ktorý spôsobuje také veci, ako samofokusáciu a vznik vlny s dvojnásobnou frekvenciou pri prechode laserového žiarenia látkou.

2. Využitie hraničných podmienok pre elmag polia v elektrostatických a magnetostatických úlohách
(Niekoľko jednoduchých úloh, ktoré sa riešia využitím symetrie, materiálových vzťahov a hraničných podmienok pre elmag polia.)
a) Homogénne nabitá (celkový náboj Q) dielektrická guľa (polomer R, permitivita ε_1) sa nachádza v dielektriku s permitivitou ε_2. Určte elektrické pole v guli aj mimo nej a plošnú hustotu náboja na povrchu gule.
b) Nabitá (celkový náboj Q) kovová guľa (polomer R, permitivita ε_1) sa nachádza v dielektriku s permitivitou ε_2. Určte elektrické pole v guli aj mimo nej a plošnú hustotu náboja na povrchu gule.
c) Nekonečne dlhým valcovým vodičom (polomer R, merná vodivosť σ) preteká prúd I. Určte elmag polia vo valci aj mimo neho.

3. Odraz a lom rovinnej elmag vlny
(Tip na samostatné štúdium. Jedno z významných použití hraničných podmienok pre elmag polia.)
Preštudujte si v niektorej knihe z optiky alebo teórie elmag poľa kapitolu o odraze a lome rovinnej elmag vlny na rozhraní dvoch dielektrík. Analýza týchto javov spočíva na predpoklade, že riešenie Maxwellových rovníc má tvar superpozície troch rovinných vĺn – jednej dopadajúcej, jednej odrazenej a jednej "prejdenej". Z tohto predpokladu a z hraničných podmienok pre elmag polia sa dajú odvodiť také veci ako zákon odrazu, zákon lomu a Fresnelove vzťahy pre intenzity odrazeného a lomeného svetla rôznej polarizácie.

3. Zákony zachovania pre elmag pole

Motivácia

Začneme s jednoduchým myšlienkovým experimentom, ktorý nás dovedie k potrebe zaviesť energiu, hybnosť a moment hybnosti elmag poľa. Nepôjde o nejakú rigoróznu úvahu, z ktorej nutnosť zavedenia týchto veličín nevyhnutne vyplynie, ale skôr o úvahu intuitívnu, ktorá má slúžiť ako motivácia ďalších, formálnejších postupov.

Predstavme si vysielaciu anténu obklopenú prijímacími anténami rozloženými po povrchu gule so stredom vo vysielacej anténe a s polomerom tri milióny kilometrov. Predstavme si ďalej, že v určitom momente vyvoláme vo vysielacej anténe pohyb voľných elektrónov t.j. dodáme do systému isté množstvo energie vo forme kinetickej energie voľných elektrónov. Po jednej sekunde nech tento pohyb ustane t.j. kinetická energia elektrónov sa premení na iné formy energie. Na aké?

V prvom rade zrejme na vnútornú (tepelnú) energiu vysielacej antény. To však nie je všetko. Pohyb elektrónov vo vysielacej anténe mení elektromagnetické pole v priestore a zmenené elmag polia vyvolajú pohyb voľných elektónov v prijímacích anténach. Tento pohyb zas po nejakom čase (pre jednoduchosť predpokladajme tiež jednu sekundu) ustane a kinetická energia elektrónov prijímacích antén sa premení na vnútornú (tepelnú) energiu prijímacích antén. Pre jednoduchosť predpokladajme, že celá pôvodná kinetická energia E voľných elektrónov vysielacej antény sa takto nakoniec premenila na zvýšenie vnútornej energie antén o δE_1 a δE_2. Z hľadiska zachovania energie je takto všetko nakoniec v poriadku. Nakoniec! Nie však medzi začiatkom a koncom.

Ide o to, že ak sa elmag polia šíria rýchlosťou svetla, potom elektróny v prijímacích anténach sa začnú pohybovať v dôsledku pohybu elektrónov vysielacej antény až po desiatich sekundách. Medzi prvou a desiatou sekundou máme teda z pôvodnej energie E časť premenenú na δE_1 a časť “nie je nikde”. Ak sa nám to nepáči a trváme na tom, že zvyšná energia musí niekde byť aj v čase medzi prvou a desiatou sekundou, neostáva nám pravdepodobne nič iné, ako priznať nejakú energiu samotnému elektromagnetickému poľu. Otázka je, ako to urobiť, aby sme sa podobným paradoxom vyhli nielen v tomto prípade, ale vo všetkých situáciách.

Ak si uvedomíme, že uvedenie elektrónov prijímacej antény do pohybu znamená zmenu ich hybnosti a momentu hybnosti , prídeme analogicky k záveru, že elmag poľu treba zrejme pripísať aj určitú hybnosť a moment hybnosti. (Iný myšlienkový experiment vedúci k potrebe zaviesť moment hybnosti elmag poľa možno nájsť vo Feynmanových prednáškach z fyziky, tretí diel slovenského vydania, paragraf 17.4).

Cieľom tejto časti bude nájsť všeobecné vyjadrenia pre energiu, hybnosť a moment hybnosti elmag poľa a sformulovať pre elmag pole príslušné zákony zachovania. Obmedzíme sa pritom na elmag polia vo vákuu, čo je technicky najjednoduchší a principiálne najdôležitejší prípad. Formulácia zákonov zachovania pre elmag pole v látkových prostrediach je komplikovanejšia a to často v miere ďaleko presahujúcej možnosti úvodného kurzu. V prípade látkových prostredí sa preto obmedzíme len na stručnú poznámku, z ktorej by malo byť aspoň zhruba jasné prečo a v akom zmysle sú zákony zachovania pre elmag pole v látkach zložitejšie než analogické zákony vo vákuu.

3.1. Zákon zachovania energie.

Pri odvodení zákona zachovania energie pre elmag pole budeme postupovať úplne formálne a celý postup zdôvodníme až na konci. Vychádzame z dvoch Maxwellových rovníc

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad\qquad \operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Ak prvú z nich vynásobíme skalárne vektorom $\vec{H}$, druhú skalárne vektorom $\vec{E}$ a druhú od prvej odčítame, dostaneme

$$\vec{H}\cdot\operatorname{rot}\vec{E} - \vec{E}\cdot\operatorname{rot}\vec{H} = -\vec{E}\cdot\vec{j} - \vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

ľavá strana tejto rovnice nie je nič iné ako $\operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{H})$ (pozri príklad I.1.1). Členy obsahujúce časovú deriváciu možno v prípade vákua upraviť nasledovne

$$\vec{E}\cdot\frac{\partial \varepsilon_0\vec{E}}{\partial t} + \vec{H}\cdot\frac{\partial \mu_0\vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\,\frac{1}{2}\cdot(\varepsilon_0\vec{E}^2 + \mu_0\vec{H}^2)$$

takže dostávame

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{1}{2}\cdot(\varepsilon_0\vec{E}^2 + \mu_0\vec{H}^2) + \operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{H}) = -\vec{E}\cdot\vec{j}$$

čo po zavedení označenia

$$\boxed{u = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_0\vec{E}^2 + \mu_0\vec{H}^2)}$$

a

$$\boxed{\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}}$$

prepíšeme na tvar

$$\boxed{\tfrac{\partial}{\partial t}u + \operatorname{div}\vec{S} = -\vec{E}\cdot\vec{j}}$$

Ak chceme pochopiť, čo sme to vlastne dostali, uvažujme najprv prípad bez vonkajších prúdov. V tomto prípade je pravá strana poslednej rovnice nulová a rovnica vlastne predstavuje rovnicu kontinuity pre nejakú hustotu u a nejaký prúd $\vec{S}$. Ako vieme z prvej prednášky, rovnica kontinuity je lokálnym vyjadrením nejakého zákona zachovania.

Aby sme si teraz uvedomili, o aký zákon zachovania ide, vráťme sa k členu $\vec{E}\cdot\vec{j}$. Ukážeme, že tento člen predstavuje výkon Lorentzovej sily pri pohybe nábojov. Výkon sily $\vec{F}$ je pri pohybe častice rýchlosťou $\vec{v}$ daný skalárnym súčinom $\vec{F}\cdot\vec{v}$, čo v prípade Lorentzovej sily dáva

$$P = q\cdot\vec{E}\cdot\vec{v} + q\cdot(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{v}$$

pričom druhý člen je nulový (skalárny súčin dvoch kolmých vektorov). Vydelením tejto rovnice objemom a poslaním tohto objemu do nuly dostaneme rovnicu pre hustoty

$$\text{hustota výkonu Lorentzovej sily} = \rho\cdot\vec{E}\cdot\vec{v}$$

a súčin hustoty náboja s rýchlosťou hmoty v danom mieste nie je nič iné ako hustota prúdu v danom mieste. Pravá strana získanej rovnice je teda rovná mínus hustote výkonu Lorentzovej sily, t.j. rýchlosti úbytku hustoty kinetickej energie pohybujúcich sa nábojov.

Vo všeobecnosti teda u nie je hustotou zachovávajúcej sa veličiny, jej prírastok je daný výrazom, ktorý je rovný úbytku hustoty energie pohybujúcich sa nábojov. To, čo sa zachováva je teda súčet veličiny u s hustotou energie nábojov, čiže nie je nič prirodzenejšie než interpretovať veličinu u ako hustotu energie elmag poľa a veličinu $\vec{S}$ tým pádom ako hustotu toku energie elmag poľa (vektoru $\vec{S}$ sa zvykne hovoriť Poyntingov vektor).

Zákon zachovania energie elmag poľa v lokálnom tvare sme teda dostali ako rovnicu kontinuity s nenulovou pravou stranou, zodpovedajúcou úbytku hustoty energie nábojov. Ak by sme si dopredu vyjasnili, že hľadáme práve toto, mohli sme postupovať tak, že by sme sa takúto rovnicu pokúšali získať nejakými úpravami z Maxwellových rovníc. Náš formálny postup nebol vlastne nič iné, než takýto (úspešný) pokus.

3.2. Zákon zachovania hybnosti.

Poučení postupom pri hľadaní zákona zachovania energie budeme sa snažiť získať z Maxwellových rovníc rovnicu kontinuity s nenulovou pravou stranou, ktorá by tentoraz zodpovedala rýchlosti úbytku hustoty hybnosti nábojov, t.j. mínus hustote Lorentzovej sily. Najprirodzenejší postup je zobrať rovnice

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

prvú vynásobiť skalárne vektorom $\vec{E}$, druhú vektorovo vektorom $\vec{B}$ a sčítať. Dostaneme

$$\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\times\vec{B} + \vec{B}\times\operatorname{rot}\vec{H} - \vec{E}\cdot\operatorname{div}\vec{D} = -(\rho\cdot\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B})$$

Časovú deriváciu, potrebnú v rovnici kontinuity, získame zrejme z člena $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\times\vec{B}$ a najjednoduchšie by to išlo, keby sme tam mali aj člen $\vec{D}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$. Je preto prirodzené pripočítať k našej rovnici ešte rovnicu $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ vynásobenú vektorovo vektorom $\vec{D}$, čím dostaneme

$$\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\times\vec{B} + \vec{D}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{B}\times\operatorname{rot}\vec{H} + \vec{D}\times\operatorname{rot}\vec{E} - \vec{E}\cdot\operatorname{div}\vec{D} = -(\rho\cdot\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B})$$

prvé dva členy dávajú $\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}\times\vec{B})$. Ak sa nám podarí upraviť zvyšné členy na divergenciu čohosi, potom bude zrejme $\vec{D}\times\vec{B}$ hustota hybnosti a to čosi bude hustotou toku hybnosti elmag poľa.

Kým sa pustíme do úprav zostávajúcich členov, vyjasníme si, aký charakter bude mať hustota toku hybnosti. Doteraz sme sa stretli iba s rovnicami kontinuity, v ktorých zachovávajúca sa veličina bola skalárna a jej tok bol vektor. Teraz však máme vektorovú zachovávajúcu sa veličinu a vzniká otázka, čo je hustota toku vektorovej veličiny. V prvom rade si uvedomíme, že hustota toku nám vlastne hovorí, koľko danej veličiny pretečie za jednotku času danou infinitezimálnou plôškou. Infinitezimálna plôška je pritom daná svojou veľkosťou a orientáciou, ktoré sú obe zašifrované vo vektore $\vec{dS}$ prislúchajúcom tejto plôške. Hustota toku teda priradí vektoru $\vec{dS}$ množstvo pretečenej veličiny, čiže ak je táto veličina vektor, hustota toku priradí vektoru vektor. Toto zobrazenie je navyše vďaka infinitezimálnosti $d\vec{S}$ lineárne. Každé zobrazenie, ktoré niečo priraďuje infinitezimálnym veličinám, je totiž lineárne, čo sa okamžite nahliadne rozvojom daného zobrazenia do Taylorovho radu a zanedbaním všetkých členov vyšších ako lineárnych (ktoré sú zanedbateľné práve vďaka infinitezimálnosti argumentu). Hustota toku je teda v našom prípade lineárne zobrazenie, ktoré priraďuje vektoru vektor, čo nie je nič iné ako definícia tenzora (druhého rádu). Vyjasnili sme si teda, že hustota toku hybnosti bude tenzor a teraz sa pustíme do hľadania zložiek tohto tenzora.

Najprv ešte upravíme členy, z ktorých chceme vyrobiť divergenciu čohosi, na symetrickejší tvar pripočítaním nuly v tvare, ktorý dostaneme vynásobením rovnice $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ vektorom $\vec{H}$ (keby sme to neurobili teraz, ďalší postup by nás doviedol k tomu, že by sme to museli urobiť neskôr). Chceme teda zistiť, či je možné písať

$$\vec{B} \times \operatorname{rot}\vec{H} + \vec{D} \times \operatorname{rot}\vec{E} - \vec{E}\cdot\operatorname{div}\vec{D} - \vec{H}\cdot\operatorname{div}\vec{B} = \operatorname{div}\text{čohosi}$$

členy obsahujúce elektrické polia upravíme takto (kvôli prehľadnosti použijeme označenie $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$)

$$\begin{aligned}\left(\vec{D}\times\operatorname{rot}\vec{E} - \vec{E}\cdot\operatorname{div}\vec{D}\right)_i &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}D_j\partial_l E_m - E_i\partial_j D_j \\ &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})D_j\partial_l E_m - E_i\partial_j D_j \\ &= D_j\partial_i E_j - D_j\partial_j E_i - E_i\partial_j D_j = D_j\partial_i E_j - \partial_j(E_i D_j) \\ &= \partial_j\ (\frac{1}{2}\cdot\varepsilon_0 E^2\cdot\delta_{ij} - E_i D_j)\end{aligned}$$

pričom na konci sme využili $D_j = \varepsilon_0 E_j \Rightarrow D_j\partial_i E_j = \varepsilon_0 E_j\partial_i E_j = \frac{1}{2}\cdot\varepsilon_0\partial_i E_j E_j$.

Ak rovnaké úpravy urobíme s členmi obsahujúcimi magnetické polia, dostaneme, že súčet všetkých štyroch členov sa rovná výrazu

$$\partial_j\ \left(\frac{1}{2}\cdot(\varepsilon_0\vec{E}^{\,2} + \mu_0\vec{H}^2)\cdot\delta_{ij} - E_i D_j - H_i B_j\right)$$

a keďže divergencia tenzora má v kartézskych súradniciach tvar $\partial_j T_{ij}$ vidíme, že hľadaný tenzor (nazývaný tenzorom hustoty toku hybnosti elmag poľa) má súradnice

$$\boxed{T_{ij} = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_0\vec{E}^2 + \mu_0\vec{H}^2)\delta_{ij} - E_i D_j - H_i B_j}$$

Samotná hustota hybnosti je daná výrazom

$$\boxed{\vec{g} = \vec{D}\times\vec{B}}$$

a zákon zachovania hybnosti môžeme teda písať v kompaktnom tvare

$$\boxed{\tfrac{\partial}{\partial t}\vec{g} + \operatorname{div}\bar{\bar{T}} = -\left(\rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}\right)}$$

3.3. Zákon zachovania momentu hybnosti.

Zákon zachovania momentu hybnosti dostaneme jednoducho zo zákona zachovania hybnosti a to vynásobením vektorovo vektorom $\vec{r}$

$$\vec{r} \times \frac{\partial}{\partial t}\,\vec{g} + \vec{r} \times \operatorname{div} \bar{\bar{T}} = -\vec{r} \times (\rho \cdot \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})$$

Na pravej strane stojí hustota momentu Lorentzovej sily, t.j. to, čo tam chceme mať. Člen s deriváciou podľa času upravíme jednoducho na základe toho, že t a $\vec{r}$ sú nezávislé premenné a preto $\vec{r} \times \frac{\partial}{\partial t}\vec{g} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{r} \times \vec{g})$, takže $\vec{r} \times \vec{g}$ bude zrejme hrať úlohu hustoty momentu hybnosti elmag poľa. Ostáva upraviť zostávajúci člen na divergenciu niečoho, čo bude hrať úlohu hustoty toku momentu hybnosti. Na základe argumentácie rovnakej ako v prípade hybnosti môžeme očakávať, že tento tok bude tenzor.

$$\begin{aligned}\left(\vec{r} \times \operatorname{div} \bar{\bar{T}}\right)_i &= \epsilon_{ijk} x_j \partial_l T_{kl} = \epsilon_{ijk}(\partial_l x_j T_{kl} - T_{kl}\partial_l x_j) \\ &= \epsilon_{ijk}\partial_l x_j T_{kl} - \epsilon_{ijk} T_{kl}\delta_{lj} = \partial_l(\epsilon_{ijk} x_j T_{kl}) - \epsilon_{ijk} T_{kj} \\ &= \partial_l(\epsilon_{ijk} x_j T_{kl})\end{aligned}$$

kde sme využili nulovosť $\epsilon_{ijk}T_{kj}$, vyplývajúcu z antisymetrie ϵ_{ijk} a symetrie T_{kl}. Vidíme teda, že hľadaný tenzor (nazývaný tenzorom hustoty toku momentu hybnosti elmag poľa) má súradnice

$$\boxed{M_{il} = \epsilon_{ijk} x_j T_{kl}}$$

Samotná hustota momentu hybnosti je daná výrazom

$$\boxed{\vec{l} = \vec{r} \times \vec{g}}$$

a zákon zachovania momentu hybnosti môžeme teda písať v kompaktnom tvare

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\vec{l} + \operatorname{div} \bar{\bar{M}} = -\vec{r} \times \left(\rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}\right)}$$

Jeden príklad užitočnosti zákonov zachovania

Zákony zachovania nie sú nezávislé zákony elektrodynamiky, sú to dôsledky Maxwellových rovníc. Ich význam teda nespočíva v tom, že by nám odhaľovali nejaké nové vlastnosti prírody, ktoré by neboli implicitne zahrnuté v tom, čo sme už poznali, ale v tom, že pri niektorých všeobecných úvahách, rovnako ako pri riešení niektorých konkrétnych úloh, je výhodnejšie vychádzať nie priamo z Maxwellových rovníc, ale z niektorého zo zákonov zachovania. Ako príklad si uvedieme výpočet sily pôsobiacej na teleso v elmag poli pomocou zákona zachovania hybnosti.

Napíšme zákon zachovania hybnosti v tvare

$$\text{hustota rýchlosti zmeny hybnosti nábojov} = -\frac{\partial}{\partial t}\,\vec{g} - \operatorname{div} \bar{\bar{T}}$$

a preintegrujme cez nejaký objem V ohraničený uzavretou plochou S. Výsledok môžeme zapísať v tvare

$$\text{rýchlosť zmeny hybnosti nábojov a poľa v objeme V} = -\int_V \operatorname{div} \bar{\bar{T}}\; dV$$

Uvažujme teraz situáciu, v ktorej sa hybnosť elmag poľa v danom objeme nemení. Môže to byť napr. prípad elektrostatického poľa alebo prípad periodicky sa meniaceho poľa (napr. elmag vlna), v ktorom je nárast hybnosti poľa v nejakom mieste vždy vykompenzovaný jej poklesom v inom mieste. Vtedy ostane na ľavej strane rovnice len rýchlosť zmeny hybnosti nábojov, čo nie je nič iné ako celková sila pôsobiaca na náboje v uvažovanom objeme. Ak ešte upravíme pravú stranu pomocou Gaussovej vety (pre tenzory platí rovnako ako pre vektory, čo sa ľahko nahliadne rozpísaním do zložiek) dostaneme

$$\vec{F} = -\oint_S \bar{\bar{T}}\ d\vec{S}$$

resp. v zložkách

$$F_i = -\oint_S T_{ij}\ dS_j = -\oint_S T_{ij}\ n_j\ dS$$

Vidíme, že na výpočet sily pôsobiacej napr. na nejaké teleso v elmag poli je vo vyššie spomínaných prípadoch dostatočné poznať tenzor toku hybnosti poľa na nejakej ploche obobínajúcej teleso (pričom táto plocha nemusí ležať na hranici tohto telesa, môže ležať aj mimo teleso a to aj hodne ďaleko). Na prvý pohľad to nemusí vyzerať ako nejaká veľká výhra, ale skúsme pouvažovať, ako by sme počítali túto silu inak. Priamočiara cesta by bola jednoduchým integrovaním Lorentzovej sily, ale na to treba poznať polia a hustotu (voľného a polarizovaného) náboja v celom objeme telesa a polia a plošnú hustotu (voľného a polarizovaného) náboja na povrchu telesa, čo rozhodne nemusí byť vždy jednoduché. Dobrú ilustráciu užitočnosti výpočtu sily zo zákona zachovania hybnosti predstavuje výpočet tzv. svetelného tlaku – pozri príklad 3.

Analogické úvahy, aké sme urobili pre teleso ako celok, môžeme urobiť aj pre jeho časť a vyjadriť tak (objemové) elmag sily pôsobiace na túto časť cez plošné sily pôsobiace na povrch tejto časti. Toto je výhodné najmä pri skúmaní elmag vlastností pružných telies a kvapalín – elmag sily sa vezmú do úvahy jednoducho pridaním tenzora toku hybnosti elmag poľa k tenzoru napätí v pohybových rovniciach kontinua (z tohto dôvodu sa tenzoru toku hybnosti elmag poľa často hovorí Maxwellov tenzor napätí). Poznamenajme však, že pri praktických výpočtoch sa v látkových prostrediach uvažujú isté modifikované hustoty energie a toku hybnosti (pozri nasledujúcu poznámku 3), ktoré sú na prvý pohľad komplikovanejšie ako priamočiare zovšeobecnenia hustôt vo vákuu, v skutočnosti však výpočty (ktoré ovšem presahujú úroveň úvodnej prednášky) uľahčujú.

Tri poznámky

Poznámka. Analógia tenzoru toku hybnosti s tenzorom napätí v mechanike kontinua viedla Maxwella k myšlienke, že tenzor toku hybnosti je naozaj tenzorom napätí v nejakom všadeprítomnom kontinuu a toto kontinuum nazval éterom. Zbytočnosť a nevhodnosť tohto pojmu v elektrodynamike ukázala až teória relativity.

Poznámka. V niektorých knihách sa fakt, že elmag pole má svoju vlastnú energiu, hybnosť a moment hybnosti, interpretuje ako dôkaz toho, že elmag pole "je niečo skutočné", že to nie je len akási abstraktná matematická konštrukcia.

Nemyslí sa tým dôkaz v zmysle matematickom, ale skôr v zmysle psychologickom – mnoho ľudí je zrejme ochotných považovať za "niečo skutočné" skôr to, čo má energiu, hybnosť a moment hybnosti, ako to, čo tieto veci nemá.

Na druhej strane samotné pojmy energie, hybnosti a momentu hybnosti sú vlastne abstraktné konštrukcie, takže ich "dôkazová sila" je diskutabilná, resp. bola by diskutabilná, keby sa o týchto veciach oplatilo diskutovať. To sa ale asi neoplatí – či sa niekomu myšlienka "dôkazu" reálnosti elmag poľa cez jeho energiu, hybnosť a moment hybnosti páči alebo nie, nie je až tak veľmi vecou logiky ako skôr vecou vkusu.

Poznámka. Na zákonoch zachovania pre elmag pole v látkových prostrediach je komplikované to, že v makroskopických poliach sú v istom zmysle zahrnuté aj náboje a prúdy častíc látky, a teda čo je mechanické a čo elektromagnetické nie je ostro odlíšené. Hranicu medzi mechanickým a elektromagnetickým možno do istej miery posúvať tak, ako je to výhodné. Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že najvýhodnejšie bude jednoducho zopakovať postup z vákua, pričom za polia sa budú brať makroskopické polia a za náboje len vonkajšie náboje. Takto dostaneme napr. pre mäkké homogénne izotropné dielektrikum bez pamäte a nelokálnosti to isté, čo pre vákuum, akurát s konštantami ε, μ namiesto ε_0, μ_0.

Avšak pri vyšetrovaní súvisu elektromagnetických vlastností látok s vlastnosťami termodynamickými a deformačnými je výhodnejšie definovať hustotu energie elmag poľa nasledovne

$$\begin{aligned}\text{hustota energia poľa} &= \text{hustota energie systému pole a látka}\\ &- \text{hustota energie len látky pri tej istej teplote a hustote}\end{aligned}$$

a analogicky pre ostatné elmag veličiny. Takáto definícia vedie k výrazom pre hustotu energie a hustotu toku hybnosti odlišným od jednoduchých zovšeobecnení z vákua. Tieto výrazy teraz uvedieme bez odvodenia, len pre ilustráciu, aby sme mali predstavu o tom, nakoľko sa líšia veličiny často používané pri výpočtoch v elektrodynamike látok od toho, čo sa získa jednoduchým zovšeobecnením postupov z vákua.

$$u = \frac{1}{2} \cdot ((\varepsilon + T \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right]_\rho)E^2 + (\mu + T \left[\frac{\partial \mu}{\partial T}\right]_\rho)H^2)$$

$$T_{ij} = \frac{1}{2} \cdot ((\varepsilon - \rho \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right]_T)E^2 + (\mu - \rho \left[\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right]_T)H^2) \cdot \delta_{ij} - E_i D_j - H_i B_j$$

Príklady

1. Elektrostatická energia sústavy nábojov

(Príklad na vyjasnenie si vzťahu medzi potenciálnou energiou a energiou poľa v elektrostatike.)

a) Vzájomná potenciálna energia statickej sústavy diskrétnych nábojov je $\frac{1}{2}\sum_{ij} q_i \varphi_j(\vec{r}_i)$ (prečo jedna polovica?), kde $\varphi_j(\vec{r}_i)$ je potenciál od j-teho náboja v mieste $\vec{r}_i$. Energia elektrostatického poľa danej sústavy nábojov je $\frac{1}{2}\int \varepsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r})\ d^3r$. Je celková energia systému daná prvým výrazom (potenciálnou energiou), druhým výrazom (energiou poľa), alebo ich súčtom?

b) Pre spojité rozloženie náboja prejde vzťah pre potenciálnu energiu nábojov na $\frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})\ d^3r$, kde φ je celkový potenciál t.j. potenciál od celkového rozloženia náboja. Ukážte, že tento výraz sa rovná výrazu pre energiu príslušného elektrostatického poľa. Premyslite si v tejto súvislosti ešte raz odpoveď na otázku a.
(Správna odpoveď na otázku a je: buď potenciálna energia nábojov alebo energia poľa – je jedno ktorá z nich, pretože sa rovnajú) – ale rozhodne nie ich súčet. Zdôvodnite prečo.)

2. Energia, hybnosť a moment hybnosti elmag poľa v niektorých bežných situáciách
(Niekoľko štandardných príkladov na precvičenie nových pojmov)
Nájdite celkovú energiu, hybnosť a moment hybnosti elmag poľa
a) stojaceho bodového náboja q
b) stojacej gule s polomerom r homogénne nabitej nábojom q
c) nekonečne dlhého vodiča s polomerom r, ktorým preteká prúd I.
V prípadoch, v ktorých dostávate nekonečné výsledky prediskutujte, čo je zdrojom týchto nekonečien.

3. Rovinná elmag vlna a jej dopad na čiernu rovinu.
(Jedna ilustrácia užitočnosti výpočtu síl a momentov síl pomocou zákonov zachovania.)
a) Pre rovinnú lineárne polarizovanú elmag vlnu $\vec{E}(\vec{r},t) = E \cdot e_x \cdot \sin(kz - \omega t)$, $\vec{B}(\vec{r},t) = B \cdot e_y \cdot \sin(kz - \omega t)$, kde e_x, e_y sú jednotkové vektory v smere osí x a y, nájdite hustoty a hustoty toku energie, hybnosti a momentu hybnosti.
b) Vlna uvažovaná v prípade a) dopadá na dokonale čiernu rovinu xy. Koľko energie pohlcuje čierna rovina na $1m^2$ za $1s$, akým tlakom pôsobí vlna na túto rovinu a akým momentom sily vlna rovinu roztáča.
c) To isté čo vyššie pre kruhovo polarizovanú vlnu $\vec{E}(\vec{r},t) = E \cdot e_x \cdot \sin(kz - \omega t) + E \cdot e_y \cdot \cos(kz - \omega t)$, $\vec{B}(\vec{r},t) = B \cdot e_y \cdot \sin(kz - \omega t) - B \cdot e_x \cdot \cos(kz - \omega t)$.

4. Ďalšie nepovinné príklady na využitie zákonov zachovania.
(Niekoľko príkladov, ktoré sa dajú riešiť aj pomocou zákonov zachovania aj inak, výsledky sa potom dajú porovnať a celé to môže byť pomerne užitočné cvičenie.)
a) Pre nekonečný valcový vodič s prúdom I vypočítajte tok energie povrchom vodiča a výsledok porovnajte s výrazom pre Jouleov výkon $U \cdot I$.
b) Vypočítajte silu, ktorou sa odpudzujú dve polovice homogénne nabitej gule raz priamo pomocou Coulombovho zákona a raz pomocou tenzora toku hybnosti.
c) To isté čo v predchádzajúcom prípade, tentoraz pre homogénne nabitý nekonečný valec (myslia sa polovice, ktoré vzniknú rezom rovinou obsahujúcou os valca).

5. Minkowského výrazy pre hustoty a hustoty toku energie, hybnosti a momentu hybnosti.
(Príklad na precvičenie odvodenia zákonov zachovania pre elmag pole.)
Aj keď je v látkových prostrediach užitočnejšie uvažovať pri odvodení zákonov zachovania namiesto priameho zovšeobecnenia postupu z vákua trochu rafinovanejší postup (pozri poznámku na predchádzajúcej strane) predsa len sa niekedy používajú tzv. Minkowského výrazy získané priamym zovšeobecnením. Nájdite tieto Minkowského výrazy pre lineárne anizotropné nehomogénne prostredie (bez pamäti a nelokálnosti), t.j. zopakujte postup z vákua pre takéto prostredie.

4. Elektromagnetické potenciály

Akonáhle máme sformulované základné rovnice elektrodynamiky vo vákuu a v látkach, môžeme pristúpiť k ich riešeniu. Riešenie Maxwellových rovníc je však značne komplikovaná záležitosť a ak je možné rovnice ešte pred ich riešením nejako zjednodušiť, riešenie sa tým môže podstatne uľahčiť. Veľmi významné zjednodušenie Maxwellových rovníc umožnuje zavedenie tzv. elektromagnetických potenciálov.

Matematická poznámka (niekoľko užitočných tvrdení)

Tvrdenie 1. Pre ľubovoľnú "slušnú" funkciu $f(\vec{r})$ existuje funkcia $\vec{P}(\vec{r})$ taká, že

$$f(\vec{r}) = -\operatorname{div}\vec{P}(\vec{r})$$

Dôkaz urobíme explicitným nájdením funkcie $\vec{P}(\vec{r})$, t.j. nájdením funkcií $P_x(x,y,z)$, $P_y(x,y,z)$, $P_z(x,y,z)$, pre ktoré bude platiť

$$\frac{\partial}{\partial x}P_x + \frac{\partial}{\partial y}P_y + \frac{\partial}{\partial z}P_z = -f$$

(Poznamenajme, že znamienko mínus je vo formulácii tvrdenia len z istých formálnych dôvodov a nemá nijaký hlbší význam.) Položme napr.

$$P_y \equiv 0 \qquad\qquad P_z \equiv 0$$

čím dostaneme $\frac{\partial}{\partial x}P_x(x,y,z) = -f(x,y,z)$, odkiaľ

$$P_x(x,y,z) = -\int f(x,y,z)dx$$

("Slušnosť" funkcie f je v tomto prípade daná existenciou integrálu $\int f dx$. Funkcie, pre ktoré tento integrál existuje, čo sú medziiným všetky spojité funkcie, sú "slušné" v zmysle dokazovaného tvrdenia.) Uvedené funkcie P_x, P_y, P_z spĺňajú vzťah $f = -\operatorname{div}\vec{P}$, čím dôkaz končí.

Z konštrukcie $\vec{P}(\vec{r})$ vidno, že pre dané $f(\vec{r})$ existuje viac $\vec{P}(\vec{r})$ (rovnako dobre sme totiž mohli začať s $P_x \equiv 0$, $P_y \equiv 0$ alebo $P_x \equiv 0$, $P_z \equiv 0$). Funkcií $\vec{P}(\vec{r})$ spĺňajúcich pre dané $f(\vec{r})$ rovnicu $\operatorname{div}\vec{P}(\vec{r}) = -f$ je v skutočnosti nekonečne veľa, čo ľahko nahliadneme, ak si uvedomíme, že $\operatorname{div}\operatorname{rot} \equiv 0$, z čoho vyplýva, že ak $\vec{P}(\vec{r})$ spĺňa uvažovanú rovnicu, potom pre ľubovoľnú hladkú funkciu $\vec{A}(\vec{r})$ spĺňa túto rovnicu aj funkcia

$$\vec{P}(\vec{r}) + \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r})$$

Rôzne $\vec{P}$ sa teda môžu líšiť o rotáciu ľubovoľnej hladkej funkcie. Ukážeme, že viac sa už líšiť nemôžu, t.j. že ak $\vec{P}$ a $\vec{P}\,'$ spĺňajú rovnicu pre dané f, potom ich rozdiel je rotáciou nejakej vektorovej funkcie. Ak totiž $\operatorname{div}\vec{P}(\vec{r}) = -f(\vec{r})$ a súčasne $\operatorname{div}\vec{P}\,'(\vec{r}) = -f(\vec{r})$, potom $\operatorname{div}(\vec{P}(\vec{r}) - \vec{P}\,'(\vec{r})) = 0$ a pre každú vektorovú funkciu s nulovou divergenciou existuje (podľa tvrdenia 2) taká vektorová funkcia, ktorej je pôvodná funkcia rotáciou.

<u>*Tvrdenie 2.*</u> Nech div $\vec{B}(\vec{r}) = 0$. Potom existuje $\vec{A}(\vec{r})$ také, že

$$\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r})$$

Dôkaz urobíme znovu explicitným nájdením $\vec{A}(\vec{r})$, t.j. nájdením funkcií $A_x(x, y, z)$, $A_y(x, y, z)$, $A_z(x, y, z)$, pre ktoré bude platiť

$$\frac{\partial}{\partial y} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_y = B_x \qquad \frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_z = B_y \qquad \frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x = B_z$$

Položme napr.

$$A_z \equiv 0$$

čím dostaneme $-\frac{\partial}{\partial z} A_y(x, y, z) = B_x$, $\frac{\partial}{\partial z} A_x(x, y, z) = B_y$, a odtiaľ ďalej

$$A_y(x, y, z) = -\int B_x(x, y, z) dz \qquad A_x(x, y, z) = \int B_y(x, y, z) dz$$

Ostáva ešte ukázať, že tieto funkcie spĺňajú aj tretiu rovnicu $\frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x = B_z$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x = -\frac{\partial}{\partial x} \int B_x dz - \frac{\partial}{\partial y} \int B_y dz &= -\int \left(\frac{\partial}{\partial x} B_x + \frac{\partial}{\partial y} B_y \right) dz \\ &= \int \frac{\partial}{\partial z} B_z dz = B_z \end{aligned}$$

kde sme predpokladali spojitosť funkcií A_i, B_i (aby sme mohli meniť poradie derivácií a integrálov) a využili sme predpoklad div $\vec{B} = \frac{\partial}{\partial x} B_x + \frac{\partial}{\partial y} B_y + \frac{\partial}{\partial z} B_z = 0$. Uvedené funkcie A_x, A_y, A_z teda spĺňajú vzťah $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$, čím dôkaz končí.

POZNÁMKA. V skutočnosti dôkaz ešte celkom nekončí, pretože zatiaľ je v ňom drobný podvod – nepísali sme správne integračné konštanty. Správne má byť napr. $\int \frac{\partial}{\partial z} B_z dz = B_z + c(x, y)$ (c je konštanta vzhľadom k premennej z, t.j. môže ľubovne zavisieť od premenných x, y). Premyslite si, že vhodným výberom integračných konštánt v integráloch definujúcich A_x a A_y, môžeme vždy túto "konštantu" zničiť, t.j. dosiahnuť aby $c(x, y) = 0$

Z konštrukcie $\vec{A}(\vec{r})$ vidno, že pre dané $\vec{B}(\vec{r})$ existuje viac $\vec{A}(\vec{r})$ (rovnako dobre sme totiž mohli začať s $A_x \equiv 0$ alebo $A_y \equiv 0$). Funkcií $\vec{A}(\vec{r})$ spĺňajúcich pre dané $\vec{B}(\vec{r})$ rovnicu rot $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{B}$ je v skutočnosti nekonečne veľa, čo ľahko nahliadneme, ak si uvedomíme, že rot grad $\equiv 0$, z čoho vyplýva, že ak $\vec{A}(\vec{r})$ spĺňa túto rovnicu, potom pre ľubovoľnú hladkú funkciu $\Lambda(\vec{r})$ spĺňa túto rovnicu aj funkcia

$$\vec{A}(\vec{r}) + \operatorname{grad} \Lambda(\vec{r})$$

Rôzne $\vec{A}$ sa teda môžu líšiť o gradient ľubovoľnej hladkej funkcie. Ukážeme, že viac sa už líšiť nemôžu, t.j. že ak $\vec{A}$ a $\vec{A}'$ spĺňajú rovnicu pre dané $\vec{B}$, potom ich rozdiel je gradientom nejakej funkcie. Ak totiž rot $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{B}$ a súčasne rot $\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{B}$, potom $\operatorname{rot}(\vec{A}(\vec{r}) - \vec{A}'(\vec{r})) = 0$ a pre každú vektorovú funkciu s nulovou rotáciou existuje (podľa tvrdenia 3) taká funkcia, ktorej je pôvodná funkcia gradientom.

<u>*Tvrdenie 3.*</u> Nech $\operatorname{rot}\vec{F}(\vec{r}) = 0$. Potom existuje $U(\vec{r})$ také, že

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\operatorname{grad} U(\vec{r})$$

Dôkaz nebudeme robiť podrobne, odvoláme sa na veci známe z mechaniky. Pre konzervatívne silové pole $\vec{F}(\vec{r})$ je možné korektne definovať potenciálnu energiu

$$U(\vec{r}) = U_0 - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

pre ktorú platí $\vec{F} = -\operatorname{grad} U$. Pole je konzervatívne práve vtedy, keď pre každú uzavretú krivku platí $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$. Ak pre nejaké pole $\vec{F}(\vec{r})$ v každom bode platí $\operatorname{rot}\vec{F}(\vec{r}) = 0$, potom podľa Stokesovej vety platí pre každú uzavretú krivku $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \operatorname{rot}\vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$, t.j. pole je konzervatívne.

Poznámka. Z konštrukcie U vidno, že pre dané $\vec{F}$ existuje viac rôznych U, pretože konštantu U_0 môžeme vybrať ľubovoľne. Rôzne U sa teda môžu líšiť o konštantu a viac sa už líšiť nemôžu, pretože ak $\vec{F}(\vec{r}) = -\operatorname{grad} U(\vec{r})$ a $\vec{F}(\vec{r}) = -\operatorname{grad} U'(\vec{r})$, potom $\operatorname{grad}(U - U') = 0$ a jediná funkcia s nulovým gradientom je konštantná funkcia.

4.1. Skalárny a vektorový potenciál.

Z Maxwellovej rovnice $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ a z tvrdenia 2 matematickej poznámky vyplýva existencia funkcie $\vec{A}(\vec{r}, t)$ takej, že

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r})}$$

Z Maxwellovej rovnice $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ upravenej na tvar $\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{rot}(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}) = 0$ a z tvrdenia 3 matematickej poznámky vyplýva existencia funkcie $\varphi(\vec{r}, t)$ takej, že $\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\varphi$ resp.

$$\boxed{\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}}$$

Funkcia $\vec{A}(\vec{r}, t)$ sa nazýva vektorový elektromagnetický potenciál, funkcia $\varphi(\vec{r}, t)$ skalárny elektromagnetický potenciál.

Skalárny a vektorový potenciál sú určené hustotami elektrického náboja a prúdu prostredníctvom rovníc, ktoré dostaneme zo zvyšných dvoch Maxwellových rovníc dosadením vyjadrenia elmag polí cez elmag potenciály. V principiálne najdôležitejšom prípade vákua a v prakticky bežnom prípade homogénnej izotropnej látky (ktoré sú formálne zhodné) vyzerajú tieto rovnice nasledovne

$$\operatorname{div}[\varepsilon(-\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A})] = \rho$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \mu\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}[\mu\varepsilon(-\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A})]$$

Odkiaľ dostávame ($\operatorname{div}\operatorname{grad} = \triangle$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot} = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \triangle$)

$$\triangle\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\triangle\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} - \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\varphi) = -\mu\cdot\vec{j}$$

Prvou výhodou týchto rovníc v porovnaní s pôvodnými Maxwellovými rovnicami je nižší počet rovníc (dve namiesto štyroch) a nižší počet neznámych funkcií. Kým v pôvodných rovniciach vystupuje 6 neznámych funkcií (dve vektorové funkcie $\vec{E}$ a $\vec{B}$), v nových rovniciach sú to len 4 neznáme funkcie (jedna vektorová $\vec{A}$ a jedna skalárna φ). Ak nájdeme pre dané hustoty náboja a prúdu tieto 4 funkcie, získame z nich polia $\vec{E}$ a $\vec{B}$ jednoduchým derivovaním z definičných vzťahov.

Druhou výhodou nových rovníc je možnosť ich ďalšieho formálneho zjednodušenia tzv. kalibračnými transformáciami.

4.2. Kalibračné transformácie.

Elmag potenciály $\vec{A}$, φ totiž nie sú určené elmag poliami $\vec{E}$, $\vec{B}$ jednoznačne. Ako vyplýva zo spomínanej matematickej poznámky, rôzne $\vec{A}$ prislúchajúce tomu istému $\vec{B}$ sa môžu líšiť o gradient ľubovoľnej funkcie. To znamená, že od daného $\vec{A}(\vec{r},t)$ možno prejsť k novému vektorovému potenciálu transformáciou

$$\boxed{\vec{A} \longrightarrow \vec{A} + \operatorname{grad}\Lambda}$$

kde $\Lambda(\vec{r},t)$ je ľubovoľná hladká funkcia. Takáto transformácia nezmení magnetické pole, ale ak funkcia Λ závisí od času (čo vo všeobecnosti závisí), zmení sa elektrické pole $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} - \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\Lambda$. Ak však súčasne s transformáciou vektorového potenciálu transformujeme aj skalárny potenciál a to nasledovne

$$\boxed{\varphi \longrightarrow \varphi - \tfrac{\partial}{\partial t}\Lambda}$$

potom sa nezmení ani magnetické ani elektrické pole.

Uvedená transformácia elmag potenciálov (oboch súčasne!) sa nazýva (z istých historických dôvodov) *kalibračná transformácia*. Pre každú dvojicu elmag polí $\vec{E}$, $\vec{B}$ máme teda nekonečne veľa dvojíc elmag potenciálov φ, $\vec{A}$, viazaných navzájom kalibračnými transformáciami s rôznymi funkciami Λ. Konkrétnemu výberu potenciálov φ, $\vec{A}$ sa zvykne hovoriť "fixovanie kalibrácie "a tento konkrétny výber je možné urobiť tak, aby sa nám zjednodušili rovnice pre elmag potenciály.

Jedným z veľmi užitočných spôsobov výberu kalibrácie elmag potenciálov je tzv. Lorenzova kalibrácia t.j. taký výber φ, $\vec{A}$, aby platila

$$\operatorname{div}\vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\varphi = 0$$

Ukážme si najprv, že pre ľubovoľné polia $\vec{E}$, $\vec{B}$ sa naozaj dajú vybrať elmag potenciály spĺňajúce Lorenzovu kalibračnú podmienku. Uvažujme ľubovoľnú dvojicu

φ, $\vec{A}$ prislúchajúcu danej dvojici $\vec{E}$, $\vec{B}$, pričom φ, $\vec{A}$ nemusia spĺňať Lorenzovu kalibračnú podmienku. Teraz tieto potenciály kalibračne transformujme a od transformovaných potenciálov požadujme splnenie Lorenzovej kalibračnej podmienky t.j. požadujme aby

$$\operatorname{div}(\vec{A} + \operatorname{grad}\Lambda) + \varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}(\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda) = 0$$

t.j.

$$\triangle\Lambda - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Lambda = -\operatorname{div}\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\varphi$$

Otázka je, či existuje funkcia Λ spĺňajúca poslednú rovnicu. Odpoveď je kladná, pretože sa jedná o vlnovú rovnicu (s nenulovou pravou stranou), ktorá má nekonečne veľa riešení. Od ľubovoľnej dvojice elmag potenciálov sa teda dá prejsť vhodnou kalibračnou transformáciou k dvojici spĺňajúcej Lorenzovu kalibračnú podmienku.

A teraz načo je to dobré. Ak využijeme Lorenzovu kalibračnú podmienku v rovniciach pre elmag potenciály dostaneme

$$\triangle\varphi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$
$$\triangle\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\mu\cdot\vec{j}$$

Tieto rovnice majú tri veľmi príjemné vlastnosti. Po prvé sú to dekuplované rovnice pre φ a $\vec{A}$, t.j. na rozdiel od všeobecných rovníc pre elmag potenciály máme nezávislé rovnice pre φ a $\vec{A}$. Po druhé máme rovnakú rovnicu pre φ a pre $\vec{A}$ t.j. ak sa naučíme riešiť rovnicu pre φ, vieme automaticky riešiť aj rovnicu pre $\vec{A}$. A po tretie sa jedná o vlnovú rovnicu, takže všetko čo vieme o vlnovej rovnici nám tu bude užitočné, a všetko nové, čo sa tu naučíme, bude užitočné všade, kde sa stretneme s vlnovou rovnicou. (Nové veci sa však o vlnovej rovnici nebudeme učiť teraz, ale až v tretej kapitole.)

Iným užitočným výberom kalibrácie elmag potenciálov je tzv. Coulombova kalibrácia t.j. taký výber φ, $\vec{A}$, aby platila

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0$$

Znova si najprv ukážme, že pre ľubovoľné polia $\vec{E}$, $\vec{B}$ sa naozaj dajú vybrať elmag potenciály spĺňajúce Coulombovu kalibračnú podmienku. Uvažujme znovu ľubovoľnú dvojicu φ, $\vec{A}$ prislúchajúcu danej dvojici $\vec{E}$, $\vec{B}$, pričom φ, $\vec{A}$ nemusia spĺňať Coulombovu kalibračnú podmienku a tieto potenciály kalibračne transformujme, pričom od transformovaných potenciálov požadujme splnenie Coulombovej kalibračnej podmienky t.j. požadujme aby

$$\operatorname{div}(\vec{A} + \operatorname{grad}\Lambda) = 0$$

t.j.

$$\triangle\Lambda = -\operatorname{div}\vec{A}$$

Otázka je, či existuje funkcia Λ spĺňajúca poslednú rovnicu. Odpoveď je kladná, pretože sa jedná o tzv. Poissonovu rovnicu, ktorá má nekonečne veľa riešení. Od ľubovoľnej dvojice elmag potenciálov sa teda dá prejsť vhodnou kalibračnou transformáciou k dvojici spĺňajúcej Coulombovu kalibračnú podmienku.

Ak teraz využijeme Coulombovu kalibračnú podmienku v rovniciach pre potenciály dostaneme

$$\triangle\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$
$$\triangle\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\mu\cdot\vec{j} + \varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi$$

Tieto rovnice nie sú dekuplované, pretože v rovnici pre $\vec{A}$ vystupuje φ, ale rovnica pre φ je nezávislá od $\vec{A}$, takže najprv môžeme vyriešiť rovnicu pre φ a potom toto riešenie dosadiť do rovnice pre $\vec{A}$. Na rozdiel od všeobecných rovníc pre elmag potenciály môžeme teda riešiť tieto rovnice nie súčasne, ale jednu po druhej. Rovnica pre φ je Poissonova rovnica, ktorá v sebe zahŕňa celú elektrostatiku vrátane Coulombovho zákona – odtiaľ názov kalibrácie. Všetko, čo sa o Poissonovej rovnici naučíme v elektrostatike (ktorej bude venovaná celá druhá kapitola) bude teda užitočné aj v elektrodynamike, pokiaľ budeme pracovať v Coulombovej kalibrácii. Rovnica pre $\vec{A}$ je znova vlnová rovnica, ktorej bude venovaná tretia kapitola.

Prečo skalárny a vektorový potenciál

Na záver si položme otázku, či sa naozaj oplatí zavádzať nové pojmy ako elmag potenciály a kalibračné transformácie, či by sme nevystačili v teórii elmag poľa s elmag poliami. Odpoveď je taká, že v mnohom by sme naozaj vystačili bez týchto nových pojmov, ale inde (napr. pri vyšetrovaní elmag žiarenia) sú elmag potenciály veľmi užitočné a bez nich by sme sa natrápili oveľa viac ako s nimi. Okrem toho sa elmag potenciály ukazujú byť vhodnejšími než elmag polia v mnohých ďalších oblastiach fyziky. Uveďme si aspoň niekoľko príkladov:

V teórii relativity tvoria elmag potenciály tzv. štvorvektor, zatiaľ čo elmag polia tzv. štvortenzor. Manipulácia s elmag potenciálmi je teda v teórii relativity v porovnaní s elmag poliami jednoduchšia asi natoľko, nakoľko je vo všeobecnosti jednoduchšia manipulácia s vektormi v porovnaní s tenzormi.

Kvantová mechanika častice v elmag poli je opísaná Schrödingerovou rovnicou, v ktorej vystupujú elmag potenciály a nie elmag polia. Nahradenie elmag potenciálov elmag poliami by tu bolo značne komplikované a neprirodzené.

Kvantová teória samotného elmag poľa, tzv. kvantová elektrodynamika, je založená na tzv. kvantovaní klasickej teórie. K tomuto kvantovaniu je potrebné mať sformulovanú klasickú elektrodynamiku v lagrangeovskom alebo hamiltonovskom formalizme (analógy týchto formulácií pre mechanické systémy poznáme z teoretickej mechaniky). Pre oba tieto formalizmy sú elmag potenciály oveľa vhodnejšie a prirodzenejšie ako elmag polia.

Skôr či neskôr sa teda človek vo fyzike s elmag potenciálmi určite stretne a preto nemá zmysel toto stretnutie odkladať.

Príklady

1. Určenie elmag polí z elmag potenciálov
(Ilustrácia toho, že jednoduchým poliam môžu prislúchať na prvý pohľad zložité potenciály.)
Je elmag pole určené nasledovnými elmag potenciálmi elektrostatické, magnetostatické, časovo premenné elektrické, časovo premenné magnetické alebo iné?
a) $\varphi(\vec{r},t) = 0$ $\quad\vec{A}(\vec{r},t) = \alpha\frac{\vec{r}}{r^3}$
b) $\varphi(\vec{r},t) = -\alpha\frac{1}{r}e^{-\lambda t}$ $\quad\vec{A}(\vec{r},t) = \alpha\frac{\vec{r}}{r^3}\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}$
c) $\varphi(\vec{r},t) = -\alpha\frac{1}{r}\sin^2(\omega t)$ $\quad\vec{A}(\vec{r},t) = \alpha\frac{\vec{r}}{r^3}\left(1+\frac{1}{4\omega}\sin(2\omega t)\right)$

2. Určenie elmag potenciálov z elmag polí
(Niekoľko jednoduchých príkladov, ktoré sa riešia buď uhádnutím alebo systematickým postupom podľa dôkazov tvrdení z matematickej poznámky, vrátane poznámky pod čiarou v dôkaze tvrdenia 2)
Nájdite elmag potenciály
a) pre homogénne elektrostatické pole tak, aby $\varphi = 0$ resp. $\vec{A} = 0$
b) pre homogénne magnetostatické pole tak, aby $\varphi = 0$ resp. $\vec{A} = 0$
c) pre magnetostatické pole $\vec{B} = (xy, -\frac{1}{2}y^2, x^2+y^2)$
d) pre pole nekonečne dlhého vodiča, ktorým preteká prúd I.

3. Kalibračné transformácie
(Elementárne príklady na precvičenie nových pojmov.)
a)Potenciály $\varphi(\vec{r},t) = r\cdot\sin^2\omega t$, $\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{r}\cdot\cos^2\omega t$ prejdú po kalibračnej transformácii na $\varphi'(\vec{r},t)$, $\vec{A}'(\vec{r},t)$. Určte $\varphi'(\vec{r},t)$ ak $\vec{A}'(\vec{r},t) = \vec{r}$.
b) Pre elmag potenciály $\varphi(\vec{r},t) = r\cdot t$, $\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{r}\cdot t$ nájdite kalibračnú transformáciu, po ktorej sa φ zmení na dvojnásobné a kalibračnú transformáciu, po ktorej sa $\vec{E}$ zmení na dvojnásobné.
c) Zistite, ktoré z elmag potenciálov uvažovaných v tomto príklade spĺňajú Lorenzovu a ktoré Coulombovu kalibračnú podmienku.

2

POISSONOVA A LAPLACEOVA ROVNICA (ELEKTROSTATIKA)

V tejto kapitole začneme s dešifrovaním informácie obsiahnutej v Maxwellových rovniciach, t.j. začneme sa zaoberať riešením týchto rovníc v rôznych situáciách. Najprv sa prirodzene pozrieme na situáciu najjednoduchšiu — na elektrostatiku. Pojmy, ktoré si zavedieme pri vyšetrovaní tejto jednoduchej situácie, sa neskôr ukážu byť značne užitočné aj v situáciách zložitejších a svojim významom ďaleko presahujú nielen elektrostatiku, ale aj celú elektrodynamiku. Ide totiž o základné nástroje na riešenie lineárnych parciálnych diferenciálnych rovníc, a tie tvoria prirodzený jazyk veľmi širokých oblastí fyziky.[1]

1. Poissonova rovnica a jednoznačnosť jej riešenia

Začnime tým, že si elektrostatické úlohy rozdelíme na veľmi ľahké a ťažšie. Pod veľmi ľahkými budeme rozumieť úlohy, v ktorých je zadané nejaké rozloženie náboja vo vákuu alebo homogénnom izotropnom dielektriku a má sa nájsť elektrické pole prislúchajúce tomuto rozloženiu náboja. Veľmi ľahké sú tieto úlohy preto, lebo ich riešenie vieme napísať okamžite, a to pomocou Coulombovho zákona a princípu superpozície

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int \rho(\vec{r}\,')\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}d^3r'$$

Pod ťažšími úlohami budeme rozumieť úlohy ostatné. Sem patria napr. úlohy v ktorých nie je celý priestor vyplnený vákuom alebo jedným homogénnym izotropným dielektrikom, ale v ktorom sú rôzne časti priestoru vyplnené rôznymi dielektrikami (vo všeobecnosti úlohy v nehomogénnom prostredí). Okrem toho sem patria úlohy, v ktorých je okrem rozloženia nábojov zadané aj rozloženie nejakých vodičov, pričom je daný aj celkový náboj každého vodiča alebo potenciál, na ktorom je tento vodič držaný.[2]

---

[1]Úprimne povedané, elektrostatika asi patrí k najmenej vzrušujúcim aplikáciám teórie lineárnych diferenciálnych rovníc. Ale na druhej strane je zo všetkých fyzikálnych aplikácií asi najjednoduchšia.

Elektrostatikou sa teda budeme zaoberať pomerne podrobne ani nie tak pre ňu samotnú, skôr ju budeme chápať ako ideálne ihrisko na naučenie sa množstva užitočných vecí.

[2]Ak je vodič vodivo spojený s iným, oveľa väčším vodičom, ktorého potenciál je φ, potom hovoríme, že pôvodný vodič je držaný na potenciále φ. Napríklad o uzemnenom vodiči, t.j. o vodiči vodivo spojenom so zemou, hovoríme, že je držaný na potenciále zeme (ktorý obvykle definujeme ako nulový).

Problém s ťažšími úlohami je v tom, že okrem nábojov, ktorých rozloženie je zadané, vzniká v kovoch a dielektrikách ďalšie rozloženie náboja, ktoré dopredu známe nie je. Tým pádom sa stávajú Coulombov zákon a princíp superpozície oveľa menej užitočnými (napriek tomu, že stále zostávajú v platnosti) pretože nepoznáme všetky hustoty náboja, ktoré treba do nich dosadiť. Pri riešení týchto úloh je preto oveľa výhodnejšie štartovať z niečoho iného ako z Coulombovho zákona, a síce z Maxwellových rovníc pre elektrické polia v statickom prípade

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \qquad\qquad \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$$

kde $\vec{D}$, $\vec{E}$ aj ρ sú funkcie polohového vektora $\vec{r}$, ale nie funkcie času t, pretože v statickom prípade sú všetky veličiny od času nezávislé (toto je tiež dôvod nulovosti pravej strany druhej rovnice, vo všeobecnosti tam patrí $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, čo je ovšem v statickom prípade nula).

V prípade látkového prostredia musia byť uvedené dve rovnice ešte doplnené vzťahom $\vec{D}(\vec{E})$, ktorý špecifikuje vlastnosti prostredia. Tým sa dostávame k ďalšiemu, podrobnejšiemu, deleniu elektrostatických úloh a síce k deleniu ťažších úloh na úlohy, ktorými sa budeme zaoberať a na úlohy, ktorými sa zaoberať nebudeme. Do prvej kategórie patria úlohy s najjednoduchším vzťahom medzi $\vec{D}$ a $\vec{E}$

$$\vec{D}(\vec{E}) = \epsilon \vec{E}$$

t.j. úlohy v homogénnom izotropnom dielektriku (v ktorom je zadané rozloženie nábojov a vodičov). K úlohám, ktorými sa zaoberať nebudeme, poznamenajme aspoň toľko, že sú to až na malé výnimky úlohy naozaj ťažké, ktoré sa buď riešia niektorými nie práve najjednoduchšími metódami matematickej fyziky, alebo (a to býva častejšie) rôznymi približnými a numerickými metódami. Dôvody, pre ktoré sa týmito úlohami nebudeme zaoberať, teda nespočívajú v ich menšej dôležitosti, ale v ich zložitosti, presahujúcej úroveň základnej prednášky.

Úlohou elektrostatiky je nájsť pre dané $\rho(\vec{r})$ vektorovú funkciu $\vec{E}(\vec{r})$ vyhovujúcu uvedeným rovniciam. Nájsť vektorovú funkciu $\vec{E}(\vec{r})$ znamená nájsť tri funkcie $E_x(x, y, z)$, $E_y(x, y, z)$ a $E_z(x, y, z)$. Maxwellova rovnica $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ nám umožňuje zredukovať počet neznámych funkcií z troch na jednu. Ak je totiž rotácia nejakej vektorovej funkcie nulová, potom existuje skalárna funkcia taká, že daná vektorová funkcia je gradientom tejto skalárnej funkcie (tvrdenie 3 z matematickej poznámky z paragrafu 1.4). V prípade funkcie $\vec{E}(\vec{r})$ je zvykom označovať túto skalárnu funkciu $-\varphi(\vec{r})$ (pričom znamienko mínus nemá nijaký hlboký význam, je to jednoducho súčasť štandardnej konvencie), a nazývať ju potenciálom. Máme teda

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\operatorname{grad} \varphi(\vec{r})$$

a ak toto dosadíme do rovnice pre $\operatorname{div} \vec{D}$ t.j. pre $\operatorname{div} \epsilon \vec{E}$, dostaneme

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

čiže

$$\boxed{\triangle \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}}$$

kde $\triangle$ je tzv. Laplaceov operátor (domácke meno laplacián) $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Rovnica $\triangle\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$ sa volá Poissonova rovnica a bude základom celého nášho vyšetrovania elektrostatiky, čo znamená, že k ťažším úlohám elektrostatiky, ktorými sa budeme zaoberať, budeme pristupovať tak, že riešením Poissonovej rovnice nájdeme φ a z neho potom $\vec{E}$. Okrem redukcie počtu neznámych funkcií má Poissonova rovnica oproti pôvodným rovniciam tú výhodu, že sa pre ňu veľmi prirodzene formulujú úlohy s vodičmi držanými na určitých potenciáloch — jednoducho sa požaduje aby tam, kde sú umiestnené dané vodiče, mal potenciál φ dopredu zadanú hodnotu.[3]

Pri každej diferenciálnej rovnici, s ktorou sa vo fyzike stretneme, je dobré dopredu si vyjasniť otázky existencie a jednoznačnosti jej riešenia. Dôvody pre to sú jednak takpovediac hlboké a jednak celkom pragmatické. K tým hlbším patria napr. otázky korektnosti opisu daného fyzikálneho javu uvažovanou rovnicou. Ak z experimentov vieme, že za istých okolností je nejaká fyzikálna veličina určená jednoznačne, potom by rovnica pre túto veličinu mala mať za týchto okolností jednoznačné riešenie. Ak tomu tak nie je, potom je opis danej fyzikálnej situácie uvažovanou rovnicou zrejme nekorektný (niečo z tejto situácie nie je v rovnici postihnuté, hoci niečo iné v nej môže byť postihnuté veľmi dobre). Z pragmatických dôvodov spomeňme aspoň možnosť povýšenia hádania na veľmi užitočnú metódu riešenia rovnice. Ak totiž vieme dopredu, že za daných okolností má rovnica jediné riešenie, potom nech ho nájdeme akýmkoľvek spôsobom (a v mnohých spôsoboch hrá uhádnutie podstatnú úlohu), tak vieme, že sme našli všetko, čo sa dalo, že nijaké iné riešenia už neexistujú.

Dôkaz existencie riešenia Poissonovej rovnice nebudeme vo všeobecnosti robiť, v tých konkrétnych prípadoch, ktorými sa budeme zaoberať, dokážeme existenciu riešenia vždy tým, že ho explicitne nájdeme. Dôkaz jednoznačnosti urobíme v dvoch dôležitých prípadoch. (Podrobnejšie štúdium týchto otázok je predmetom špeciálnej prednášky z matematickej fyziky venovanej parciálnym diferenciálnym rovniciam.)

Prvým prípadom, v ktorom dokážeme jednoznačnosť riešenia Poissonovej rovnice, bude prípad úloh s vodičmi držanými na určitých potenciáloch. Vo vodičoch je v statickom prípade elektrické pole nulové, čo vyplýva z Ohmovho zákona $\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$ a z toho, že pod statickými prípadmi rozumieme prípady s nulovou hustotou prúdu. Takže potenciál v každom vodiči je konštantný a dopredu zadaný, t.j. vo vnútri vodičov je všetko jasné. Pre potenciál v oblasti mimo vodičov máme k dispozícii Poissonovu rovnicu a dopredu zadané hodnoty potenciálu na hranici tejto oblasti (táto hranica je totiž tvorená práve povrchom vodičov).

Teraz trochu matematickej terminológie. Ak máme riešiť nejakú parciálnu diferenciálnu rovnicu v určitej oblasti a máme pritom zadané, ako sa má riešenie chovať na hranici tejto oblasti, hovoríme, že sú zadané okrajové podmienky pre

[3]Poznamenajme, že Poissonova rovnica hrá dôležitú úlohu nielen v elektrostatike, ale aj v iných oblastiach fyziky. Napr. vedenie tepla alebo difúzia sú opísané rovnicou $\frac{\partial}{\partial t} f - a.\triangle f = \rho$, kde f je v prípade vedenia tepla teplota a v prípade difúzie koncentrácia difundujúcej látky. V mnohých prípadoch je dôležité poznať tzv. stacionárny režim vedenia tepla resp. difúzie, t.j. také rozdelenie teploty resp. koncentrácie, ktoré sa s časom nemení. Pre časovo nemenné funkcie je ovšem parciálna derivácia podľa času nulová a rovnica vedenia tepla či difúzie prechádza na Poissonovu rovnicu. Hľadanie stacionárnych režimov vedenia tepla a difúzie teda vedie na riešenie Poissonovej rovnice. Podobne vedie na Poissonovu rovnicu hľadanie stacionárnych riešení vlnovej rovnice $a.\triangle f + \frac{\partial^2}{\partial t^2} f = \rho$.

túto rovnicu. Okrajové podmienky, ktoré priamo hovoria, aké hodnoty má riešenie na hranici nadobúdať, sa nazývajú *Dirichletove okrajové podmienky.* Úloha riešiť danú diferenciálnu rovnicu s Dirichletovými okrajovými podmienkami sa nazýva Dirichletovou úlohou pre túto rovnicu. Dirichletove okrajové podmienky pre funkciu φ špecifikované funkciou f zadanou na ploche S zapisujeme obvykle ako

$$\varphi(\vec{r})|_S = f(\vec{r})$$

Veta o jednoznačnosti riešenia Dirichletovej úlohy pre Poissonovu rovnicu

> Dirichletova úloha pre Poissonovu rovnicu v oblasti ohraničenej <u>uzavretou</u> plochou S má najviac jedno riešenie, t.j. ak riešenie existuje, tak je jednoznačné.

Dôkaz je založený na tzv. Greenovej identite

$$\int_V (\varphi\triangle\psi + \nabla\varphi\cdot\nabla\psi)dV = \oint_S \varphi\partial_n\psi dS$$

ktorú dostaneme z Gaussovej vety $\int_V \nabla\cdot\vec{u}\,dV = \oint_S \vec{u}\cdot d\vec{S}$, ak položíme $\vec{u} = \varphi\nabla\psi$ a využijeme $\vec{n}\cdot\nabla\psi = \frac{\partial}{\partial n}\psi \equiv \partial_n\psi$, čo je derivácia v smere kolmom na plochu S (v danom bode).

Nech teda φ_1 a φ_2 sú dve riešenia uvažovanej Dirichletovej úlohy. Ich rozdiel $\phi = \varphi_1 - \varphi_2$ spĺňa v oblasti ohraničenej plochou S rovnicu $\triangle\phi = 0$ ($\triangle\phi = \triangle\varphi_1 - \triangle\varphi_2 = -\frac{\rho}{\epsilon} + \frac{\rho}{\epsilon} = 0$) a na hranici S má ϕ nulovú hodnotu ($\phi|_S = \varphi_1|_S - \varphi_2|_S = f - f = 0$). Z Greenovej identity pre $\varphi = \psi = \phi$ dostaneme

$$\int_V (\phi\triangle\phi + \nabla\phi\cdot\nabla\phi)dV = \oint_S \phi\partial_n\phi dS$$

odkiaľ vzhľadom na nulovosť $\triangle\phi$ v oblasti a ϕ na hranici dostávame

$$\int_V |\nabla\phi|^2 dV = 0$$

Ak je integrál z nezápornej funkcie cez nejakú oblasť nulový, musí byť táto funkcia v danej oblasti všade nulová. To znamená $|\nabla\phi|^2 = 0$, čiže $\nabla\phi = \vec{0}$. To ale znamená, že $\phi = \text{const}$, a keďže na hranici $\phi = 0$, tak táto konštanta musí byť nulová, t.j. $\phi = 0$ všade, a teda $\varphi_1 = \varphi_2$.

Všimnime si, že podstatnú úlohu v dôkaze hrala skutočnosť, že integrál $\oint_S \phi\frac{\partial\phi}{\partial n}dS$ bol nulový vďaka nulovosti funkcie ϕ na hranici S. Rovnako nulový je tento integrál pre nenulové ϕ a nulové $\frac{\partial\phi}{\partial n}$. To ale znamená (premyslite si to), že celý dôkaz môžeme prakticky bez zmeny zopakovať aj v prípade, že nie je zadaná hodnota funkcie φ na hranici, ale je zadaná hodnota jej normálovej derivácie $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ na tejto hranici. Jediný rozdiel bude na konci dôkazu, kde môžeme konštatovať konštantnosť funkcie ϕ v celej oblasti, ale nie jej nulovosť. Potenciál φ teda nie je v takomto prípade určený jednoznačne, rôzne riešenia sa však nemôžu líšiť viac ako o konštantu a elektrické pole určené takýmito potenciálmi je jednoznačné.

Okrajové podmienky, ktoré hovoria aké hodnoty má nadobúdať na hranici normálová derivácia riešenia, sa nazývajú *Neumannove okrajové podmienky* a obvykle ich zapisujeme ako

$$\left.\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial n}\right|_S = g(\vec{r})$$

Úloha riešiť Poissonovu rovnicu s Neumannovými okrajovými podmienkami sa nazýva Neumannova úloha pre Poissonovu rovnicu. Dôkaz jednoznačnosti riešenia Dirichletovej úlohy bol teda dôkazom aj nasledovnej vety:

Veta o jednoznačnosti riešenia Neumannovej úlohy pre Poissonovu rovnicu

> Rôzne riešenia Neumannovej úlohy pre Poissonovu rovnicu v oblasti ohraničenej uzavretou plochou S sa líšia maximálne o konštantu t.j. ak riešenie (potenciál) existuje, tak ním určené elektrické pole je jednoznačné.

Druhým prípadom, v ktorom sme dokázali jednoznačnosť riešenia Poissonovej rovnice, je teda prípad úloh, v ktorých je na hranici uvažovanej oblasti zadaná normálová derivácia potenciálu, čo nie je nič iné ako mínus normálová zložka elektrického poľa. (Z praktického hľadiska je v elektrostatike Neumannova úloha o dosť menej dôležitá ako Dirichletova úloha, ale v iných oblastiach fyziky, v ktorých sa vyskytuje Poissonova rovnica, už to tak byť nemusí, a keďže sme dôkaz mali úplne zadarmo, bola by škoda neuviesť si k nemu vetu.)

POZNÁMKA. (O priestoroch ohraničených uzavretými plochami). Pod priestorom ohraničeným uzavretou plochou si človek najskôr predstaví vnútro nejakého uzavretého vreca. Je asi dobré explicitne si uvedomiť, že za uzavretú plochu (jednu) je možné považovať aj dve oddelené vrecia. Takéto oddelené vrecia totiž môžeme dostať z jedného vreca "delením *à* la delenie buniek", t.j. dve vrecia možno považovať za limitný prípad jedného vreca typu činka, v limite v ktorej hrúbka spájajúcej časti ide do nuly. Plocha tvorená dvoma oddelenými vrecami je síce nesúvislá, ale v zmysle vyššie uvedených viet je to plocha úplne plnohodnotná a tieto vety pre ňu platia.

Analogicky možno za uzavretú plochu považovať dve vrecia jedno v druhom a za priestor ohraničený touto plochou považovať vnútro väčšieho a vonkajšok menšieho z nich (nakreslite si proces "delenia vreca" vedúceho k takejto konfigurácii). Zaujímavú vec dostaneme, ak teraz pošleme vonkajšie vrece do nekonečna. V takomto prípade možno za priestor ohraničený uzavretou plochou považovať vonkajšok vreca, čo je asi na prvý pohľad prekvapujúce. Treba si však uvedomiť, že ak časť uvažovanej uzavretej plochy leží v nekonečne, potom integrály vystupujúce v dôkaze vety sú nevlastné integrály a dôkaz je korektný len v prípade, že tieto integrály sú konvergentné. Na zaručenie konvergencie týchto integrálov však stačí požadovať, aby potenciál klesal v nekonečne dostatočne rýchlo.

Všetky úvahy, ktoré sa tu týkali dvoch vriec, možno samozrejme urobiť pre ľubovoľný počet navzájom oddelených vriec.

Niekoľko fyzikálnych dôsledkov vety o jednoznačnosti

Veta o jednoznačnosti riešenia Dirichletovej úlohy pre Poissonovu rovnicu bude pre nás veľmi užitočná z matematického hľadiska pri konkrétnych metódach riešenia Poissonovej rovnice. Tieto totiž budú (ako sme už spomínali) vždy založené čiastočne na uhádnutí, takže bez vety o jednoznačnosti by sme nikdy nevedeli, či sme pri hádaní nejaké riešenia nestratili. Veta o jednoznačnosti riešenia Dirichletovej úlohy pre Poissonovu rovnicu má však aj niekoľko ďalších dôležitých fyzikálnych dôsledkov, pri ktorých sa teraz na chvíľu pristavíme. Nepôjde o úplne nové veci, všetky sú do istej miery známe zo základného kurzu elektriny a magnetizmu. Ich súvis s práve dokázanou vetou však umožní tieto veci pochopiť o niečo lepšie a hlbšie a práve to je jedným zo zmyslov prednášky z teórie elmag poľa — okrem naučenia nových vecí, prehĺbiť porozumenie veciam starým.

Faradayova klietka

Tvrdenie: Ak v priestore ohraničenom uzavretou vodivou plochou nie sú nijaké náboje a mimo tohto priestoru je (statické) rozloženie náboja ľubovoľné, potom elektrické pole v tomto priestore je nulové. (Uzavretej vodivej ploche, ktorá takto "bráni elektrostatickému poľu preniknúť" do uvažovaného priestoru sa hovorí Faradayova klietka.)

V základnom kurze elektriny a magnetizmu sa toto tvrdenie zvykne zdôvodňovať nulovosťou krivkového integrálu elektrického poľa po uzavretej krivke, ktorá prechádza čiastočne vnútrom vodiča a čiastočne uvažovaným ohraničeným priestorom (pozri napr. Feynmanove prednášky z fyziky, kap. 5 tretieho dielu slovenského vydania). Pritom sa z nulovosti integrálu usudzuje na nulovosť podintegrálnej funkcie, čo je samozrejme vo všeobecnosti neprípustné, ale je to oprávnené ak je napríklad uvažovaný integrál nulový pre ľubovoľnú krivku. V našom prípade je integrál nulový pre nekonečne veľa kriviek (pre všetky krivky v uvažovanom ohraničenom priestore, ktoré začínajú a končia na hranici tohto priestoru), ale nie pre všetky krivky. Oprávnenosť usudzovania na nulovosť elektrického poľa z nulovosti integrálov je teda značne diskutabilná a preto možno spomínanú úvahu považovať za akési rozumné zdôvodnenie prijateľnosti uvedeného tvrdenia, ale ťažko za jeho naozajstný dôkaz.

Pozrime sa teraz, ako sa uvedené tvrdenie pomocou vety o jednoznačnosti naozaj dokáže. V prvom rade si uvedomíme, že elektrické pole vo vodiči je v elektrostatickom prípade nulové (v elektrostatike sú prúdy nulové z definície a z Ohmovho zákona odtiaľ okamžite vyplýva nulovosť elektrického poľa vo vodičoch). Potenciál vo vnútri vodiča je teda konštatný. Pre nami uvažovaný priestor, ohraničený uzavretým vodičom, to znamená, že potenciál na hranici je konštatný. Máme teda nájsť riešenie rovnice $\triangle\varphi = 0$ s okrajovou podmienkou $\varphi|_S = \mathrm{const.}$ Jedno riešenie tejto úlohy vieme ovšem napísať okamžite: $\varphi(\vec{r}) = \mathrm{const}$ je riešením rovnice a spĺňa okrajovú podmienku. Tým je ale celá úloha kompletne vyriešená, pretože podľa vety o jednoznačnosti je toto riešenie jediné. Elektrické pole zodpovedajúce konštatnému potenciálu je nulové, čím dôkaz končí.

Kapacita vodičov

Zo základného kurzu elektriny a magnetizmu je známe, že medzi nábojom na uzavretej vodivej ploche a potenciálom na tejto ploche je v prípade, že náboj je všade mimo vodiča nulový, jednoduchý lineárny vzťah

$$Q = C \cdot V$$

Tento vzťah býva odvodený v niektorých jednoduchých prípadoch, napríklad pre guľový vodič, ale nie je ukázané, že platí úplne všeobecne. To ukážeme teraz.

Nech je potenciál na danom uzavretom vodiči rovný V. Podľa vety o jednoznačnosti je týmto V (a tým, že $\rho(\vec{r}) = 0$) jednoznačne daný potenciál φ všade. To znamená, že je jednoznačne daná aj normálová derivácia $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ na hranici daného vodiča. Táto normálová derivácia nie je nič iné, ako mínus normálová zložka elektrického poľa. Touto zložkou elektrického poľa (spolu s tým, že vnútri vo vodiči je elektrické pole v elektrostatickom prípade nulové), je zas vďaka jednej z hraničných podmienok pre elmag polia (pozri časť 1.2) jednoznačne určená plošná hustota náboja na povrchu vodiča. Ďalej si uvedomíme, že hustota náboja vo vnútri vodiča musí byť v elektrostatickom prípade nulová (nenulové ρ by kvôli Gaussovej vete viedlo na nenulové $\vec{E}$ vo vnútri vodiča, čo by zas cez Ohmov zákon viedlo na nenulové $\vec{j}$, v spore s predpokladom o elektrostatičnosti). Celkový náboj vodiča je teda jednoznačne určený plošnou hustotou povrchového náboja. Schematicky znázornené to vyzerá takto:

$$V \to \varphi(\vec{r}) \to \partial_n \varphi|_S \to \sigma_S \to Q$$

kde každá šípka znamená "jednoznačne určuje".

Nech sa teraz potenciál na danom vodiči zmení k-krát. Ak zmeníme k-krát potenciál φ všade, bude tento nový potenciál spĺňať ako Laplaceovu rovnicu, tak aj okrajové podmienky. Tento potenciál bude podľa vyššie uvedenej schémy jednoznačne určovať celkový náboj na vodiči, ktorý bude k-násobný.

$$kV \to k\varphi(\vec{r}) \to k\partial_n \varphi|_S \to k\sigma_S \to kQ$$

To ale znamená, že vzťah medzi napätím na vodiči a celkovým nábojom na ňom je naozaj lineárny $Q = C \cdot V$. Bez akéhokoľvek výpočtu sme teda ukázali, že kapacita vodiča je naozaj dobre definovaný pojem. Na výpočet kapacity konkrétneho vodiča však treba vyriešiť Laplaceovu rovnicu s konštantným potenciálom na vodiči a nulovým v nekonečne.

Veta o jednoznačnosti nám teraz umožňuje rozšíriť pojem kapacity na sústavu viacerých vodičov. Uvažujme n vodičov, na j-tom z nich nech je potenciál V_j, na ostatných nulový potenciál. Rovnakou úvahou ako predtým prídeme k tomu, že náboj na ľubovoľnom i-tom vodiči je v takomto prípade jednoznačne zadaný hodnotou V_j a že od tejto hodnoty závisí lineárne. V tejto situácii teda môžeme písať

$$Q_i = C_{ij} \cdot V_j$$

pričom v tomto výraze sa nemyslí suma cez opakovaný index j. Ak však teraz uvažujeme všeobecnú situáciu, v ktorej sú všetky V_j nenulové, môžeme si ju rozdeliť na n už uvažovaných prípadov s jediným V_j nenulovým a tieto potom na základe princípu superpozície sčítať. Dostaneme presne to isté, čo predtým, akurát tentoraz už sa bude myslieť suma cez opakovaný index j. (Premyslieť si, že je to naozaj tak.)

Matica C_{ij} nám teda umožňuje ľahko vypočítať náboje na vodičoch, pokiaľ je zadaný potenciál na každom z nich. Ak je táto matica nesingulárna, t.j. ak existuje matica k nej inverzná, tak táto umožňuje rovnako ľahko vypočítať potenciály zo zadaných nábojov.

Poznámka. (Dôležitá.) Filozofia, ktorú sme použili pri analýze pojmu kapacity vodiča, umožňuje riešiť cez Dirichletove okrajové podmienky elektrostatické úlohy, v ktorých nie sú zadané potenciály na vodičoch (t.j. priamo Dirichletove okrajové podmienky), ale celkový náboj na jednotlivých vodičoch. Jednoducho vyriešime Poissonovu rovnicu s konštantnými, ale konkrétne nešpecifikovanými potenciálmi na jednotlivých vodičoch (konštantnými preto, lebo v elektrostatike musí byť potenciál vo vodiči konštantný), potom vypočítame náboje na jednotlivých vodičoch ako funkcie napätí na všetkých vodičoch a nakoniec vyberieme konkrétne hodnoty týchto napätí tak, aby sme dostali predpísané hodnoty nábojov.

Poznámka. (Menej dôležitá.) V elektrotechnike sa často vyskytuje systém dvoch vodičov (kondenzátor), ktorý je charakterizovaný len jednou kapacitou a nie štyrmi, ako by to malo byť podľa našich úvah. Nejde tu však o nijaký rozpor, to čo sa uvažuje tam je len jeden špeciálny prípad z toho, čo sme uvažovali tu. Konkrétne sa uvažuje náboj na oboch vodičoch presne opačný, t.j. $Q_1 = -Q_2 = Q$ a pod napätím sa myslí rozdiel potenciálov na oboch vodičoch, t.j. $V = V_1 - V_2$. Vyjadriť kapacitu $C = \frac{Q}{V}$ cez kapacity C_{11}, C_{12}, C_{21} a C_{22} je jednoduchým algebraickým cvičením.

metóda imaginárnych nábojov (elektrických zrkadiel)

Úloha nájsť elektrické pole bodového náboja pri uzemnenej vodivej rovine sa štandardne rieši (ako je zrejme známe zo základného kurzu) tým, že sa za rovinu umiestni ďalší vhodný náboj a pole sa vypočíta ako superpozícia polí daných Coulombovým zákonom od pôvodného a doplneného náboja. (Doplnený náboj nie je skutočný a predstavuje v istom zmysle zrkadlový obraz pôvodného náboja — odtiaľ názvy metódy.) Otázky, ktoré sa v základnom kurze väčšinou nie úplne zodpovedajú, sú: Je toto naozaj korektná metóda, je pole, ktoré takto dostaneme naozaj totožné s poľom, ktoré máme dostať? Je táto metóda použiteľná aj v iných situáciách, ak áno v akých a ako?

Veta o jednoznačnosti nám umožní jednoducho odpovedať na tieto otázky. Predstavme si, že máme nájsť pole nejakého konkrétneho rozloženia nábojov nachádzajúceho sa v priestore ohraničenom uzavretou vodivou plochou, na ktorej je zadaná konkrétna hodnota potenciálu. Predstavme si ďalej, že namiesto tejto úlohy vyriešime inú úlohu s tým istým rozložením náboja v danom ohraničenom priestore, bez danej vodivej plochy a s nejakým dodatočným rozložením náboja v priestore *mimo* uvažovaný ohraničený priestor. Riešenie takejto úlohy je triviálne – je okamžite dané Coulombovým zákonom a princípom superpozície. Zaujímavé z nášho hľadiska začne byť riešenie tejto inej úlohy vtedy, ak potenciál na ploche ohraničujúcej pôvodne uvažovaný objem (na ktorej bol v pôvodnej úlohe vodič a v novej úlohe tam nie je nič) je práve taký, ako bol predpísaný v pôvodnej úlohe. V takomto prípade je totiž v pôvodnom ohraničenom priestore riešenie novej úlohy totožné s riešením pôvodnej úlohy. Naozaj obe riešenia spĺňajú v tejto časti priestoru rovnakú Poissonovu rovnicu (pretože rozloženie náboja v tejto časti priestoru je v oboch úlohách rovnaké) a na hranici tejto časti priestoru spĺňajú obe rovnaké okrajové podmienky. Z vety o jednoznačnosti teda vyplýva, že riešenia sa v uvažovanej časti priestoru musia rovnať.

Na prvý pohľad to teraz vyzerá tak, že sme našli vynikajúcu metódu, ktorá prevedie pomerne ťažkú úlohu na úlohu veľmi ľahkú. Tak jednoduché to však nie je, pretože kľúčovým momentom je nájsť vhodné rozloženie náboja mimo pôvodne uvažovaný priestor a to je vo všeobecnosti úloha rovnako ťažká, ako pôvodná úloha. Štandardný postup je preto nasledovný: ak pri skúmaní rôznych rozložení náboja (bez vodivých plôch) narazím na nejaké rozloženie s geometricky zaujímavou plochou so zaujímavo rozloženým potenciálom (čo je zaujímavé je z nášho hľadiska dané tým, čo je prakticky realizovateľné pomocou vodivých plôch, čiže napr. ekvipotenciálne plochy sú obzvlášť zaujímavé) tak si toto rozloženie náboja zapamätám. Ak niekedy v budúcnosti narazím na úlohu v nejakej časti priestoru ohraničenej práve zapamätanou plochou, na ktorej je zadaný práve taký potenciál, ako som si zapamätal a rozloženie náboja v tejto časti priestoru je práve totožné s tým, čo som si zapamätal, potom viem, čím doplniť toto rozloženie mimo tento priestor t.j. viem, ako vybrať imaginárne náboje.

Vzhľadom k tomu, nakoľko je riešenie Poissonovej rovnice vo všeobecnosti ťažké, je metóda imaginárnych nábojov veľmi užitočná všade tam, kde je použiteľná. V nasledujúcich príkladoch uvádzame ilustráciu metódy pre sféru.

Príklady

1. Faradayova klietka
(niekoľko príkladov na precvičenie použitia vety o jednoznačnosti)
a) Ukážte, že elektrostatické pole v dutine vodiča je jednoznačne dané rozložením náboja v dutine a nezávisí od rozloženia náboja vo vonkajšom priestore.
b) Ukážte, že predchádzajúce tvrdenie "naruby" neplatí — rozloženie nábojov v dutine ovplyvňuje elektrostatické pole vo vonkajšom priestore. (Nahliadne sa hneď pomocou Gaussovej vety, ale stojí za to ešte chvíľku porozmýšľať a uvedomiť si, prečo úvaha, ktorá prešla vnútri, neprejde vonku.)
c) Ukážte, že elektrostatické pole vo vonkajšom priestore je ovplyvnené len celkovou hodnotou náboja v dutine a nie jeho detailným rozložením.
d) V predchádzajúcich prípadoch sme uvažovali izolovaný vodič. Ako sa zmenia predchádzajúce tvrdenia pre vodič držaný na konštantnej hodnote potenciálu (napr. uzemnený)?

2. Kondenzátor
(jednoduchý príklad na súvis kapacity vodiča s kapacitou kondenzátora)
Pre sústavu dvoch vodičov platí, že ak je napätie na oboch z nich 1V, potom náboj na prvom je 3C a na druhom 5C. Ak napätie na prvom zdvojnásobíme, narastie náboj na ňom na 4C a náboj na druhom vodiči na 7C.
a) Aké budú náboje na vodičoch, ak na prvom z nich bude napätie 1V a na druhom 2V?
b) Aké budú napätia na týchto vodičoch, ak bude na každom z nich náboj 1C?
c) Aká je kapacita kondenzátora tvoreného týmito vodičmi?

3. Sústavy nábojov so sférickými ekvipotenciálnymi hladinami
(delostrelecká príprava pre nasledujúci príklad)
a) Ukážte, že ak má elektrostatické pole dvoch bodových nábojov q_1 a q_2 s polohami $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ nulovú ekvipotenciálnu hladinu $\varphi = 0$ aj inde ako v nekonečne, potom je táto hladina sférická alebo rovinná. Nájdite stred a polomer tejto sféry resp. polohu tejto roviny. Ukážte ďalej, že pre vzdialenosti l_1, l_2 nábojov od stredu sféry platí $l_1 l_2 = R^2$ a $q_2 = -\frac{R}{l_1} q_1$ kde R je polomer sféry.
b) Nájdite také rozloženie nábojov, ktoré bude mať sférickú ekvipotenciálnu hladinu s potenciálom V.

4. Bodový náboj a vodivá sféra
(ilustrácia použitia metódy imaginárnych nábojov)
Uvažujme vodivú sféru so stredom v počiatku a polomerom R a bodový náboj q ležiaci na osi x vo vzdialenosti l od počiatku. Nájdite plošnú hustotu náboja na sfére, celkový náboj sféry, celkovú silu pôsobiacu na náboj a celkovú silu pôsobiacu na sféru v prípade, že
a) sféra je uzemnená
b) sféra má konštantný potenciál V
c) sféra je izolovaná, elektricky neutrálna
d) sféra je izolovaná, nabitá celkovým nábojom Q.
Treba rozlišovať prípady $l > R$ a $l < R$ (v druhom prípade nemôžeme klásť imaginárne náboje dovnútra). Plošná hustota náboja sa určí z hraničných podmnienok pre elektrické pole, ostatné veci sa dajú vypočítať z plošnej hustoty vhodnou integráciou, ale dajú sa nájsť aj jednoduchšie.)

5. Vodivá sféra v homogénnom elektrickom poli
(ďalšia netriviálna aplikácia metódy imaginárnych nábojov.)
a) Uvažujme dva bodové náboje $\pm q$ umiestnené na osi z vo vzdialenostiach $\mp l$ od počiatku. Vzdialenosť l teraz postupne zväčšujme a súčasne zväčšujme q tak, aby $\frac{q}{l^2} = \text{const}$. Ukážte, že v limite $l \to \infty$ prejde pole týchto nábojov na homogénne elektrické pole. Nájdite smer a intenzitu tohto poľa.
b) Uvažujme teraz uzemnenú sféru s polomerom R vloženú do homogénneho elektrického poľa. Na základe výsledku a) nájdite výsledné elektrické pole.
c) To isté čo b) pre izolovanú sféru.

2. Jedna metóda riešenia Poissonovej rovnice (metóda separácie premenných)

Poissonova rovnica je lineárna parciálna diferenciálna rovnica (každá derivácia, ktorá sa v rovnici vyskytuje, sa v nej vyskytuje v prvej mocnine) a ako pre všetky lineárne diferenciálne rovnice pre ňu platí princíp superpozície: ak je φ_1 riešením rovnice s pravou stranou ρ_1 a φ_2 riešením rovnice s pravou stranou ρ_2 potom $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ je riešením rovnice s pravou stranou $c_1\rho_1 + c_2\rho_2$. (Dôkaz je triviálny, založený len na tom, že derivácia lineárnej kombinácie je lineárna kombinácia derivácií.) Jedným z dôsledkov princípu superpozície je štandardný spôsob riešenia rovníc s nenulovou pravou stranou: všeobecné riešenie rovnice s nenulovou pravou stranou je dané súčtom jedného konkrétneho (partikulárneho) riešenia tejto rovnice a všeobecného riešenia tejto rovnice s nulovou pravou stranou. Poissonova rovnica s nulovou pravou stranou sa vyskytuje vo fyzike tak často, že má svoje vlastné meno, volá sa Laplaceova rovnica. Vlastné meno majú dokonca aj riešenia tejto rovnice, volajú sa harmonické funkcie.

Matematická úloha, s ktorou sa vo fyzike bežne stretávame, nespočíva len v riešení istej parciálnej diferenciálnej rovnice, ale v riešení tejto rovnice aj s určitými okrajovými podmienkami (podobne ako v mechanike väčšina úloh nespočíva len v riešení pohybovej rovnice, ale v riešení tejto rovnice s určitými počiatočnými podmienkami). Pri riešení okrajovej úlohy sa ukazuje byť veľmi užitočné nasledovné rozdelenie okrajových podmienok: od partikulárneho riešenia Poissonovej rovnice požadujeme splnenie nulových okrajových podmienok a od riešenia Laplaceovej rovnice potom požadujeme splnenie zadaných okrajových podmienok. (T.j. ťažšiu rovnicu, Poissonovu, riešime s čo najjednoduchšími okrajovými podmienkami a všetky problémy so zadanými okrajovými podmienkami presúvame do riešenia ľahšej rovnice, Laplaceovej.)

Zapísané formálne: riešenie úlohy

$$\triangle\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} \qquad \varphi(\vec{r})|_S = f(\vec{r})$$

je dané súčtom

$$\varphi = \varphi_P + \varphi_L$$

kde

$$\triangle\varphi_P = -\frac{\rho}{\epsilon} \qquad \varphi_P(\vec{r})|_S = 0$$

$$\triangle\varphi_L = 0 \qquad \varphi_L(\vec{r})|_S = f(\vec{r})$$

Na jednoduchom konkrétnom príklade si teraz ukážeme jednu štandardnú metódu hľadania riešenia Laplaceovej rovnice so zadanými okrajovými podmienkami a jednu štandardnú metódu hľadania riešenia Poissonovej rovnice s nulovými okrajovými podmienkami. Techniky, ktoré sa tu naučíme, sa často využívajú nielen pri riešení Poissonovej rovnice, ale aj pri riešení iných rovníc matematickej fyziky. [4]

[4] Hojne budeme tieto techniky (metódu separácie premenných) využívať v kapitole venovanej elmag vlnám. Okrem toho sa s touto metódou študent fyziky stretne ešte prinajmenšom pri riešení Schrödingerovej rovnice a rovnice vedenia tepla (pri riešení ktorej Fourier objavil ako metódu, tak aj Fourierove rady).

2.1. Riešenie Laplaceovej rovnice separáciou premenných.

Všeobecnú metódu sa naučíme na konkrétnom príklade. Uvažujme Laplaceovu rovnicu v dvoch rozmeroch t.j.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\varphi(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\varphi(x,y)=0$$

vnútri obdĺžnika $0\le x\le L_x$, $0\le y\le L_y$, pričom na stranách tohto obdĺžnika sú zadané okrajové podmienky

$$\varphi(x,0)=0\qquad\varphi(x,L_y)=f(x)\qquad\varphi(0,y)=0\qquad\varphi(L_x,y)=0$$

Náš konkrétny príklad obsahuje oproti všeobecnému prípadu niekoľko zjednodušení. Prvým je, že rovnicu uvažujeme v dvoch rozmeroch. Toto nie je podstatné zjednodušenie a robíme ho vlastne len kvôli jednoduchosti a prehľadnosti zápisov, trojrozmerný problém v kvádri by sa riešil úplne analogicky.[5] Druhým zjednodušením, tentoraz veľmi podstatným, je uvažovanie hranatej oblasti namiesto oblasti všeobecnej. K otázkam či a ako sa bude dať nasledovná metóda použiť v prípade nehranatých oblastí sa ešte vrátime. Tretím zjednodušením, znovu nie príliš podstatným, je že uvažujeme okrajové podmienky na troch stranách obdĺžnika nulové. Tým nič neuberáme na všeobecnosti nášho postupu, pretože problém s ľubovoľne zadanými okrajovými podmienkami si môžeme rozdeliť na štyri problémy s troma nulovými okrajovými podmienkami a potom riešenie pôvodného problému získať superpozíciou štyroch jednoduchších problémov. Ku všetkým týmto zjednodušeniam resp. k ich zovšeobecneniam sa ešte vrátime.

Dohodnime sa ešte, že v ďalšom budeme uvažovať len prípady, kedy funkcia $f(x)$ nie je identicky rovná nule. Ak totiž $f(x)\equiv 0$, potom vieme okamžite napísať riešenie Laplaceovej rovnice $\varphi(x)\equiv 0$ a z vety o jednoznačnosti vieme, že je to riešenie jediné. Keďže o tomto riešení od začiatku vieme, nebudeme sa mu v ďalšom venovať, aj ak sa v priebehu našich ďalších úvah niekedy objaví.

Jadrom metódy separácie premenných je nasledovný recept: *riešenie hľadaj v tvare súčinu funkcií, z ktorých každá závisí iba od jednej premennej.* V našom prípade to znamená, že riešenie budeme hľadať v tvare

$$\varphi(x,y)=X(x)\cdot Y(y)$$

Poznamenajme, že tým drasticky obmedzujeme "okruh podozrivých", pretože zďaleka nie všetky funkcie dvoch premenných sa dajú napísať v takomto tvare (skúste napríklad funkciu $\varphi(x,y)=x+y$). Neskôr však uvidíme, že napriek tomuto drastickému obmedzeniu (funkcií, ktoré sa dajú napísať v takomto tvare je v istom zmysle oveľa menej ako tých, ktoré sa takto napísať nedajú) sa nám podarí nájsť všeobecné riešenie.

Dosadením do Laplaceovej rovnice dostaneme

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}Y+X\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=0$$

[5] Poznamenajme, že aj naša dvojrozmerná úloha má dobrý fyzikálny zmysel. Ak totiž uvažujeme trojrozmernú úlohu v kvádri nekonečnom v smere osi z a okrajové podmienky nezávislé od súradnice z, potom z dôvodov symetrie je $E_z=0$, t.j. φ nezávisí od z. Trojrozmerná úloha sa teda zredukuje na našu dvojrozmernú.

a po vydelení tejto rovnice súčinom XY

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0$$

Poznamenajme, že vydeliť rovnicu môžeme len pre $XY \neq 0$. Situáciu v bodoch, v ktorých $X = 0$ resp. $Y = 0$, ošetríme o chvíľku.

Teraz príde kľúčový moment metódy. Rovnica, ktorú sme dostali, je súčtom dvoch členov, z ktorých každý závisí len od jednej premennej. Rovnica pritom platí pre každú dvojicu premenných x, y. To ale znamená, že ak vyberieme nejakú konkrétnu hodnotu napr. premennej y, potom člen závisiaci len od y nadobudne tiež nejakú konkrétnu hodnotu, a člen závisiaci len od x sa musí rovnať mínus tejto konštante pre ľubovoľné x. Podobne ak vyberieme nejakú konkrétnu hodnotu premennej x nahliadneme konštantnosť člena závisiaceho od y pre ľubovoľné y. Spolu teda dostávame

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \alpha \qquad\qquad \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = \beta \qquad\qquad \alpha + \beta = 0$$

Pôvodná parciálna diferenciálna rovnica sa nám rozdelila (separovala) na dve obyčajné diferenciálne rovnice (odtiaľ názov metódy), čím sa celý problém značne zjednodušil. Kým pôjdeme ďalej, pristavme sa ešte pri nulových bodoch funkcií $X(x)$ a $Y(y)$, v ktorých nie je prechod od pôvodnej rovnice k separovaným rovniciam korektný (delenie nulou). Ak sú tieto nulové body izolované, nepredstavujú v skutočnosti nijaký problém. Funkcie $X(x)$ a $Y(y)$ sú totiž spojité (keďže majú druhú deriváciu) a preto rovnice stačí vyriešiť v danej oblasti okrem určitých izolovaných bodov a v týchto bodoch riešenia doplniť tak, aby výsledné funkcie boli spojité. Funkcie s neizolovanými nulovými bodmi (napr. funkcie nulové na nejakom intervale) jednoducho z našich úvah vyhodíme. Vzhľadom k tomu, koľko funkcií sme už vyhodili tým, že uvažujeme len funkcie typu $X(x)Y(y)$ je toto pomerne nevinný krok. A všetky tieto kroky budú ospravedlnené, ak sa nám na konci podarí nájsť riešenie (o ktorom dopredu vieme, že je jediné).

Pozrime sa ešte, ako sa prejavia okrajové podmienky pre funkciu $\varphi(x, y)$ na funkciách $X(x)$ a $Y(y)$. Ak neuvažujeme možnosti $X(x) \equiv 0$ a $Y(y) \equiv 0$, ktoré by viedli na $\varphi(x, y) \equiv 0$, dostaneme z troch nulových okrajových podmienok pre φ tri jednoduché okrajové podmienky pre funkcie X, Y

$$\begin{aligned} X(0)Y(y) = 0 &\qquad \Rightarrow \qquad X(0) = 0 \\ X(L_x)Y(y) = 0 &\qquad \Rightarrow \qquad X(L_x) = 0 \\ X(x)Y(0) = 0 &\qquad \Rightarrow \qquad Y(0) = 0 \end{aligned}$$

Štvrtá (nenulová) okrajová podmienka pre φ nevedie priamo na nejakú okrajovú podmienku pre X alebo Y. K tejto okrajovej podmienke sa ešte vrátime. Pôvodnú úlohu sme teda previedli na úlohu

$$\begin{aligned} X'' = \alpha X &\qquad X(0) = 0 \qquad X(L_x) = 0 \\ Y'' = \beta Y &\qquad Y(0) = 0 \end{aligned}$$

pričom

$$\alpha + \beta = 0$$

Túto úlohu teraz ľahko vyriešime Eulerovým receptom: riešenie hľadaj v tvare $e^{\kappa x}$ resp. $e^{\kappa y}$. Pre $\kappa < 0$ dostávame pre $X(x)$ riešenie

$$X(x) = a\,\sin kx + b\,\cos kx \qquad\qquad k = \sqrt{|\kappa|}$$

a z okrajových podmienok

$$X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0 \qquad\qquad X(L_x) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{n\pi}{L_x}$$

t.j.

$$X(x) = a\,\sin\frac{n\pi x}{L_x}$$

Pre $\kappa = 0$ je riešením $X(x) = ax + b$, okrajové podmienky vedú na $a = b = 0$. Pre $\kappa > 0$ je riešením $X(x) = ae^{kx} + be^{-kx}$, okrajové podmienky vedú na $a = b = 0$. Nenulové riešenie sme teda dostali len pre $\kappa = -(\frac{n\pi}{L_x})^2 < 0$. Pre $Y(y)$ dostávame pre takéto κ

$$Y(y) = c\,e^{ky} + d\,e^{-ky}$$

a z okrajovej podmienky

$$Y(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c = -d$$

t.j.

$$Y(y) = c\,(e^{ky} - e^{-ky}) = c'\sinh\frac{n\pi y}{L_x}$$

Jednotlivé riešenia typu $X(x)Y(y)$ majú teda tvar

$$\sin\frac{n\pi x}{L_x}\,\sinh\frac{n\pi y}{L_x}$$

a vďaka princípu superpozície je riešením aj každá lineárna kombinácia

$$\varphi(x,y) = \sum_n a_n\,\sin\frac{n\pi x}{L_x}\,\sinh\frac{n\pi y}{L_x}$$

Toto riešenie je riešením Laplaceovej rovnice, spĺňajúce tri zo štyroch okrajových podmienok. Otázka teraz stojí tak, či sa dajú vybrať koeficienty a_n tak, aby bola splnená aj štvrtá okrajová podmienka, t.j. aby platilo

$$\varphi(x,L_y) = \sum_n a_n\,\sin\frac{n\pi x}{L_x}\,\sinh\frac{n\pi L_y}{L_x} = f(x)$$

Takéto koeficienty a_n skutočne existujú, pretože posledný vzťah vlastne nepredstavuje nič iné ako Fourierov rozvoj funkcie $f(x)$. A zo známych vzťahov[6] pre koeficenty Fourierovho radu dostávame

$$a_n = \frac{1}{\sinh\frac{n\pi L_y}{L_x}}\,\frac{2}{L_x}\int_0^{L_x} f(x)\,\sin\frac{n\pi x}{L_x}\,dx$$

Posledné tri vzťahy predstavujú (jediné) riešenie našej úlohy. Pripomeňme si ešte raz logiku celého postupu: na začiatku sme uhádli šikovný typ funkcií (súčin $X(x)Y(y)$), pre ktorý sme rovnicu vedeli ľahko vyriešiť. Z riešení tohto typu sme potom vedeli poskladať ľubovoľné riešenie (v podstate Fourierov rad). A keďže sme mali už dopredu dokázanú vetu o jednoznačnosti, vieme že takto nájdené riešenie je jediné. V nasledovnej sérii poznámok teraz rozšírime tento postup na niekoľko všeobecnejších (v rôznom zmysle) prípadov.

[6] Ak tieto vzťahy nie sú známe, pozri poznámku o Fourierových radoch na konci časti 3.1.

POZNÁMKA. (Všeobecné okrajové podmienky.) Riešenie úlohy s okrajovými podmienkami nulovými, okrem podmienky $\varphi(x,0) = \bar{f}(x)$ dostaneme z vyššie uvedeného riešenia zámenou $y \to L_y - y$ (premyslite si, že je to naozaj tak). Riešenia úlohy s nenulovými okrajovými podmienkami na "zvislých" stranách dostaneme zámenou $x \leftrightarrow y$. Riešenie úlohy s okrajovými podmienkami nenulovými na všetkých štyroch stranách, ale nulovými vo všetkých štyroch vrcholoch, dostaneme ako superpozíciu riešení doteraz uvážených úloh. A nakoniec nenulové okrajové podmienky vo vrcholoch je možné splniť tak, že k doteraz uváženému riešeniu pripočítame funkciu

$$A + B.x + C.y + D.x.y$$

ktorá zjavne spĺňa Laplaceovu rovnicu. (Táto funkcia vznikne z lineárnych riešení, ktoré sme dostali pre $\kappa = 0$. Tieto riešenia boli identicky rovné nule pri doteraz uvažovaných okrajových podmienkach, ale znovu ožijú ako nenulové pri všeobecných okrajových podmienkach, nenulových vo vrcholoch.)

POZNÁMKA. (Trojrozmerná hranatá oblasť.) Riešenie v kvádri je úplne analogické riešeniu v obdĺžniku, analogický je aj výsledok pre okrajovú podmienku nenulovú iba na jednej stene $\varphi(x, y, L_z) = f(x, y)$

$$\varphi(x,y,z) = \sum_{m,n} a_{mn} \sin\frac{m\pi x}{L_x} \sin\frac{n\pi y}{L_y} \sinh\sqrt{\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}}\,\pi z$$

Jediná mierna komplikácia oproti dvojrozmernému prípadu môže byť v tom, že na určenie koeficientov a_{mn} z okrajovej podmienky treba vedieť nájsť koeficienty Fourierovho radu v dvoch premenných, čo je vec, ktorú sa naučíme o chvíľku (v skutočnosti to nie je nič iné, ako nájsť dvakrát koeficienty obyčajného Fourierovho radu v jednej premennej.

POZNÁMKA. (Nehranatá oblasť.) Vo všeobecnosti metóda nefunguje a ak nefunguje separácia premenných, väčšinou nefunguje nič jednoduché a sme odkázaní na rôzne približné a numerické metódy. Funguje však v dvoch dôležitých prípadoch, v sférických a cylindrických súradniciach. Riešenie hľadáme v tvare $\varphi(r,\phi,\theta) = R(r).\Phi(\phi).\Theta(\theta)$ resp. $\varphi(r,\phi,z) = R(r).\Phi(\phi).Z(z)$. Ak máme sférickú alebo valcovú hranicu, potom sa v príslušných súradniciach jednoducho formulujú okrajové podmienky pre $\varphi(\vec{r})$ (práve preto je použitie týchto súradníc výhodné) a z nich dostaneme priamo nejaké okrajové podmienky pre $R(r)$, $\Phi(\phi)$, $\Theta(\theta)$ resp. $Z(z)$. Poznamenajme, že úlohu, ktorú hrali v kartézskych súradniciach sínusy, hrajú vo sférických a cylindrických súradniciach niektoré známe tzv. špeciálne funkcie. Vo sférických súradniciach v premennej ϑ sú to tzv. Legendreove polynómy a v cylindrických súradniciach v premennej r tzv. Besselove funkcie.

POZNÁMKA. (Neumannova úloha.) Všade kosínusy namiesto sínusov.

2.2. Vyjadrenie partikulárneho riešenia Poissonovej rovnice cez vlastné funkcie laplaciánu a ich hľadanie metódou separácie premenných.

Poďme sa teraz pozrieť na druhú časť úlohy, t.j. na hľadanie partikulárneho riešenia Poissonovej rovnice s nulovými okrajovými podmienkami. Uvidíme, že táto úloha sa dá previesť (a naozaj sa veľmi často prevádza) na inú úlohu, a síce na hľadanie vlastných funkcií a vlastných hodnôt laplaciánu, čo sú ďalšie dva z užitočných a dôležitých pojmov, s ktorými sa zoznámime v elektrostatike, ale stretneme sa s nimi v mnohých ďalších oblastiach fyziky. Pojmy vlastnej funkcie a vlastnej hodnoty sú dôležité v teórii lineárnych diferenciálnych rovníc a možno ich preto stretnúť skoro všade tam, kde sa vyskytujú lineárne diferenciálne rovnice[7] a okrem toho sú to ústredné pojmy matematického aparátu kvantovej mechaniky.

Vlastné funkcie laplaciánu (s Dirichletovými[8] okrajovými podmienkami) sú definované vzťahom[9]

$$\triangle\varphi(\vec{r}) = \lambda\, \varphi(\vec{r}) \qquad\qquad \varphi(\vec{r})|_S = 0$$

kde λ je ľubovoľné, vo všeobecnosti komplexné, číslo a φ je ľubovoľná funkcia nie identicky rovná nule. Vlastné funkcie existujú väčšinou len pre určité konkrétne hodnoty λ, ktoré sa nazývajú vlastnými hodnotami laplaciánu.

Vlastné hodnoty laplaciánu majú niekoľko veľmi dôležitých a užitočných vlastností, ktoré sú prirodzenými zovšeobecneniami známych vlastností vlastných vektorov a vlastných hodnôt symetrických matíc. Vlastnosti uvedieme bez dôkazov, s dôkazmi sa čitateľ stretne v prednáške z kvantovej mechaniky. [10]

- Vlastné hodnoty laplaciánu sú reálne, záporné čísla, a v konečnej uzavretej oblasti sú diskrétne, t.j. možno ich číslovať indexom $n = 1, 2, ...$

$$\triangle\varphi_n(\vec{r}) = \lambda_n\varphi_n(\vec{r}) \qquad\qquad \varphi_n|_S = 0 \qquad\qquad 0 > \lambda_n \in \mathbb{R}$$

- Vlastné funkcie laplaciánu tvoria úplný ortonormálny systém.

Pod systémom funkcií myslíme nejakú množinu funkcií $\varphi_n(\vec{r})$. Systém funkcií nazývame úplným (pre nejaký priestor funkcií) ak sa dá ľubovoľná funkcia $f(\vec{r})$ (z tohto priestoru) vyjadriť ako lineárna kombinácia funkcií systému, t.j. ak pre každú $f(\vec{r})$ existujú koeficienty c_n také, že

$$f(\vec{r}) = \sum_n c_n\varphi_n(\vec{r})$$

Ortonormálnym nazývame systém funkcií vtedy, ak pre každé dve jeho funkcie platí

$$\int \varphi_m^*(\vec{r})\varphi_n(\vec{r})\, d^3r = \delta_{mn}$$

[7] Ide o analógy pojmov vlastného vektora a vlastnej hodnoty z lineárnej algebry. Mnohé úlohy lineárnej algebry (napr. riešenie lineárnych rovníc alebo diagonalizácia matíc) sa robia veľmi účinne pomocou vlastných vektorov matice.

[8] Analogicky, akurát s nulovou Neumannovou okrajovou podmienkou, sú definované vlastné funkcie laplaciánu vhodné pre Neumannovu úlohu.

[9] Pozor, tento vzťah nie je Poissonovou rovnicou, pretože obsahuje neznámu funkciu $\varphi(\vec{r})$ na oboch stranách rovnice.

[10] Poznamenajme, že ani dôkazy v bežných učebniciach kvantovej mechaniky nie sú rigoróznymi matematickými dôkazmi. Problém je v tom, že už len presná formulácia, a nieto ešte dôkazy, by si vyžadovali špeciálnu, minimálne semestrálnu, prednášku z tzv. funkcionálnej analýzy.

kde pod integrálom sa myslí určitý integrál cez oblasť, na ktorej sú funkcie definované (aj keď to nie je explicitne vyznačené) a hviezdička znamená komplexné združenie. (Pri práci s Fourierovými radmi a integrálmi, ktoré sú špeciálnym, ale veľmi dôležitým prípadom rozvoja do úplného systému ortonormálnych funkcií, sa často používajú zápisy pomocou komplexných exponent. Preto sme si uviedli definíciu ortonormálnosti v komplexnom balení, aby sme mali zahrnutý aj tento prípad, ktorý budeme potrebovať napríklad v kapitole venovanej elmag vlnám. Poznamenajme, že uvedený integrál hrá v priestoroch funkcií úlohu, akú hrá bežný skalárny súčin vo vektorových priestoroch.)

Ak teraz vynásobíme podmienku úplnosti funkciou $\varphi_m^*(\vec{r})$, preintegrujeme (cez definičný obor uvažovaného priestoru funkcií) a využijeme podmienku ortonormálnosti, dostaneme

$$\int \varphi_m^*(\vec{r}) f(\vec{r})\, d^3r = \sum_n c_n \int \varphi_m^*(\vec{r})\varphi_n(\vec{r})\, d^3r = \sum_n c_n \delta_{mn} = c_m$$

t.j. koeficienty rozvoja funkcie do daného systému ortonormálnych funkcií sú dané uvedenými integrálmi.

Z hľadiska riešenia Poissonovej rovnice hrajú vlastné funkcie laplaciánu dôležitú úlohu preto, lebo riešenie Poissonovej rovnice, ktorá má na pravej strane vlastnú funkciu laplaciánu, t.j. rovnice

$$\triangle\varphi(\vec{r}) = \varphi_n(\vec{r}) \qquad\qquad \varphi(\vec{r})|_S = 0$$

s neznámou funkciou φ a so zadanou funkciou φ_n, je triviálne (dosadím–vidím):

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(\vec{r})$$

Poissonovu rovnicu s ľubovoľnou (slušnou) pravou stranou $-\rho(\vec{r})/\epsilon$ teraz môžeme riešiť tak, že rozvinieme pravú stranu do úplného systému vlastných funkcií laplaciánu, pre každú z nich riešenie poznáme a celkové riešenie poskladáme z týchto známych riešení pomocou princípu superpozície. Výsledok je

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_n c_n \frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(\vec{r}) \qquad\qquad c_n = \int \varphi_n^*(\vec{r})\frac{-\rho(\vec{r})}{\epsilon}\, d^3r$$

(premyslite si, že je to naozaj tak).

Ak teda poznáme vlastné funkcie a hodnoty laplaciánu pre nejakú oblasť, vieme napísať okamžite partikulárne riešenie Poissonovej rovnice pre túto oblasť v tvare nekonečného radu, s koeficientami vyjadrenými cez určité integrály. Ostáva nám naučiť sa hľadať vlastné funkcie a hodnoty laplaciánu. Toto je vo všeobecnosti veľmi ťažká úloha, ale v niektorých prípadoch sa dá riešiť nám už známou metódou separácie premenných. Ilustrujeme si to na našom konkrétnom príklade dvojrozmernej obdĺžnikovej oblasti $0 \le x \le L_x$, $0 \le y \le L_y$. Keďže jednotlivé kroky sú veľmi podobné tomu, čo sme robili v prípade Laplaceovej rovnice, budeme postupovať menej podrobne.

Riešenie rovnice

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ \varphi(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\ \varphi(x,y) = \lambda\varphi(x,y)$$

hľadáme v tvare

$$\varphi(x,y) = X(x).Y(y)$$

čo nás po štandarných krokoch privedie k dvom (separovaným) rovniciam

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \alpha X \qquad\qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = \beta Y \qquad\qquad \alpha + \beta = \lambda$$

Riešením týchto obyčajných diferenciálnych rovníc a zohľadnením nulových okrajových podmienok dostaneme

$$X(x) = \sin\frac{m\pi x}{L_x} \qquad\qquad Y(y) = \sin\frac{n\pi y}{L_y}$$

čiže vlastné funkcie a hodnoty (číslované teraz dvojicou indexov) sú

$$\varphi_{mn}(x,y) = \sin\frac{m\pi x}{L_x}\ \sin\frac{n\pi y}{L_y} \qquad\qquad \lambda_{mn} = -\left(\frac{m^2\pi^2}{L_x^2} + \frac{n^2\pi^2}{L_y^2}\right)$$

Partikulárne riešenie Poissonovej rovnice s hustotou náboja $\rho(\vec{r})$ v danej oblasti je teda

$$\varphi(x,y) = \sum_{m,n} c_{mn}\ \left(-\frac{m^2\pi^2}{L_x^2} - \frac{n^2\pi^2}{L_y^2}\right)^{-1} \sin\frac{m\pi x}{L_x}\ \sin\frac{n\pi y}{L_y}$$

pričom koeficienty c_{mn} sú dané vzťahom

$$-\frac{1}{\epsilon}\rho(x,y) = \sum_{m,n} c_{mn}\ \sin\frac{m\pi x}{L_x}\ \sin\frac{n\pi y}{L_y}$$

Takéto koeficienty c_{mn} skutočne existujú, pretože posledný vzťah vlastne nepredstavuje nič iné ako dvojitý Fourierov rozvoj funkcie $\frac{1}{\epsilon}\rho(x,y)$. Takýto Fourierov rad môžeme chápať ako dva Fourierove rady, najprv rozložíme $\rho(x,y)$ v premennej y, pričom x chápeme ako parameter, koeficienty tohto rozvoja (závislé od parametra x) sú

$$c_n(x) = -\frac{1}{\epsilon}\frac{2}{L_y}\int_0^{L_y} \rho(x,y)\ \sin\frac{n\pi y}{L_y}\ dy$$

a potom rozložíme koeficienty $c_n(x)$ do ďalšieho Fourierovho radu (v premennej x) s koeficientami

$$c_{mn} = \frac{2}{L_x}\int_0^{L_x} c_n(x)\ \sin\frac{m\pi x}{L_x}\ dx$$

Tým sme našli partikulárne riešenie Poissonovej rovnice v obdĺžniku a spolu s predchádzajúcim riešením Laplaceovej rovnice v obdĺžniku máme pre túto oblasť vlastne vyriešené všetky možné elektrostatické úlohy.

Poznámka. Pre zovšeobecnenia uvedeného postupu hľadania vlastných funkcií a hodnôt laplaciánu platia analogické poznámky, aké sme uviedli za riešením Laplaceovej rovnice v dvojrozmernej hranatej oblasti (tri rozmery, nehranaté oblasti, Neumann).

Príklady

1. Potenciál v dvojrozmernej hranatej oblasti
(Príklad na základné precvičenie nových pojmov, s čo najjednoduchšími Fourierovými radmi)
Nájdite potenciál vo vnútri obdĺžnika $0 \leq x \leq L_x$, $0 \leq y \leq L_y$, ak
a) Je potenciál nenulový len na jednej strane hranice, a síce: $\varphi(x, L_y) = \sin \frac{\pi x}{L_x}$.
b) To isté čo v prípade a), plus navyše $\varphi(L_x, y) = \sin \frac{2\pi y}{L_y}$
c) To isté čo v prípade b), plus navyše $\varphi(x, 0) = \sin \frac{3\pi x}{L_x}$
d) To isté čo v prípade c), plus navyše vnútri obdĺžnika náboj s hustotou $\rho(x, y) = \sin \frac{4\pi x}{L_x} \sin \frac{5\pi y}{L_y}$

2. Potenciál v dvojrozmernej hranatej oblasti II
(Pokračovanie s trochu menej triviálnymi Fourierovými radmi)
Nájdite potenciál vo vnútri obdĺžnika $0 \leq x \leq L_x$, $0 \leq y \leq L_y$, ak
a) $\varphi(x, 0) = x$, $\varphi(x, L_y) = x$, $\varphi(0, y) = 0$ a $\varphi(L_x, y) = V$ (pozri poznámku o všeobecných okrajových podmienkach, najmä okrajových podmienkach nenulových vo vrcholoch).
b) To isté čo v prípade a), plus navyše vnútri obdĺžnika náboj s hustotou $\rho(x, y) = y$

3. Potenciál v trojrozmernej hranatej oblasti
(Jednoduchý príklad na precvičenie zovšeobecnenia z dvoch na tri rozmery.)
Nájdite potenciál vo vnútri kvádra $0 \leq x \leq L_x$, $0 \leq y \leq L_y$, $0 \leq z \leq L_z$ ak
a) Je potenciál nenulový len na jednej stene hranice, a síce: $\varphi(x, y, L_z) = \sin \frac{\pi x}{L_x} \sin \frac{2\pi y}{L_y}$
b) To isté čo v prípade a), plus navyše $\varphi(0, y, z) = \sin \frac{3\pi y}{L_y} \sin \frac{4\pi z}{L_z}$

4. Potenciál v trojrozmernej cylindrickej a sférickej oblasti
(Nepovinný príklad na separáciu premenných v iných než kartézskych súradniciach.)
a) Napíšte explicitne vzťah medzi cylindrickými a kartézskymi súradnicami, explicitne vyjadrite derivácie (prvú a druhú) podľa kartézskych súradníc cez derivácie podľa cylindrických súradníc (nevyžaduje nič iné než vypočítať derivácie zloženej funkcie) a napíšte explicitne laplacián v cylindrických súradniciach (t.j. tak, aby obsahoval len súradnice r, ϕ, z a derivácie podľa nich). Metódou separácie premenných preveďte potom Laplaceovu rovnicu v cylindrických súradniciach na tri obyčajné diferenciálne rovnice.
b) To isté v sférických súradniciach. (Kontrola: toto sa dá nájsť v ľubovoľnej učebnici kvantovej mechaniky, v kapitole o atóme vodíka, alebo niekde okolo.)

3. Iná metóda riešenia Poissonovej rovnice (metóda Greenovej funkcie)

Ďalšie dva veľmi užitočné pojmy, s ktorými sa zoznámime pri našom štúdiu elektrostatiky a ktoré svojim významom elektrostatiku ďaleko presahujú, sú pojmy δ-funkcie a Greenovej funkcie. Oba tieto pojmy patria medzi základnú výzbroj modernej teoretickej fyziky a každý študent fyziky sa s nimi ešte mnohokrát stretne. Aj v našej prednáške sa s nimi ešte stretneme (aj po prechode od elektrostatiky k elektrodynamike) a to pri vyšetrovaní elmag žiarenia.

3.1. Diracova δ-funkcia.

Elektrostatika je vhodným ihriskom pre zavedenie δ-funkcie, pretože δ-funkcia nie je vlastne nič iné, ako formálne vyjadrenie hustoty bodového náboja. Doteraz sme všetky rovnice písali buď v jazyku bodových nábojov, alebo v jazyku spojite rozloženej hustoty náboja. Prechod od jedného jazyka k druhému nebol nijako zložitý, spočíval v jednoduchom nahradení súm integrálmi. Napriek tomu bude príjemné, ak budeme vedieť zapísať aj bodové náboje cez hustotu náboja t.j. ak jazyk hustoty náboja v sebe bude zahŕňať aj bodové náboje.

$\underline{\delta(x)}$ Začnime s intuitívnou "definíciou" hustoty jednotkového bodového náboja sediaceho v počiatku. Takúto hustotu budeme označovať $\delta(x)$ a malo by pre ňu platiť

$$\delta(x) = 0 \qquad\qquad \forall x \neq 0$$

a súčasne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

čo sa niekedy píše aj v tvare

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)\, dx = 1$$

(vzhľadom na prvú vlastnosť – nulovosť všade okrem počiatku – je to ekvivalentné s $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$).

Problém s touto intuitívnou "definíciou" je v tom, že funkcia s uvedenými dvoma vlastnosťami neexistuje. Každá funkcia, nenulová len v jedinom bode, má totiž nulový integrál. [11] Napriek tomu sa nechajme ešte chvíľku viesť našou "definíciou" a odvoďme si základnú vlastnosť δ-funkcie, ktorá sa často používa ako definícia δ-funkcie (namiesto našej doterajšej "definície")

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta(x)\, dx = f(0)$$

"Dôkaz" spočíva v nasledovnej identite $f(x)\,\delta(x) = f(0)\,\delta(x)$, ktorá je zjavne pravdivá pre $x = 0$ (na oboch stranách rovnice je to isté), aj pre $x \neq 0$ (na oboch stranách rovnice je nula). Dosadením tejto identity do integrálu a vytiahnutím konštanty $f(0)$ pred integrál dostaneme okamžite uvedené tvrdenie.

[11] Že δ-funkcia nie je funkcia môžeme nahliadnuť aj z toho, že hustota bodového náboja v mieste, kde sa tento náboj nachádza je nekonečná. Zapísané formálne $\delta(0) = \infty$. Reálna funkcia je ovšem zobrazenie z reálnych čísiel do reálnych čísiel a ∞ nie je reálne číslo.

$\underline{\delta(x-a)}$ Hustotu jednotkového bodového náboja sediaceho v nejakom bode a mimo počiatok môžeme vyjadriť pomocou hustoty jednotkového bodového náboja sediaceho v počiatku jednoducho posunutím argumentu z x do $x-a$. Pod $\delta(x-a)$ budeme teda rozumieť hustotu jednotkového bodového náboja v bode a. Základnou (definičnou) vlastnosťou $\delta(x-a)$ je

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)}$$

"Dôkaz" z intuitívnej "definície" analogicky ako pre $\delta(x)$.

Poznámka. (Úplne nepovinná). δ-funkciu zaviedol P.M.A.Dirac niekedy v tridsiatych rokoch a mnoho rokov ju fyzici používali ako veľmi účinný nástroj napriek tomu, že sa jednalo o matematicky nekorektne definovaný objekt. Matematicky korektná definícia sa objavila až v prácach L.Schwartza v rámci tzv. teórie distribúcií. A hoci celá táto teória je technicky trochu náročná, základná idea je veľmi jednoduchá, takže si o nej pár slov povieme.

Kľúčovým pojmom je pojem lineárneho funkcionálu, čo je zobrazenie, ktoré priraďuje funkciám čísla a robí to lineárne, t.j. lineárnej kombinácii funkcií priradí takú istú lineárnu kombináciu čisiel priradených jednotlivým funkciám. Typickým lineárnym funkcionálom je napríklad určitý integrál. Ukazuje sa dokonca, že skoro každý lineárny funkcionál sa dá napísať ako určitý integrál zo súčinu danej funkcie $f(x)$ s nejakou konkrétnou funkciou $g(x)$ t.j. že skoro pre každý lineárny funkcionál existuje funkcia $g(x)$ taká, že daný funkcionál sa dá zapísať ako zobrazenie $f(x) \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$.

Existujú však aj lineárne funkcionály, ktoré sa nedajú vyjadriť pomocou určitého integrálu. Typickým príkladom je lineárny funkcionál $f(x) \to f(a)$, ktorý priradí funkcii $f(x)$ jej hodnotu v konkrétnom bode. Tomuto funkcionálu sa hovorí δ_a a jeho pôsobenie na funkciu $f(x)$ zapisujeme ako $\delta_a[f(x)] = f(a)$. Toto označenie je celkom prirodzené, pretože uvažovaný funkcionál robí presne to, čo by mal robiť integrál z δ-funkcie, ale neexistuje preň nijaká funkcia $g(x)$ (ktorú ak by existovala, by sme radi volali $\delta(x)$) pomocou ktorej by sa dal zapísať ako určitý integrál.

Ak sa nám však veľmi páči zápis lineárnych funkcionálov pomocou určitých integrálov a chceme ho používať silou-mocou aj pre δ-funkcionál, môžeme namiesto $\delta_a[f(x)]$ písať $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\ f(x)\ dx$. Podstatné je, že v tomto prípade nepovažujeme symbol $\delta(x)$ za samostatný symbol označujúci funkciu a symbol $\int_{-\infty}^{\infty} dx$ za samostatný symbol označujúci určitý integrál, ale dobrý zmysel má len symbol $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\ dx$ označujúci funkcionál δ_a.

Mravné ponaučenie: Vzťahy, v ktorých vystupuje δ-funkcia pod integrálom, sú väčšinou korektné vťahy, ktoré majú dobrý zmysel aj v matematicky rigoróznej teórii δ-funkcie. Vzťahy v ktorých vystupuje δ-funkcia sama bez integrálu majú väčšinou len význam mnemotechnických pomôcok.

Koniec poznámky (úplne nepovinnej).

$\underline{\delta(\alpha x)}$ Motiváciou k definícii δ-funkcie argumentu násobeného konštantou bude pre nás celkom prirodzená požiadavka, aby sa v integráloch s δ-funkciou dala robiť substitúcia (čo nie je vlastne nič iné ako požiadavka, aby sa pri "rozťahovaní sveta" menila δ-funkcia rovnako ako iné hustoty). Napr. pre $\alpha > 0$ jednoduchou substitúciou $y = \alpha x$ dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \delta(\alpha x)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\frac{y}{\alpha})\ \delta(y)\ \frac{dy}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\ f(0)$$

Pre $\alpha < 0$ si treba dať pozor a urobiť správne substitúciu aj v integračných hraniciach, čo vedie k

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \delta(\alpha x)\ dx = \int_{\infty}^{-\infty} f(\frac{y}{\alpha})\ \delta(y)\ \frac{dy}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha}\ f(0)$$

Spolu teda

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \delta(\alpha x)\ dx = \frac{1}{|\alpha|}\ f(0)$$

resp. v mnemotechnickom balení

$$\boxed{\delta(\alpha x) = \tfrac{1}{|\alpha|}\delta(x)}$$

Poznamenajme, že špeciálnym prípadom tohto vzťahu je vzťah $\delta(-x) = \delta(x)$.

$\underline{\delta(g(x))}$ Definíciu δ-funkcie teraz jednoducho rozšírime aj na prípady, keď je jej argumentom nejaká "rozumná" funkcia premennej x. Prvým znakom rozumnosti funkcie $g(x)$ bude, že má diskrétne nulové body, ktoré budeme označovať x_n. Pre infinitezimálne ε potom môžeme písať

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \delta(g(x))\ dx = \sum_n \int_{x_n-\varepsilon}^{x_n+\varepsilon} f(x)\ \delta(g(x))\ dx$$

V ε-ovom okolí každého bodu x_n teraz rozložíme funkciu $g(x)$ do Taylorovho radu

$$g(x) = g(x_n) + g'(x_n)\ (x - x_n) + ...$$

z ktorého budeme v ďalšom uvažovať iba najnižší nenulový člen. Celé toto je vlastne motivácia k nasledovnej definícii

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \delta(g(x))\ dx = \sum_n \int_{x_n-\varepsilon}^{x_n+\varepsilon} f(x)\ \delta(g'(x_n)(x - x_n))\ dx = \sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|} f(x_n)$$

resp. zapísané mnemotechnicky

$$\boxed{\delta(g(x)) = \textstyle\sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|}\delta(x - x_n)}$$

Z tejto definície je jasné, že silnejším znakom "rozumnosti" funkcie $g(x)$ je nenulovosť prvej derivácie v nulových bodoch funkcie. Otázkou či a ako sa dá definovať δ-funkcia z nerozumnej funkcie sa tu zaoberať nebudeme. Uspokojíme sa s konštatovaním, že vo všetkých bežných prípadoch sa stretávame s δ-funkciou, argumentom ktorej je "rozumná" funkcia.

"reprezentácie" δ-funkcie

Naša definícia δ-funkcie resp. motivácia tejto definície bola založená na predstave hustoty bodového náboja. Ak sa niekomu takáto predstava nepáči, môže uvažovať rôzne slušnejšie rozloženia náboja a zobrať nejakú ich postupnosť takú, že jej členy sa čoraz viac blížia k bodovému náboju. Môžeme napríklad uvažovať obdĺžniky s jednotkovým obsahom, ktorých základňa je čoraz užšia a tým pádom sú čoraz vyššie. Pod δ-funkciou potom môžeme myslieť limitu takejto postupnosti, pričom táto limita sa zvykne nazývať reprezentáciou δ-funkcie.

Problém s takýmto prístupom je samozrejme v tom, že uvažovaná limita neexistuje. Formálne teda môžeme písať

$$\text{obdĺžniková reprezentácia:} \qquad \delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\, \vartheta(\frac{\varepsilon}{2} - |x|)$$

kde tzv. ϑ-funkcia je definovaná nasledovne: $\vartheta(x) = 0$ pre $x < 0$; $\vartheta(x) = 1$ pre $x \geq 0$, ale z matematického hľadiska sa jedná o prázdny zhluk písmen. V skutočnosti je treba tento vzťah chápať len ako mnemotechnickú pomôcku pre nasledovné korektné tvrdenie (dôkaz viď príklady)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon}\, \vartheta(\frac{\varepsilon}{2} - |x|)\, f(x)\, dx = f(0)$$

Akú výhodu má takýto prístup k definícii δ-funkcie? Nuž pravdu povediac asi nijakú (okrem možnej psychologickej výhody v prípade, že pôvodný prístup nebol z nejakých dôvodov dobre stráviteľný). Načo sa teda reprezentáciami δ-funkcie vôbec zaoberáme? Pretože niektoré z bežných reprezentácií δ-funkcie sa občas vo fyzike vyskytujú a ak na ne narazíme, je vždy užitočné rozpoznať v nich δ-funkciu. Uvedieme si teraz niekoľko známych reprezentácií δ-funkcie, pričom vždy budeme uvádzať len mnemotechnickú verziu formuliek (korektné formulácie a ich dôkazy tvoria jeden z príkladov k tejto kapitole)

Gaussova reprezentácia	$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2/\varepsilon^2}$
Lorentzova reprezentácia	$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi}\, \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$
Dirichletova reprezentácia	$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi x}\, \sin\frac{x}{\varepsilon}$
Fourierova reprezentácia	$\delta(x) = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-K}^{K} e^{ikx} dk$

pričom Fourierova reprezentácia je často uvádzaná v ešte neporiadnejšom (ale veľmi užitočnom tvare) ako

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk$$

Fourierova reprezentácia je špeciálnym prípadom ešte jednej dôležitej reprezentácie δ-funkcie a to reprezentácie pomocou ľubovoľného úplného systému ortonormálnych funkcií. S týmto pojmom sme sa už stretli pri diskusii vlastných funkcií laplaciánu (časť 2.2), takže si len pripomeňme, že akýkoľvek systém funkcií $\varphi_n(x)$ (vo všeobecnosti komplexných) nazývame úplným (pre nejakú množinu funkcií), ak sa dá každá funkcia $f(x)$ (z tejto množiny) napísať ako $f(x) = \sum_n c_n \varphi_n(x)$. Ortonormálnym nazývame tento systém funkcií vtedy, ak pre každú dvojicu m, n platí $\int \varphi_m^*(x)\varphi_n(x)\, dx = \delta_{mn}$ (hviezdička znamená komplexné združenie, uvedený integrál hrá úlohu skalárneho súčinu v priestore komplexných funkcií).

Z podmienok úplnosti a ortonormality vyplýva, že koeficienty rozkladu funkcie $f(x)$ do funkcií $\varphi_n(x)$ sa dajú napísať ako $c_n = \int \varphi_n^*(x) f(x)\, dx$ (podmienku úplnosti vynásobíme funkciou $\varphi_m^*(x)$, preintegrujeme cez x a nakoniec premenujeme m na n). Ak do podmienky úplnosti (zapísanej v premennej x') dosadíme toto vyjadrenie koeficientov a ak potom prehodíme poradie sumy a integrálu (bez toho, aby sme sa starali o matematickú korektnosť tohto kroku – matematické jemnosti má zmysel študovať až v rámci poriadnej teórie distribúcií), dostaneme

$$f(x') = \sum_n \int \varphi_n^*(x) f(x) dx \, \varphi_n(x') = \int \sum_n \varphi_n^*(x) \varphi_n(x') \, f(x)\, dx$$

Integrál zo sumy $\sum_n \varphi_n^*(x)\varphi_n(x')$ sa teda chová presne tak, ako sa má chovať integrál z δ-funkcie. Inými slovami, každý úplný ortonormálny systém funkcií predstavuje istú reprezentáciu δ-funkcie, zapísanú mnemotechnicky ako

reprezentácia cez úplný systém ortonormálnych funkcií:

$$\delta(x - x') = \sum_n \varphi_n^*(x)\varphi_n(x')$$

Fourierova reprezentácia je špeciálnym prípadom takejto reprezentácie. Úplným systémom ortonormálnych funkcií (na celej reálnej osi) sú v tomto prípade imaginárne exponenty $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx}$. Jednotlivé funkcie tohto systému nie sú číslované diskrétnym indexom n, ale spojitým indexom k, preto suma cez n má tvar integrálu cez k

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} e^{-ikx'} dk$$

Vyššie uvedené vyjadrenie pre $\delta(x)$ dostaneme, ak položíme $x' = 0$ ($e^{-ik0} = 1$).

Stručný komentár k uvedeným reprezentáciám: Gaussova a Lorentzova sú vlastne variáciami na tému obdĺžnikovej reprezentácie – v oboch prípadoch ide o nahradenie "hranatých kopcov" z obdĺžnikovej metódy nejakými krajšími kopcami. Vo všetkých prípadoch sa kopce zužujú a zvyšujú, pričom ich plocha ostáva stále rovná jednej a všade okrem bodu $x = 0$ klesajú s klesajúcim ε k nule. Gaussova krivka sa vyskytuje vo fyzike často, medziiným sa bežne používa na vyšetrovanie vlnových balíkov vo všetkých oblastiach fyziky, v ktorých hrajú vlny dôležitú úlohu. Limita $\varepsilon \to 0$ zodpovedá najlokalizovanejšiemu (bodovému) objektu vo vlnovom svete. Lorentzova (rezonančná) krivka opisuje napr. závislosť amplitúdy tlmeného lineárneho harmonického oscilátora od frekvencie vynucujúcej sily a limita $\varepsilon \to 0$ zodpovedá určitým (nie príliš zaujímavým) limitným hodnotám parametrov oscilátora. Dirichletova reprezentácia je trochu odlišná. Pre $\varepsilon \to 0$ neklesajú jednotlivé funkcie pre všetky $x \neq 0$ k nule, ale namiesto toho čoraz rýchlejšie oscilujú a integrály z rýchlo oscilujúcich funkcií sú podľa Dirichletovej vety nulové. Funkcie z Dirichletovej reprezentácie sa objavujú napr. ako difrakčné krivky v optike a limita $\varepsilon \to 0$ zodpovedá prechodu ku geometrickej optike. Iné dôležité miesto výskytu takejto krivky je tzv. nestacionárna poruchová teória v kvantovej mechanike a limita $\varepsilon \to 0$ tu vysvetľuje diskrétne spektrum žiarenia atómov. Fourierova reprezentácia je zo všetkých najdôležitejšia, vyskytuje sa naozaj často, najmä v súvislosti s Fourierovým integrálom. Je to v podstate zamaskovaná Dirichletova reprezentácia, čo je vidno okamžite ak naozaj preintegrujeme cez k a položíme $\varepsilon = 1/K$.

derivácia δ-funkcie

Derivácia δ-funkcie je definovaná na základe integrácie per partes súčinu funkcií. Ak je $R(x)$ niektorá z reprezentácií δ-funkcie, potom per partes integrácia hovorí, že $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)R'(x-a)\,dx = [f(x)R(x-a)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)R(x-a)\,dx$. Toto je motiváciou definície $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-a)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x-a)\,dx$ (prvý člen na pravej strane neprispieva, pretože δ-funkcia je v nekonečne nulová), a teda

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-a)\,dx = -f'(a)}$$

trojrozmerná δ-funkcia

Zovšeobecnenie základného definičného vzťahu δ-funkcie na tri rozmery je celkom priamočiare

$$\boxed{\int f\left(\vec{r}\,'\right)\delta\left(\vec{r}-\vec{r}\,'\right)d^3r' = f\left(\vec{r}\right)}$$

kde pod integrálom sa myslí určitý integrál cez celý priestor.

Pri praktickom počítaní sa často používa nasledovný vzťah

$$\boxed{\delta\left(\vec{r}-\vec{r}\,'\right) = \delta\left(x-x'\right)\delta\left(y-y'\right)\delta\left(z-z'\right)}$$

ktorý vyzerá ako celkom očividný, napriek tomu si však dáme tú námahu, aby sme naozaj ukázali jeho platnosť. To, čo by sme mali ukázať, je

$$\iiint f(x,y,z)\;\delta(x-x').\delta(y-y').\delta(z-z')\;dx\;dy\;dz = f(x',y',z')$$

a to je naozaj pravda, čo nahliadneme okamžite, ak robíme integrály podľa x, y a z jeden po druhom, na základe definície jednorozmernej δ-funkcie.

Načo je dobrý taký opatrný postup? To bude jasné hneď, keď si povieme, že rovnako prirodzene vyzerajúci vzťah v sférických súradniciach neplatí, t.j. že

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \neq \delta(r-r').\delta(\varphi-\varphi').\delta(\vartheta-\vartheta')$$

Aby sme to nahliadli, postupujme rovnako ako v prípade kartézskych súradníc a vypočítajme

$$\iiint f(r,\varphi,\vartheta)\;\delta(r-r').\delta(\varphi-\varphi').\delta(\vartheta-\vartheta')\;r^2\sin\vartheta\;dr\;d\varphi\;d\vartheta = r'^2\sin\vartheta'\;f(r',\varphi',\vartheta')$$

Je jasné, že problémy spôsobuje objavenie sa jakobiánu $J = r^2\sin\vartheta$ a rovnaké problémy sa vyskytnú pre každé súradnice s jakobiánom rôznym od jednej. Zároveň je však vidieť aj liek na tieto problémy: stačí dostať jakobián aj do menovateľa, t.j. položiť

$$\boxed{\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \tfrac{1}{r^2\sin\vartheta}\delta(r-r').\delta(\varphi-\varphi').\delta(\vartheta-\vartheta')}$$

Rovnako sa postupuje v prípade ľubovoľných krivočiarych súradníc. Napríklad v cylindrických súradniciach dostávame

$$\boxed{\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \tfrac{1}{r}\delta(r-r').\delta(\varphi-\varphi').\delta(z-z')}$$

3.2. Greenova funkcia.

Pripomeňme si, ako sme hľadali partikulárne riešenie Poissonovej rovnice s nenulovou pravou stranou v predchádzajúcej kapitole. Našli sme riešenie pre určité konkrétne funkcie na pravej strane (vlastné funkcie laplaciánu) a potom už len stačilo rozložiť danú pravú stranu do týchto konkrétnych funkcií a využiť princíp superpozície. Rozklad danej pravej strany do určitých konkrétnych funkcií predstavoval prakticky počítanie určitých integrálov, čo môže byť niekedy dosť ťažká vec. Greenova funkcia Poissonovej rovnice je riešením Poissonovej rovnice s tak šikovne vybranou konkrétnou funkciou na pravej strane, že pri rozklade ľubovoľnej funkcie do takýchto konkrétnych funkcií netreba počítať nijaké integrály. Takouto šikovnou pravou stranou (nielen pre Poissonovu rovnicu, ale pre ľubovoľnú lineárnu diferenciálnu rovnicu) je δ-funkcia. Na definíciu δ-funkcie, ktorú môžeme zapísať ako $\int f(\vec{r}\,')\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,d^3r' = f(\vec{r})$, sa totiž možno pozerať ako na rozklad funkcie $f(\vec{r})$ do δ-funkcií (premennej $\vec{r}$, indexovaných spojitým indexom $\vec{r}\,'$), pričom koeficienty tohto rozkladu sú hodnoty samotnej funkcie v jednotlivých bodoch.

Ešte raz a pomaly: Funkciu na pravej strane Poissonovej rovnice môžeme považovať za superpozíciu δ-funkcií (pričom koeficienty tejto superpozície sa počítajú triviálne – sú to priamo hodnoty pravej strany v príslušných bodoch)

$$-\frac{1}{\epsilon}\rho(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon}\int \rho(\vec{r}\,')\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,d^3r'$$

Ak budeme poznať Greenovu funkciu (riešenie rovnice s δ-funkciou na pravej strane)

$$\triangle G(\vec{r},\vec{r}\,') = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

potom z princípu superpozície dostaneme okamžite riešenie rovnice s ľubovoľnou pravou stranou (ako príslušnú superpozíciu Greenových funkcií)

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon}\int \rho(\vec{r}\,')G(\vec{r},\vec{r}\,')\;d^3r'.$$

Toto riešenie je však len jedno z mnohých riešení. Zatiaľ sme totiž nijako nešpecifikovali okrajové podmienky a naša úloha preto nemá jednoznačné riešenie.

Naša doterajšia "definícia" Greenovej funkcie nie je úplná. Skutočná definícia obsahuje okrem rovnice aj okrajovú podmienku, ktorú má Greenova funkcia spĺňať. Kým pristúpime k tejto definícii, pripomeňme si, že od partikulárneho riešenia Poissonovej rovnice sme v minulej kapitole požadovali (z celkom rozumných dôvodov) splnenie nulových okrajových podmienok. To isté budeme žiadať aj od Greenovej funkcie. Greenovou funkciou $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ Dirichletovej úlohy pre Poissonovu rovnicu nazývame teda riešenie nasledovnej okrajovej úlohy:

$$\boxed{\triangle G(\vec{r},\vec{r}\,') = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')} \qquad\qquad \boxed{G(\vec{r},\vec{r}\,')|_S = 0}$$

pričom $\vec{r}$ hrá úlohu nezávislej premennej a $\vec{r}\,'$ úlohu parametra, odlišujúceho jednotlivé δ-funkcie.[12]

[12] Poznamenajme, že v definícii Greenovej funkcie pre Neumannovu úlohu sa z istých dôvodov požaduje splnenie síce konštatnej, ale nie nulovej okrajovej podmienky. Neumannovej úlohe sa tu nebudeme venovať (z časových a priestorových dôvodov), skonštatujeme len, že všetko je veľmi podobné ako v Dirichletovej úlohe, ale zas nie úplne, práve kvôli nenulovej okrajovej podmienke.

Partikulárne riešenie Poissonovej rovnice s ľubovoľnou pravou stranou $-\frac{1}{\epsilon}\rho(\vec{r})$ a s nulovou okrajovou podmienkou sa dá zjavne napísať pomocou Greenovej funkcie a princípu superpozície ako

$$\varphi_p(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon}\int \rho(\vec{r}\,')G(\vec{r},\vec{r}\,')\ d^3r'.$$

Vyplýva to priamo z nášho postupu, ale ak by sme aj o tomto postupe nič nevedeli, môžeme sa o tom presvedčiť priamym dosadením do rovnice. Za takto jednoducho vyjadrené partikulárne riešenie sa ovšem musí niečím platiť a naozaj sa platí – nájsť Greenovu funkciu je vo všeobecnosti veľmi ťažká úloha.[13]

Poznámka. V tejto súvislosti je zaujímavé, že ak by sme od Greenovej funkcie požadovali iba splnenie rovnice, bez okrajových podmienok, potom by sme ju našli veľmi ľahko: Coulombov potenciál $\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ je predsa riešením Poissonovej rovnice pre jednotkový bodový náboj a Greenova funkcia nie je vlastne nič iné, ako práve takéto riešenie (akurát z formálnych dôvodov nie pre jednotkový náboj, ale pre náboj veľkosti $-\epsilon$). Coulombov potenciál nespĺňa nulové okrajové podmienky na nijakej konečnej hranici, otázka ovšem stojí tak, či sa neoplatí tieto nulové okrajové podmienky obetovať, ak môžeme tak lacno získať Greenovu funkciu. Odpoveď znie: neoplatí. Greenova funkcia (s nulovými okrajovými podmienkami) je totiž, ako ešte uvidíme, úžasná vec a bez nich by ani zďaleka taká úžasná nebola.

Zopakujme si, čo je také dobré na nulových okrajových podmienkach. Ak mám riešiť nejakú okrajovú úlohu pre veľa rôznych rozložení náboja, ale pri stále rovnakých okrajových podmienkach, potom "Greenova funkcia" s nenulovými okrajovými podmienkami by dávala pre rôzne rozloženia náboja partikulárne riešenia s rôznymi nenulovými hodnotami na hranici. Pre každé takéto partikulárne riešenie by bolo treba znovu riešiť Laplaceovu rovnicu, aby sme splnili predpísané (stále rovnaké) okrajové podmienky. Na rozdiel od toho Greenova funkcia s nulovými okrajovými podmienkami dáva partikulárne riešenia s nulovými hodnotami na hranici, takže Laplaceovu rovnicu stačí riešiť raz pre všetky prípady. Na Greenovej funkcii (s nulovými okrajovými podmienkami) je teda dobré to, že príslušnú Laplaceovu rovnicu netreba riešiť veľakrát, ale len raz. To je na nej dobré, to ešte nie je úžasné. Úžasné je, že ju netreba riešiť ani raz.

Ide o to, že pomocou Greenovej funkcie sa dá vyjadriť nielen partikulárne riešenie s nulovými okrajovými podmienkami, ale priamo riešenie rovnice aj so zadanými okrajovými podmienkami. Základom tohto tvrdenia je nasledovná

Greenova veta

$$\int_V (\varphi\triangle\psi - \psi\triangle\varphi)d^3r = \oint_S (\varphi\partial_n\psi - \psi\partial_n\varphi)dS$$

Dôkaz je veľmi jednoduchý, stačí zobrať Greenovu identitu (pozri časť 2.1.) pre funkcie φ, ψ a odčítať od nej Greenovu identitu pre funkcie ψ, φ.

[13]Poznamenajme, že v definícii Greenovej funkcie sa vyskytuje δ-funkcia bez integrálu, čo je podozrivá vec. Už len poriadna definícia Greenovej funkcie, nieto ešte jej riešenie, je netriviálna záležitosť, vyžadujúca prísne vzaté teóriu distribúcií. Napriek tomu sa však naučíme s Greenovou funkciou celkom dobre narábať a v niektorých prípadoch ju aj nájdeme. Matematická rigoróznosť tejto časti je ovšem, povedzme to jemne, nie práve najvyššia

magic rule

Uvažujme teraz Greenovu vetu, v ktorej je funkcia $\varphi(\vec{r})$ riešením Dirichletovej úlohy pre Poissonovu rovnicu $\triangle\varphi = -\rho/\epsilon$, so zadanou okrajovou podmienkou $\varphi(\vec{r})|_S = f(\vec{r})$ a $\psi(\vec{r})$ nech je Greenova funkcia $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ (pre nejaké konkrétne $\vec{r}\,'$). Greenova veta má v takomto prípade tvar

$$\int_V \left(\varphi(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') + \frac{1}{\epsilon}G(\vec{r},\vec{r}\,')\rho(\vec{r})\right) d^3r = \oint_S \varphi(\vec{r})\partial_n G(\vec{r},\vec{r}\,')\; dS$$

Po integrácii cez δ-funkciu, dosadení okrajových podmienok pre $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ resp. $\varphi(\vec{r})$ a po preznačení $\vec{r} \leftrightarrow \vec{r}\,'$ (aby sa výsledný vzťah lepšie čítal)

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon}\int_V G(\vec{r}\,',\vec{r})\rho(\vec{r}\,')\; d^3r' + \oint_S f(\vec{r}\,')\partial_n' G(\vec{r}\,',\vec{r})\; dS'$$

V prvom z integrálov na pravej strane sa ešte zvykne využiť symetria Greenovej funkcie[14] $G(\vec{r}\,',\vec{r}) = G(\vec{r},\vec{r}\,')$ čím dostaneme

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon}\int_V G(\vec{r},\vec{r}\,')\rho(\vec{r}\,')\; d^3r' + \oint_S f(\vec{r}\,')\partial_n' G(\vec{r}\,',\vec{r})\; dS'}$$

Pozrime sa teraz trochu lepšie, čo sme to vlastne dostali. Na pravej strane rovnice je jednak objemový integrál zodpovedajúci partikulárnemu riešeniu Poissonovej rovnice, ktorý sme tam očakávali, a jednak plošný integrál, ktorý je prekvapením. Funkcia $\varphi(\vec{r})$ na ľavej strane rovnice pritom spĺňa nielen Poissonovu rovnicu, ale aj predpísané okrajové podmienky. Prekvapujúci plošný integrál teda nie je nič iné, ako všeobecné riešenie Laplaceovej rovnice, spĺňajúce dané okrajové podmienky. Akýmsi matematickým kúzlom sa nám podarilo vyjadriť pomocou Greenovej funkcie nielen partikulárne riešenie Poissonovej rovnice, ale aj všeobecné riešenie Laplaceovej rovnice. Táto vec je naozaj taká prekvapujúca, že uvedené vyjadrenie kompletného riešenia Dirichletovej úlohy pre Poissonovu rovnicu pomocou Greenovej funkcie sa v matematickej literatúre často oficiálne nazýva *magic rule*.

Poznať Greenovu funkciu pre danú ohraničenú oblasť teda znamená vedieť v nej okamžite riešiť všetky možné elektrostatické úlohy (ešte ostáva samozrejme vypočítať integrály vystupujúce v magic rule, ale výpočet integrálov je všeobecne považovaný za úlohu podstatne jednoduchšiu, než je riešenie diferenciálnych rovníc, takže keď je riešenie rovnice prevedené na výpočet integrálov, považuje sa rovnica

[14] Keďže v rovnici pre Greenovu funkciu $\triangle G(\vec{r},\vec{r}\,') = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$ závisí δ-funkcia na pravej strane len od rozdielu $\vec{r}-\vec{r}\,'$, človek by mohol ľahko (a chybne) usúdiť, že aj Greenova funkcia bude závisieť len od tohto rozdielu. Podobne z toho, že δ-funkcia na pravej strane sa nezmení pri zámene $\vec{r} \leftrightarrow \vec{r}\,'$, by človek mohol ľahko (a správne) usúdiť, že ani Greenova funkcia sa pri tejto zámene nezmení, a teda že $G(\vec{r}\,',\vec{r}) = G(\vec{r},\vec{r}\,')$.

Prečo je prvá úvaha zlá? Pretože správna úvaha tohto typu je založená na translačnej symetrii a keďže okrajové podmienky translačnú symetriu pokazia, správna úvaha neprejde (prejde však v prípade neohraničeného priestoru, kde je Greenova funkcia daná Coulombovým zákonom a naozaj je funkciou rozdielu $\vec{r}-\vec{r}\,'$).

Prečo je druhá úvaha dobrá? No, ona sama o sebe dobrá nie je, ale symetria Greenovej funkcie vzhľadom na zámenu premennej a parametra sa ľahko dokáže pomocou Greenovej vety. Naozaj, ak v Greenovej vete položíme $\varphi(\vec{r}) = G(\vec{r},\vec{r}\,')$ a $\psi(\vec{r}) = G(\vec{r},\vec{r}\,'')$, potom na pravej strane dostaneme nulu (kvôli nulovým okrajovým podmienkam) a na ľavej strane integrály cez δ-funkciu, takže celkove dostaneme $G(\vec{r}\,',\vec{r}\,'') = G(\vec{r}\,'',\vec{r}\,')$, q.e.d.

za vyriešenú). Je preto prirodzené, že ľudia majú Greenove funkcie radi a hojne ich používajú (a to zďaleka nielen v elektrostatike[15]). A rovnako prirodzené je, že Greenove funkcie sa hľadajú ťažko. Hľadaniu Greenovej funkcie v rôznych situáciách sa tu venovať nebudeme. Uvedieme si len Greenovu funkciu v jednom veľmi špeciálnom prípade, a okrem toho sa naučíme jedno veľmi všeobecné vyjadrenie Greenovej funkcie (cez vlastné funkcie a vlastné hodnoty laplaciánu), ktoré však problém nerieši, len ho prevádza na problém iný (a síce hľadanie vlastných funkcií a vlastných hodnôt laplaciánu).

Špeciálnou, ale pomerne dôležitou oblasťou, pre ktorú vieme nájsť explicitný tvar Greenovej funkcie je oblasť so sférickou hranicou. Greenova funkcia je vlastne potenciál bodového náboja (veľkosti $-\epsilon$), ktorý spĺňa nulovú okrajovú podmienku. Takýto potenciál vieme nájsť metódou imaginárnych nábojov (príklad 4 v časti 2.1.), výsledok je

$$G(\vec{r},\vec{r}\,') = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \frac{R}{r'\left|\vec{r}-\frac{R^2}{r'^2}\vec{r}\,'\right|}\right)$$

kde R je polomer sféry. Poznamenajme, že zatiaľ sme pomocou metódy imaginárnych nábojov vedeli riešiť úlohy pre sféru s konštatným potenciálom, teraz to pomocou magic rule a Greenovej funkcie vieme pre ľubovoľné rozloženie potenciálu na sfére.

Okrem špeciálneho prípadu Greenovej funkcie pre vnútro gule spomeňme ešte jedno všeobecné, aj keď nie explicitné vyjadrenie Greenovej funkcie. Reprezentácia δ-funkcie cez úplný systém ortonormálnych funkcií $\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \sum_n \varphi_n^*(\vec{r}\,')\varphi_n(\vec{r})$ a lineárnosť Poissonovej rovnice umožňujú univerzálne a často používané vyjadrenie Greenovej funkcie cez vlastné funkcie a vlastné hodnoty laplaciánu. K jeho získaniu si stačí uvedomiť, že riešením Poissonovej rovnice s pravou stranou $\varphi_n^*(\vec{r}\,')\varphi_n(\vec{r})$ je $\frac{1}{\lambda_n}\varphi_n^*(\vec{r}\,')\varphi_n(\vec{r})$, kde λ_n je príslušná vlastná hodnota (vidno okamžite z toho, že $\varphi_n^*(\vec{r}\,')$ je z hľadiska laplaciánu konštanta). Riešenie pre lineárnu kombináciu pravých strán dostaneme ako rovnakú lineárnu kombináciu riešení, t.j.

$$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \sum_n \frac{1}{\lambda_n}\varphi_n^*(\vec{r}\,')\varphi_n(\vec{r})$$

Poznámka. Greenova funkcia a magic rule sa často používajú v naozaj ťažkých úlohách, kde v niektorej etape, alebo dokonca vo viacerých, používame nie presné, ale iba približné metódy. V mnohých prípadoch napríklad poznáme vlastné funkcie a vlastné hodnoty laplaciánu len v rámci určitého priblíženia. Ďalej nekonečný rad vo vyjadrení Greenovej funkcie väčšinou nevieme explicitne spočítať, takže z neho berieme len konečne veľa členov, a nakoniec integrály v magic rule tiež často vyžadujú približné, numerické výpočty. Dôležité je pritom uvedomiť si, že samotná metóda je úplne presná, a všetky tri priblíženia je možné držať pod kontrolou (t.j. za cenu väčšej námahy dosiahnuť teoreticky ľubovoľnú presnosť).

[15]Greenove funkcie používané v rôznych oblastiach fyziky nie sú vždy a všade úplne analogické Greenovým funkciám z elektrostatiky. Človek sa teda môže ľahko stretnúť s niečím, čo sa tiež volá Greenova funkcia, a pritom sa nezanedbateľne líši od toho, čo sme my tu nazývali Greenovou funkciou. Prakticky všetky Greenove funkcie sú však takým alebo onakým spôsobom definované cez δ-funkciu a všetky umožňujú pomerne jednoduché vyjadrenie všeobecného riešenia danej úlohy. Greenove funkcie v elektrostatike teda nie sú jednoznačným prototypom všetkých Greenových funkcií, ale rozhodne sú typickým príkladom

Príklady

1. integrovanie s δ-funkciou
(niekoľko jednoduchých ilustračných príkladov)

a) $\int_{-5}^{10} (x^2-1)\ \cos 2x\ \delta(x)\ dx$	b) $\int_{-5}^{10} (x^2-1)\ \cos x\ \delta(2x)\ dx$
c) $\int_{-5}^{10} \cos 2x\ \delta(x^2-1)\ dx$	d) $\int_{-5}^{10} (x^2-1)\ \delta(\cos 2x)\ dx$
e) $\int \exp(-3r^2)\ \delta(\overrightarrow{r}-2\overrightarrow{e_1})\ d^3r$	f) $\int \exp(-3r^2)\ \delta(x-2)\ d^3r$
g) $\int \cos(\varphi-\theta)\ \delta(\overrightarrow{r}-2\overrightarrow{e_1})\ d^3r$	h) $\int \exp(-3r^2)\ \delta(r-2)\ d^3r$

2. reprezentácie δ-funkcie
(nepríliš dôležitý príklad, ktorý je tu len pre akúsi úplnosť)
Ukážte, že Gaussova, Lorentzova, Dirichletova a Fourierova reprezentácia δ-funkcie naozaj konvergujú k δ-funkcii, t.j. ukážte, že ak $r(x,\varepsilon)$ je príslušná reprezentácia, potom $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)r(x,\varepsilon)dx = f(0)$.
(Návod: substitúcia $x \to \varepsilon y$, pri Dirichletovi sa zíde aj $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx = \pi$, a Fourie je Dirichlet s $\varepsilon = 1/K$.)

3. magic rule v guli
(príklad na použitie explicitne známej Greenovej funkcie)
a) Ukážte, že normálová derivácia Greenovej funkcie vystupujúca v magic rule, je v prípade oblasti so sférickou hranicou s polomerom R rovná $\frac{r'^2-R^2}{4\pi R|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$.
b) Vodivá sféra s polomerom R je na rovníku rozdelená izolujúcou vrstvou na dve polsféry. Potenciál hornej polsféry je V, potenciál dolnej $-V$. V strede gule ohraničenej touto sférou je homogénne nabitá gulička (polomer a, náboj q). Nájdite potenciál v guli v tvare integrálu (integrál v magic rule počítať netreba, v skutočnosti sa v tomto prípade nedá vyjadriť v elementárnych funkciách).

4. magic rule v polpriestore
(ďalší príklad na použitie Greenovej funkcie explicitne nájdenej metódou imaginárnych nábojov)
a) Metódou imaginárnych nábojov nájdite Greenovu funkciu pre polpriestor.
b) Priestor je rozdelený rovinou na dva polpriestory. V rovine je štvorec so stranou a, oddelený od zvyšku roviny tenkou izolačnou vrstvou. Štvorec je držaný na potenciále V, zvyšok roviny je uzemnený. V jednom polpriestore je homogénne nabitá kocka (hrana b, náboj q, poloha stredu $\vec{R}$. Nájdite potenciál v celom priestore v tvare integrálu (integrály počítať netreba).

5. Greenova funkcia pre štvorec
(príklad na numerickú sumáciu Greenovej funkcie v tvare nekonečného radu)
a) Napíšte vyjadrenie 2-rozmernej Greenovej funkcie pre štvorec cez vlastné funkcie a vlastné hodnoty laplaciánu (ktoré sme explicitne našli v časti 2.2).
b) Pre štvorec $0 \le x, y \le \pi$ nájdite G pre $\vec{r} = (\pi/4, \pi/4)$ a $\vec{r}\,' = (3\pi/4, 3\pi/4)$ s presnosťou na jedno percento a na jednu desatinu percenta. Porovnajte počet členov radu, ktoré treba zobrať v týchto dvoch prípadoch. (Počítač je tvoj kamarát.)

3

ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY

Po prepísaní Maxwellových rovníc do rovníc pre elmag potenciály (v časti 1.4) sme videli, že v bežne používaných kalibráciách hrá pri opise elektromagnetických javov kľúčovú úlohu vlnová rovnica. V Lorentzovej kalibrácii sú rovnicami pre elmag potenciály vlnové rovnice, v Coulombovej kalibrácii je to Poissonova rovnica a vlnová rovnica. O Poissonovej rovnici sme hovorili v kapitole venovanej elektrostatike. A podobne, ako pomáha porozumenie Poissonovej rovnici chápaniu elektrostatiky a riešeniu jej úloh, pomáha porozumenie vlnovej rovnici chápaniu elektrodynamiky a riešeniu jej úloh. Preto sa teraz budeme podrobnejšie venovať vlnovej rovnici.

Vlnová rovnica je lineárna parciálna diferenciálna rovnica a platí pre ňu, ako pre všetky lineárne rovnice, princíp superpozície. To medziiným znamená, že všeobecné riešenie rovnice s nenulovou pravou stranou je rovné všeobecnému riešeniu rovnice s nulovou pravou stranou plus jednomu konkrétnemu (partikulárnemu) riešeniu rovnice s nenulovou pravou stranou. Pri vyšetrovaní vlnovej rovnice budeme postupovať tak, že najprv sa budeme venovať všeobecnému riešeniu rovnice s nulovou pravou stranou a potom, v nasledujúcej kapitole, partikulárnemu riešeniu rovnice s nenulovou pravou stranou. Dôvodom takéhoto postupu je fyzikálny význam týchto dvoch riešení, prvé z nich predstavuje elmag vlny, druhé úzko súvisí s elmag žiarením. Vzhľadom na mimoriadnu dôležitosť oboch týchto vecí im radšej venujeme dve samostatné kapitoly, ktoré ovšem navzájom veľmi úzko súvisia.

Vlnová rovnica sa v zásade rieši spôsobom, ktorý sme sa naučili pri Poissonovej rovnici – riešenie sa uhádne. A podobne ako pri Poissonovej rovnici sa uhádne nie celé riešenie na prvý šup, uhádne sa len jeho tvar a detaily sa potom dopočítajú. Riešenie založené na čiastočnom uhádnutí je však úplným riešením len vtedy, ak máme dokázanú vetu o jednoznačnosti riešenia. Takáto veta naozaj platí aj pre vlnovú rovnicu a my ju sformulujeme a dokážeme, ale až v nasledujúcej kapitole. Dôvod je jednoduchý: veta platí aj pre vlnovú rovnicu s nenulovou pravou stranou, nielen pre špeciálny prípad nulovej pravej strany. Preto je prirodzené ju dokázať v kapitole venovanej všeobecnému prípadu rovnice s nenulovou pravou stranou. A z nej potom vyplynie aj jednoznačnosť riešení rovnice s nulovou pravou stranou, nájdených v tejto kapitole.

Vlnová rovnica opisuje ešte jednu veľkú časť fyziky, ktorá z nejakých dôvodov vypadla z mnohých základných kurzov fyziky. Reč je o akustike. A aby sa akustika necítila úplne ako od macochy, venujeme jej v tejto kapitole kde-tu aspoň zmienku.

1. Vlny v jednom rozmere (opakovanie)

Elektromagnetické vlny sú trojrozmerné v dvoch zmysloch. Jednak sú to vlny v trojrozmernom priestore a jednak veličiny "ktoré sa vlnia" (polia $\vec{E}$, $\vec{B}$ resp. vektorový potenciál $\vec{A}$) sú vektorové veličiny. Napriek tejto dvojakej trojrozmernosti majú elmag vlny veľa vlastností spoločných so svojimi jednorozmernými sestrami. Na druhej strane, napriek tejto príbuznosti prináša dvojaká trojrozmernosť veľa špecifických noviniek. Aby sme si jasne uvedomili, čo sú všeobecné vlastnosti všetkých typov vĺn a čo nové so sebou prinášajú tri rozmery, zopakujeme si stručne známe veci z jednorozmerného prípadu t.j. z kmitov struny. Potom prejdeme ku skalárnym vlnám v trojrozmernom prípade a nakoniec k vektorovým vlnám v trojrozmernom prípade.

Toto opakovanie jednorozmerného prípadu možno samozrejme preskočiť. Jednoduchým testom či je takéto preskočenie vhodné alebo nie, je nasledovná otázka: *Aké vlny sa "vlnia" na gitarovej strune – postupné alebo stojaté?* Kým budete čítať ďalej, naozaj sa zamyslite na touto otázkou a sformulujte (stačí sám pre seba) jasnú a jednoznačnú odpoveď.

Nie, nie, nie – nemáte čítať ďalej, kým nemáte sformulovanú jasnú odpoveď (či už s rozmýšľaním alebo bez neho). Takže aká je vaša odpoveď?

No dobre, tak poďme čítať ďalej. Bežná odpoveď *"stojaté!"* nie je síce nesprávna, ale rozhodne to nie je tá najlepšia odpoveď. Oveľa správnejšiou odpoveďou je mierny smiech, asi taký, aký by v nás vyvolala otázka či platí $4 = 2 + 2$ alebo $4 = 3 + 1$? Samozrejme, že platia obe tieto rovnosti, rovnako ako platí, že na gitarovej strune sa "vlnia" stojaté aj postupné vlny.

Stojaté a postupné vlny nie sú dve rôzne veci, ale skôr dva rôzne jazyky používané na opis tých istých vecí. Každú stojatú vlnu možno napísať ako superpozíciu postupných vĺn a naopak. Ak vám toto nie je celkom jasné, radšej nič nepreskakujte.

Takže poďme na tie vlny v jednom rozmere, čo sú napríklad vlny na strune. Kmity (pozdĺžne aj priečne) struny, na ktorú nepôsobia nijaké vonkajšie sily, sú opísané vlnovou rovnicou (pripomeňme, že táto rovnica je dôsledkom Newtonovej pohybovej rovnice a Hookovho zákona)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(x,t) - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}\, u(x,t) = 0$$

kde u predstavuje výchylku struny (či už pozdĺžnu alebo priečnu) v mieste x a v čase t. Na riešenie tejto rovnice sa používajú dva základné prístupy, ktorým budeme hovoriť d'Alambertov a Fourierov. Prvý z nich vedie prirodzene k pojmu postupných vĺn, druhý k pojmu stojatých vĺn. V prípade elmag vĺn sa ukáže byť omnoho vhodnejším Fourierov prístup, takže opakovanie d'Alambertovho prístupu je tu len kvôli istej úplnosti a môže sa preskočiť.

d'Alambertov prístup je založený na zistení, že funkcie typu $u(x \pm v \cdot t)$ sú riešeniami vlnovej rovnice na priamke t.j. neohraničenej strune. Tieto riešenia sa nazývajú postupné vlny (pozri poznámku na str. 8). Avšak nie každé riešenie vlnovej rovnice na priamke je postupnou vlnou. Napríklad súčet dvoch postupných vĺn postupujúcich opačným smerom je riešením vlnovej rovnice (princíp superpozície), ale nie je postupnou vlnou. Význam postupných vĺn nespočíva v tom, že by to boli jediné riešenia vlnovej rovnice, ale v tom, že všetky riešenia vlnovej rovnice sa dajú písať ako superpozície postupných vĺn. Vyjadrenie riešenia vlnovej rovnice s danými počiatočnými podmienkami cez superpozíciu postupných vĺn sa dá pomerne ľahko uhádnuť. (Uhádnutie a jeho jednoduché preverenie je základnou technikou d'Alambertovho prístupu.)

Ak je počiatočná výchylka zadaná ľubovoľnou funkciou $f(x)$ a počiatočná rýchlosť zmeny výchylky $\dot{u} \equiv \frac{\partial u}{\partial t}$ je nulová, t.j. ak

$$u(x,0) = f(x).$$
$$\dot{u}(x,0) = 0$$

potom

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\ (\ f(x + v \cdot t) + f(x - v \cdot t)\ )$$

počiatočná výchylka sa rozdelí napoly a každá polovica sa rozbehne svojim smerom. Z princípu superpozície je jasné, že $u(x,t)$ je riešením vlnovej rovnice a priamym dosadením sa dá okamžite presvedčiť, že spĺňa uvedené počiatočné podmienky.

Ak je počiatočná výchylka nulová a počiatočná rýchlosť zmeny výchylky je zadaná ľubovoľnou funkciou $h(x)$, t.j. ak

$$u(x,0) = 0$$
$$\dot{u}(x,0) = h(x)$$

potom

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\ (\ H(x + v \cdot t) - H(x - v \cdot t)\ ) \qquad \text{kde} \qquad H(x) = \frac{1}{v}\int h(x)\ dx$$

("primitívna funkcia k rýchlosti zmeny počiatočnej výchylky sa rozdelí napoly, a každá polovica sa rozbehne so svojim znamienkom svojim smerom"). Znova je z princípu superpozície jasné, že $u(x,t)$ je riešením vlnovej rovnice a znova sa priamym dosadením dá okamžite presvedčiť, že spĺňa uvedené počiatočné podmienky.

Princíp superpozície a priame dosadenie nám dá riešenie aj vo všeobecnom prípade počiatočných podmienok

$$u(x,0) = f(x)$$
$$\dot{u}(x,0) = h(x)$$

a síce

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\ (\ f(x + v \cdot t) + f(x - v \cdot t) + H(x + v \cdot t) - H(x - v \cdot t)\ )$$

A tým je úloha na priamke raz a navždy úplne vyriešená v tvare superpozície štyroch postupných vĺn. (Čo ale neznamená, že neexistuje aj iný užitočný zápis toho riešenia, ktorý má podstatne iný tvar.)

Z riešenia vlnovej rovnice na priamke sa dá jednoduchými trikmi nájsť (uhádnuť) riešenie rovnice na polpriamke s pevným alebo voľným koncom. Pevnému koncu v bode $x = 0$ zodpovedá okrajová podmienka $u(0,t) = 0$, voľnému koncu podmienka $u'(0,t) \equiv \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0$ (voľný koniec totiž zodpovedá nulovej pružnej sile a tá je daná podľa Hookovho zákona deriváciou výchylky podľa x). Trik spočíva vo vhodnom rozšírení problému z polpriamky na celú priamku. Nech sú napríklad na polpriamke $x \geq 0$ zadané počiatočné podmienky

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \bar{f}(x) \\ \dot{u}(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

Doplňme tieto počiatočné podmienky na celú priamku tak, aby výsledná funkcia bola nepárna pre pevný a párna pre voľný koniec t.j. definujme funkciu $f(x)$ takto

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & \bar{f}(x) & \text{pre } x \geq 0 \\ & = & -\bar{f}(-x) & \text{pre } x < 0 \end{array} \quad \text{pevný koniec}$$

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & \bar{f}(x) & \text{pre } x \geq 0 \\ & = & \bar{f}(-x) & \text{pre } x < 0 \end{array} \quad \text{voľný koniec}$$

Riešenie vlnovej rovnice na priamke s počiatočnými podmienkami danými funkciou $f(x)$ a nulovou počiatočnou rýchlosťou už poznáme a toto riešenie je riešením rovnice aj na polpriamke pričom na nej spĺňa počiatočné podmienky. Ostáva teda len zistiť, či spĺňa aj okrajovú podmienku a to spĺňa, ako sa znovu ľahko presvedčíme priamym dosadením. Iná možnosť je nerobiť mechanické dosadenie, ale predstaviť si, čo dajú v bode $x = 0$ dve oproti sebe bežiace polovice párnej resp. nepárnej počiatočnej podmienky. Takéto predstavenie si riešenia umožní uvidieť, že doľava bežiaca polovica, ktorá v bode $x = 0$ "opúšťa" polpriamku, sa v tomto bode stretá s doprava bežiacou polovicou, ktorá na polpriamku "prichádza". Obe polovice majú pritom v tomto bode presne rovnakú alebo presne opačnú hodnotu, takže z hľadiska polpriamky to vyzerá tak, ako keby sa doľava idúca vlna odrážala od pevného resp. voľného konca s opačnou resp. rovnakou fázou.

Nech sú teraz na polpriamke $x \geq 0$ zadané počiatočné podmienky

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0 \\ \dot{u}(x,0) &= \bar{h}(x) \end{aligned}$$

Znovu doplníme tieto počiatočné podmienky na celú priamku tak, aby výsledná funkcia bola nepárna pre pevný a párna pre voľný koniec.

$$\begin{array}{rcll} h(x) & = & \bar{h}(x) & \text{pre } x \geq 0 \\ & = & -\bar{h}(-x) & \text{pre } x < 0 \end{array} \quad \text{pevný koniec}$$

$$\begin{array}{rcll} h(x) & = & \bar{h}(x) & \text{pre } x \geq 0 \\ & = & \bar{h}(-x) & \text{pre } x < 0 \end{array} \quad \text{voľný koniec}$$

Riešenie vlnovej rovnice na priamke je znova riešením rovnice aj na polpriamke a znovu sa možno ľahko presvedčiť, že na nej spĺňa počiatočné podmienky aj okrajovú podmienku. Riešenie rovnice s všeobecnými počiatočnými podmienkami $u(x,0) = \bar{f}(x)$, $\dot{u}(x,0) = \bar{h}(x)$ je dané súčtom riešení dvoch predchádzajúcich prípadov.

Analogickými trikmi sa dá z postupných vĺn poskladať riešenie vlnovej rovnice na úsečke s pevnými alebo voľnými koncami. Tentoraz treba rozšíriť počiatočné podmienky z úsečky na vhodnú periodickú funkciu na priamke. Ak sú na úsečke $0 \leq x \leq l$ zadané počiatočné podmienky

$$u(x,0) = \bar{f}(x)$$
$$\dot{u}(x,0) = \bar{h}(x)$$

definujeme funkcie $f(x)$, $h(x)$ periodické s periódou $2l$ nasledovne

$$\left.\begin{array}{rcll} f(x) & = & \bar{f}(x) & \text{pre } 0 \leq x \leq l \\ & = & -\bar{f}(-x) & \text{pre } -l \leq x < 0 \\ h(x) & = & \bar{h}(x) & \text{pre } 0 \leq x \leq l \\ & = & -\bar{h}(-x) & \text{pre } -l \leq x < 0 \end{array}\right. \quad \text{pevné konce}$$

$$\left.\begin{array}{rcll} f(x) & = & \bar{f}(x) & \text{pre } 0 \leq x \leq l \\ & = & \bar{f}(-x) & \text{pre } -l \leq x < 0 \\ h(x) & = & \bar{h}(x) & \text{pre } 0 \leq x \leq l \\ & & \bar{h}(-x) & \text{pre } -l \leq x < 0 \end{array}\right. \quad \text{voľné konce}$$

Znova sa priamym dosadením alebo správnym predstavením si riešenia presvedčíme, že riešenia na priamke s počiatočnými podmienkami $f(x)$, $h(x)$ sú riešeniami na úsečke s danými počiatočnými a okrajovými podmienkami a znova ich môžeme interpretovať ako odraz s opačnou fázou na pevnom a rovnakou na voľnom konci.

Výhodou d'Alambertovho prístupu je jednoduché vyjadrenie riešenia pomocou počiatočných podmienok a jasné nahliadnutie niektorých všeobecne známych vlastností vĺn (napríklad odrazu vĺn na pevných a voľných koncoch alebo toho, že postupné vlny tvoria vhodný jazyk na opis všetkých vĺn, t.j. všetkých riešení vlnovej rovnice). Nevýhodou je, že tento postup sa nedá dobre zovšeobecniť na viacrozmerné prípady. Vo viacerých rozmeroch sú v podstate dva problémy: jednak počiatočnú podmienku by tu bolo treba rozdeliť na nekonečne veľa častí a poslať ich nekonečne veľa smermi (ale keď rozdelíme konečnú počiatočnú podmienku na nekonečne veľa častí, budú tieto časti nulové) a jednak vôbec nie je jasné, ako dopĺňať (v duchu triku s úsečkou v jednom rozmere) počiatočnú podmienku v nejakej nepravidelnej ohraničenej oblasti na celý priestor. To neznamená, že d'Alambertov prístup nehrá vo viacerých rozmeroch nijakú úlohu (d'Alambertovo riešenie na polpriamke sa dá využiť pre riadiálnu premennú v sférických súradniciach), ale v porovnaní s Fourierovým prístupom hrá d'Alambertov prístup vo viacerých rozmeroch v podstate zanedbateľnú úlohu.

Fourierov prístup nie je nič iné ako metóda separácie premenných známa z druhej kapitoly (časť 2.2) a spočíva v hľadaní riešenia v špeciálnom tvare a to v tvare súčinu dvoch funkcií, z ktorých jedna závisí len od x a druhá len od t. Nie každé riešenie vlnovej rovnice sa však dá napísať v takomto tvare a preto to, čo takto nájdeme budú len určité špeciálne riešenia. Tieto špeciálne riešenia sú ovšem významné tým, že sa z nich dá poskladať (v tvare superpozície) všeobecné riešenie.

Dosadením funkcie $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ do vlnovej rovnice dostaneme

$$X^{''}(x) \cdot T(t) - \frac{1}{v^2} \cdot X(x) \cdot \ddot{T}(t) = 0$$

a predelením tejto rovnice funkciou $u = X \cdot T$ dostaneme

$$\frac{X^{''}(x)}{X(x)} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = 0$$

ľavá strana je súčtom dvoch členov, z ktorých každý závisí len od jednej premennej. Ak teraz fixujeme jednu z nich t.j. ak položíme napr. $t = t_{\mathrm{fix}}$, stane sa člen závislý len od tejto premennej konštantou (nazvime ju α) a z celej rovnice potom vyplýva, že tejto konštante musí byť rovný aj druhý člen a to pre ľubovoľnú hodnotu druhej premennej t.j. že

$$\frac{X^{''}(x)}{X(x)} = \alpha \equiv \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\ddot{T}(t_{\mathrm{fix}})}{T(t_{\mathrm{fix}})}$$

Ak naopak fixujeme premennú x, dostaneme analogicky

$$\frac{1}{v^2} \cdot \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{X^{''}(x_{\mathrm{fix}})}{X(x_{\mathrm{fix}})} = \alpha$$

Pre funkcie $X(x)$ a $T(t)$ tak dostávame rovnice

$$X^{''} = \alpha \cdot X$$
$$\ddot{T} = \alpha \cdot v^2 \cdot T$$

Pôvodná parciálna diferenciálna rovnica sa nám takto rozdelila (separovala) na dve obyčajné diferenciálne rovnice, ktorých riešenie je už pomerne jednoduché.

Ak uvažujeme riešenie vlnovej rovnice na úsečke s pevnými resp. voľnými koncami, potom sa okrajové podmienky $u(0,t) = u(l,t) = 0$ (pevné konce) resp. $u'(0,t) = u'(l,t) = 0$ (voľné konce) prejavia na funkcii $X(x)$. Ak totiž funkcia $T(t)$ nie je identicky rovná nule, potom z okrajových podmienok vyplýva

$$X(0) = X(l) = 0 \qquad \text{pevné konce}$$
$$X'(0) = X'(l) = 0 \qquad \text{voľné konce}$$

Ak je funkcia T(t) identicky rovná nule, potom je identicky rovné nule celé riešenie $u(x,t)$. Toto je skutočne riešením našej úlohy pre triviálny prípad nulových počiatočných podmienok a len pre tento prípad. Aby sme sa nemuseli k tomuto triviálnemu prípadu stále vracať (v poznámkach podobných tejto), explicitne ho vylúčime z našich ďalších úvah, vedomí si toho, že toto triviálne riešenie existuje.

V prípade riešenia vlnovej rovnice na priamke sa nepožaduje splnenie nijakých okrajových podmienok t.j. nijakých podmienok pre $u(x,t)$ v limite $x \to \pm\infty$, požaduje sa zatiaľ len ohraničenosť riešenia na celej priamke. Ohraničenosť riešenia je veľmi prirodzená požiadavka, pretože neohraničenosť znamená nekonečne veľké výchylky a tie nemajú dobrý fyzikálny zmysel, keďže samotná vlnová rovnica je odvodená z predpokladu malých výchyliek (len pre ne totiž platí Hookov zákon). Neohraničené riešenia teda považujeme za nefyzikálne a vždy (nielen na priamke) hľadáme len ohraničené riešenia vlnovej rovnice. Ohraničenosť funkcie $u(x,t)$ sa prejaví na funkciách $X(x)$ a $T(t)$. Z ohraničenosti $u(x,t)$ vyplýva pre $T(t)$ nie všade rovné nule ohraničenosť $X(x)$ a pre $X(x)$ nie všade rovné nule ohraničenosť $T(t)$.

Riešeniami rovnice pre funkciu $X(x)$ sú funkcie $e^{\sqrt{\alpha}\cdot x}$, $e^{-\sqrt{\alpha}\cdot x}$ pre $\alpha > 0$, funkcie $\sin\sqrt{-\alpha}\cdot x$, $\cos\sqrt{-\alpha}\cdot x$ pre $\alpha < 0$ a funkcia $a\cdot x+b$ pre $\alpha = 0$. Okrajové podmienky v prípade úsečky a podmienka ohraničenosti v prípade priamky vylučujú spomedzi riešení exponenty a nekonštantnú lineárnu funkciu (pre voľné konce a pre priamku prežije okrajové podmienky lineárna funkcia v podobe konštantnej funkcie $X = b$). Úloha má teda riešenie len pre $\alpha \leq 0$. Pre úsečku navyše okrajová podmienka v bode $x = 0$ vylučuje spomedzi riešení cosínus v prípade pevného a sínus v prípade voľného konca. Okrajová podmienka v bode $x = l$ okrem toho určuje, pre aké α má vôbec úloha riešenie. Aby mohla byť táto úloha splnená, musí byť $\sqrt{-\alpha}$ rovná celočíselnému násobku $\frac{\pi}{l}$. Celkove teda máme

$$X(x) = \sin\,(k\cdot x) \quad \text{kde} \quad k = \frac{n\pi}{l} \quad \text{pevné konce}$$

$$X(x) = \cos\,(k\cdot x) \quad \text{kde} \quad k = \frac{n\pi}{l} \quad \text{voľné konce}$$

$$\begin{aligned} X(x) &= \sin\,(k\cdot x) \\ X(x) &= \cos\,(k\cdot x) \quad \text{kde } k \text{ je ľubovoľné} \quad \text{žiadne konce (priamka)} \end{aligned}$$

a v prípade voľných koncov je riešením úlohy ešte aj konštantná funkcia $X(x) = b$

Riešeniami rovnice pre funkciu $T(t)$ sú pre $\alpha < 0$ funkcie

$$T(t) = \sin\,(\omega\cdot t) \qquad \text{a} \qquad T(t) = \cos\,(\omega\cdot t) \qquad \text{kde} \qquad \omega = \sqrt{-\alpha\cdot v^2} = k\cdot v$$

Pre $\alpha = 0$ je riešením lineárna funkcia, ktorá ak nie je konštantná, tak vedie na s časom neohraničene rastúce resp. klesajúce, t.j. nefyzikálne riešenie $u(x,t)$. Jediným fyzikálnym riešením pre $\alpha = 0$ je teda súčin dvoch konštantných funkcií, čiže funkcia $u(x,t) = c$.

Riešeniami vlnovej rovnice v hľadanom tvare sú teda funkcie

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sin\,(k\cdot x)\ \sin\,(\omega\cdot t) \qquad & u(x,t) &= \sin\,(k\cdot x)\ \cos\,(\omega\cdot t) \\ u(x,t) &= \cos\,(k\cdot x)\ \sin\,(\omega\cdot t) \qquad & u(x,t) &= \cos\,(k\cdot x)\ \cos\,(\omega\cdot t) \end{aligned}$$

ktorým sa hovorí stojaté vlny, názov pochádza z toho, že celkový profil vlny sa nehýbe, len sa s časom periodicky zväšuje a zmenšuje. (V prípade voľných koncov je riešením úlohy ešte aj konštantná funkcia $u(x,t) = c$.)

Nie každé riešenie vlnovej rovnice je ovšem stojatou vlnou. Superpozícia stojatých vĺn je riešením vlnovej rovnice (princíp superpozície), ale nie je stojatou vlnou. Význam stojatých vĺn nespočíva v tom, že by to boli jediné riešenia vlnovej rovnice, ale v tom, že všetky riešenia vlnovej rovnice sa dajú písať ako superpozície stojatých vĺn. Ukážeme, že je tomu naozaj tak.

Superpozícia všetkých možných stojatých vĺn nám dáva

pevné konce:

$$u(x,t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n \;\sin\,(k_n \cdot x)\;\cos\,(\omega_n \cdot t) \;+\; c_n' \;\sin\,(k_n \cdot x)\;\sin\,(\omega_n \cdot t)$$

voľné konce:

$$u(x,t) \;=\; c \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n \;\cos\,(k_n \cdot x)\;\cos\,(\omega_n \cdot t) \;+\; c_n' \;\cos\,(k_n \cdot x)\;\sin\,(\omega_n \cdot t)$$

žiadne konce (priamka):

$$\begin{aligned} u(x,t) \;=\; \int_0^{\infty} & c(k)\;\sin\,(k \cdot x)\;\cos\,(\omega \cdot t) \;+\; c'(k)\;\sin\,(k \cdot x)\;\sin\,(\omega \cdot t)\;+ \\ & +\;\bar{c}(k)\;\cos\,(k \cdot x)\;\cos\,(\omega \cdot t)\;+\;\bar{c}'(k)\;\cos\,(k \cdot x)\;\sin\,(\omega \cdot t)\quad dk \end{aligned}$$

kde $k_n = \frac{n\pi}{l}$, $\omega_n = \frac{n\pi v}{l}$ a $\omega(k) = k \cdot v$ (pričom argument k sa v $\omega(k)$ často kvôli väčšej prehľadnosti zápisov vynecháva).

Po dosadení počiatočných podmienok do týchto superpozícií dostaneme

pevné konce:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \;\sin\,(k_n \cdot x) \qquad\qquad h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n' \;\omega_n\;\sin\,(k_n \cdot x)$$

voľné konce:

$$f(x) \;=\; c \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n \;\cos\,(k_n \cdot x) \qquad\qquad h(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n'\,\omega_n \;\cos\,(k_n \cdot x)$$

žiadne konce (priamka):

$$\begin{aligned} f(x) \;&=\; \int_0^{\infty} c(k)\;\sin\,(k \cdot x)\;+\;\bar{c}(k)\;\cos\,(k \cdot x)\quad dk \\ h(x) \;&=\; \int_0^{\infty} c'(k)\,\omega(k)\;\sin\,(k \cdot x)\;+\;\bar{c}'(k)\,\omega(k)\;\cos\,(k \cdot x)\quad dk \end{aligned}$$

Uvedené rady a integrály však nie sú nič iné ako Fourierove rady resp. Fourierove integrály pre funkcie $f(x)$ a $h(x)$. A keďže každá slušná funkcia sa dá rozvinúť do Fourierovho radu resp. integrálu, znamená to, že superpozíciou stojatých vĺn sme schopní splniť ľubovoľné slušné počiatočné podmienky (slušnosť funkcie je tu daná predpokladmi vety o Fourierovom rade resp. integrále).

Koeficienty v našich superpozíciách stojatých vĺn sú pritom dané známymi vzťahmi

pevné konce:

$$c_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\;\sin(k_n \cdot x)\;dx \qquad\qquad c_n' = \frac{1}{\omega_n}\;\frac{2}{l}\int_0^l h(x)\;\sin(k_n \cdot x)\;dx$$

voľné konce (pri označení $c = \frac{c_0}{2}$):

$$c_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\;\cos(k_n \cdot x)\;dx \qquad\qquad c_n' = \frac{1}{\omega_n}\;\frac{2}{l}\int_0^l h(x)\;\cos(k_n \cdot x)\;dx$$

žiadne konce (priamka):

$$c(k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \sin(k\cdot x)\ dx$$
$$\bar{c}(k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \cos(k\cdot x)\ dx$$
$$c'(k) = \frac{1}{\omega(k)}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\ \sin(k\cdot x)\ dx$$
$$\bar{c}'(k) = \frac{1}{\omega(k)}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\ \cos(k\cdot x)\ dx$$

V prípade riešenia na priamke je oveľa prehľadnejší zápis pomocou komplexnej exponenty. Ak zapíšeme Fourierov integrál vo vyjadrení počiatočných podmienok v komplexnom tvare, dostaneme

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k)\ e^{ikx}\cos(\omega t) + C'(k)\ e^{ikx}\sin(\omega t)\ dk$$

čo v dôsledku $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$ a $\sin(\omega t) = -\frac{i}{2}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$ prejde na

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(k)\ e^{i(kx-\omega t)} + \beta(k)\ e^{i(kx+\omega t)}\ dk$$

kde $\alpha(k) = \frac{1}{2}(C(k) + iC'(k))$, $\beta(k) = \frac{1}{2}(C(k) - iC'(k))$. Explicitné vyjadrenie koeficientov $\alpha(k)$ a $\beta(k)$ je (pozri nasledovnú matematickú poznámku)

$$\alpha(k) = \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(x) + \frac{i}{\omega(k)}h(x)\right)\ e^{-ikx}\ dx$$
$$\beta(k) = \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(x) - \frac{i}{\omega(k)}h(x)\right)\ e^{-ikx}\ dx$$

Superpozície stojatých vĺn[1] s uvedenými koeficientami sú riešeniami vlnovej rovnice s danými počiatočnými podmienkami. Fourierov postup nás teda doviedol k riešeniu vlnovej rovnice s danými okrajovými podmienkami pre ľubovoľné (slušné) počiatočné podmienky. Nevýhodou Fourierovho riešenia je, že riešenie je v tvare nekonečného radu, ktorý nevieme vždy explicitne sčítať (takže sme často odkázaní na to, že sčítame len niekoľko prvých členov tohto radu a dostaneme tak určité približné riešenie). Ďalšou nevýhodou je, že koeficienty tohto nekonečného radu sú dané v tvare integrálov, ktoré môžu byť značne komplikované. Výhodou (z hľadiska elektrodynamiky rozhodujúcou) je možnosť pomerne jednoduchého a prirodzeného zovšeobecnenia na viacrozmerné prípady.

[1]Stojaté vlny majú podobne ako postupné vlny tú vlastnosť, že sa z nich dá poskladať ľubovoľné riešenie vlnovej rovnice. Možno nebude na škodu v tejto súvislosti explicitne zdôrazniť, že stojaté a postupné vlny nie sú dve rôzne veci, ale dva rôzne jazyky vhodné na opis tých istých vecí. Prekladový slovník medzi týmito dvomi jazykmi, t.j. vyjadrenie stojatých vĺn cez postupné a naopak, poskytujú súčtové vzorce pre sínus a cosínus, čiže jedným smerom napríklad $\sin(kx)\sin(\omega t) = \frac{1}{2}(\cos(kx-\omega\ t) - \cos(kx+\omega t))$ a druhým smerom napríklad $\cos(kx-\omega t) = \cos(kx)\cos(\omega t) + \sin(kx)\sin(\omega t)$ V prípade zápisu cez komplexné exponenty je prekladový slovník medzi stojatými a postupnými vlnami ešte jednoduchší: $e^{i(kx+\omega t)} = e^{ikx}e^{i\omega t}$. Preto má vyjadrenie získané ako superpozícia stojatých vĺn zjavne tvar superpozície postupných vĺn.

Matematická poznámka – koeficienty Fourierovho radu a integrálu

Fourierov prístup redukuje riešenie vlnovej rovnice na výpočet koeficientov Fourierovho radu resp. integrálu. Pre úplnosť si pripomeňme, ako sa tieto koeficienty počítajú.

<u>Fourierov rad</u> pre funkciu $f(x)$ definovanú na intervale $\langle 0, l\rangle$ dostaneme doplnením na periodickú funkciu s periódou l

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{l}\right) + b_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{l}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,\sin\left(\frac{2\pi n x}{l}\right)\,dx \qquad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,\cos\left(\frac{2\pi n x}{l}\right)\,dx$$

doplnením na nepárnu periodickú funkciu s periódou $2l$ Fourierov rad cez sínusy

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \qquad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\,dx$$

a doplnením na párnu periodickú funkciu s periódou $2l$ Fourierov rad cez cosínusy

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \qquad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\,dx$$

<u>Fourierov integrál</u> dostaneme z Fourierovho radu pre funkciu definovanú na $\langle -l, l\rangle$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) + b_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\,dx \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\,dx$$

v limite $l \to \infty$. Najjasnejšie to vidno ak jednotlivé členy radu vynásobíme šikovne zapísanou jednotkou v tvare $1 = n - (n-1) = \delta n = \frac{l}{\pi}\,\delta\frac{n\pi}{l}$ a označíme $c_n = \frac{l}{\pi}\,a_n$, $\bar{c}_n = \frac{l}{\pi}\,b_n$, čím dostaneme

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\frac{\pi n}{l}x)\,\delta\frac{n\pi}{l} + \bar{c}_n \cos(\frac{\pi n}{l}x)\,\delta\frac{n\pi}{l} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c(k_n)\sin(k_n x)\,\delta k_n + \bar{c}(k_n)\cos(k_n x)\,\delta k_n \end{aligned}$$

kde sme ďalej označili $k_n = \frac{\pi n}{l}$, $c_n = c(k_n)$, $\bar{c}_n = \bar{c}(k_n)$. Ak by uvedená suma nešla do nekonečna, ale len do nejakého konečného N, bol by to N-tý integrálny súčet funkcie $c(k)\cos(k\cdot x) + \bar{c}(k)\sin(k\cdot x)$. Ak suma ide do nekonečna a ak súčasne ide δk_n do nuly (čo pre $l \to \infty$ ide) potom je táto suma (pokiaľ existuje) rovná určitému integrálu z danej funkcie t.j.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \int_0^{\infty} c(k)\sin(kx) + \bar{c}(k)\cos(kx)\;dk$$

kde

$$c(k) = \lim_{l\to\infty}\frac{l}{\pi}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin(kx)\,dx \qquad \bar{c}(k) = \lim_{l\to\infty}\frac{l}{\pi}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos(kx)\,dx$$

Uvedené limity nemusia existovať pre ľubovoľnú funkciu $f(x)$, ale pokiaľ je táto funkcia absolútne integrovateľná, t.j. pokiaľ existuje konečný integrál $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$, potom tieto limity existujú. Fourierov integrál sa preto definuje len pre absolútne integrovateľné funkcie. Pre také funkcie je $a_0 = \lim\limits_{l\to\infty} \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\, dx = 0$, takže celkove

$$f(x) = \int_0^\infty c(k)\sin(kx) + \bar{c}(k)\cos(kx)\ dk$$

kde

$$c(k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(kx)\, dx \qquad \bar{c}(k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(kx)\, dx$$

Fourierov integrál vyjadrený cez imaginárne exponenty získame, ak vo vyjadrení cez sínusy a kosínusy použijeme $\cos kx = \frac{1}{2}(e^{ikx}+e^{-ikx})$ a $\sin kx = -\frac{i}{2}(e^{ikx}-e^{-ikx})$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty -c(k)\ \frac{i}{2}(e^{ikx} - e^{-ikx})\ +\ \bar{c}(k)\ \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx})\ dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} C(k)\ e^{ikx}\, dk \end{aligned}$$

kde $C(k) = \frac{1}{2}\left(\bar{c}(k) - ic(k)\right)$ pre $k \geq 0$ a $C(k) = \frac{1}{2}\left(\bar{c}(-k) + ic(-k)\right)$ pre $k < 0$. Všimnime si, že $C(-k) = C^*(k)$. Táto podmienka súvisí s reálnosťou funkcie $f(x)$ (ktorú sme doteraz nezdôrazňovali, ale celý čas sme ju implicitne predpokladali). Vyjadrenie $C(k)$ cez imaginárnu exponentu získame dosadením vyjadrení $c(k)$ a $\bar{c}(k)$ cez sínusy a cosínusy:

$$\begin{aligned} C(k) &= \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \cos(kx) - i\, f(x)\ \sin(kx)\ dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx \end{aligned}$$

Fourierova transformácia je užitočné (ako ešte uvidíme) zobrazenie, ktoré priradí funkcii $f(x)$ funkciu $C(k)$, ktorú v tejto súvislosti označujeme symbolom $\tilde{f}(k)$ a voláme ju Fourierovým obrazom funkcie $f(x)$. Inverzné zobrazenie, ktoré priradí funkcii $\tilde{f}(k)$ funkciu $f(x)$ voláme spätnou Fourierovou transformáciou. Fourierova transformácia (tam a späť) je teda definovaná ako

$$f(x) \leftrightarrow \tilde{f}(k)$$

kde[2]

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)\ e^{ikx}\, dk \\ \tilde{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx \end{aligned}$$

[2]Často sa používa definícia, v ktorej sa faktor $\frac{1}{2\pi}$ rozdelí medzi funkciou a jej Fourier obraz

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)\ e^{ikx}\, dk \qquad \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx$$

Niekedy sú v definícii vymenené znamienka v exponentách. Okrem toho sa pomerne často nepíše vlnovka nad $f(k)$ a medzi funkciou a jej Fourier obrazom sa rozlišuje na základe toho, či je premennou x alebo k.

Príklady

1. d'Alambertovo riešenie
(Elementárny príklad, nevyžadujúci nič viac než bezduché dosadenie do vzorca.)
a) Počiatočné podmienky pre kmity nekonečnej struny sú $u(x,0) = \exp\left(-x^2/a^2\right)$, $\dot{u}(x,0) = \frac{v}{a}\left(1+x^2/a^2\right)^{-1}$. Nájdite $u(a, 3a/v)$
b) Počiatočné podmienky pre kmity polpriamky $x \geq 0$ sú $u(x,0) = 1 - \exp\left(-x^2/a^2\right)$, $\dot{u}(x,0) = \frac{v}{a}\left[1 - \left(1+x^2/a^2\right)^{-1}\right]$. Nájdite $u(a, 3a/v)$ (a to ako v prípade pevného, tak aj voľného konca).
c) Počiatočné podmienky pre kmity konečnej struny $0 \leq x \leq 2a$ sú $u(x,0) = 1 - \exp\left(-x^2/a^2\right)$, $\dot{u}(x,0) = \frac{v}{a}\left[\frac{1}{5} - \left(1+x^2/a^2\right)^{-1}\right]$. Nájdite $u(a, 3a/v)$ ak je koniec $x = 0$ pevný a koniec $x = 2a$ voľný.

2. Fourierovo riešenie
(Elementárny príklad, vyžadujúci počítanie jednoduchých integrálov.)
a) Nájdite Fourierovo riešenie vlnovej rovnice na úsečke $0 \leq x \leq L$ s počiatočnou podmienkou $u(x,0) = x(x-L)/L^2$, $\dot{u}(x,0) = v/L \sin \pi x/L$. (Konce buď oba pevné, alebo oba voľné).
b) Nájdite Fourierovo riešenie vlnovej rovnice na priamke s počiatočnou podmienkou $u(x,0) = \exp -x^2/a^2$, $\dot{u}(x,0) = 0$.

3. Časovo premenné okrajové podmienky
(Dôležité rozšírenie príkladov uvádzaných v texte.)
a) Separáciou premenných riešte vlnovú rovnicu na úsečke $0 \leq x \leq L$, s nulovými počiatočnými podmienkami a s okrajovými podmienkami $u(0,t) = 0$, $u(L,t) = \sin \Omega t$. Ukážte, že pre $\Omega \to \omega_n = n\pi v/L$ dostávame riešenie s neobmedzene rastúcim koeficientom (rezonancia). (Návod: riešenie = superpozícia danej okrajovej úlohy s ľubovoľnými poč. podm. a úlohy s pevnými koncami a vhodnými poč. podm.)
b) To isté pre $u(0,t) = 0$, $u(L,t) = g(t)$
c) To isté pre $u'(0,t) = \gamma(t)$, $u(L,t) = g(t)$

4. Dve spojené struny
(Dôležité rozšírenie príkladov uvádzaných v texte.)
a) Uvažujme dve spojené struny s rôznou rýchlosťou vĺn v každej z nich, t.j. uvažujme rovnicu $v_1^2\, u''(x,t) - \ddot{u}(x,t) = 0$ pre $0 \leq x \leq l$, a $v_2^2\, u''(x,t) - \ddot{u}(x,t) = 0$ pre $l \leq x \leq L$. Nájdite riešenie tejto úlohy pre pevné konce $u(0,t) = u(L,t) = 0$. (Návod: hladké zošitie riešení v jednotlivých strunách, pričom hladkosť znamená spojitosť funkcie aj derivácie.)
b) Ukážte, že v limitnom prípade $v_1 = v_2$ dostaneme riešenie pre strunu dĺžky L.
c) Ukážte, že v limitnom prípade $v_1 \gg v_2$ sú frekvencie kmitov systému zhodné s frekvenciami kmitov prvej struny (návod: rovnicu pre ω riešiť iteráciami, nahliadnuť že nultá je často dobrá, vďaka tomu že tangens je veľký len v úzkych intervaloch)[3]

---

[3] Z tohto príkladu plynú dve poučenia, po prvé frekvencie systému pozostávajúceho z dvoch podsystémov nemusia mať vôbec nič spoločné s frekvenciami týchto podsystémov, a po druhé za istých špeciálnych okolností môžu mať predsa len veľa spoločného. Typickým príkladom takýchto špeciálnych okolností sú strunové hudobné nástroje, kde frekvencie nástroja sú v podstate dané frekvenciami kmitov struny.

2. Vlny v troch rozmeroch

2.1. Skalárne vlny v troch rozmeroch.

Ako sme už spomenuli, elmag vlny sú trojrozmerné jednak tým, že ide o vlny v trojrozmernom priestore a jednak tým, že ide o vlny vektorové. Obe tieto trojrozmernosti so sebou prinášajú nové javy a aby sme jasne videli, ktoré javy sú spôsobované jednou a ktoré druhou trojrozmernosťou, vyšetríme ich postupne.

Skalárne vlny v troch rozmeroch sú opísané vlnovou rovnicou

$$\triangle\varphi(\vec{r},t) - \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)$$

pričom φ je neznáma funkcia (ktorej sa hovorí vlna) a ρ je nejaká zadaná funkcia (ktorej sa hovorí hustota zdrojov). Podobne ako v jednorozmernom prípade sa v tejto časti budeme zaoberať najmä prípadom $\rho(\vec{r},t) \equiv 0$, t.j. vlnovou rovnicou s nulovou pravou stranou, resp. homogénnou vlnovou rovnicou.

Poznámka. (O akustike.) Skalárna vlnová rovnica je základnou rovnicou akustiky. Veličina φ sa v tomto prípade nazýva akustický potenciál. Rýchlosť $\vec{w}$ vzduchu (resp. inej látky) a zmena tlaku δp (vzhľadom k rovnovážnemu tlaku p_0) sú dané vzťahmi

$$\vec{w} = -\operatorname{grad}\varphi$$
$$\delta p = \rho_0\frac{\partial}{\partial t}\varphi$$

kde ρ_0 je rovnovážna hustota vzduchu. (Pozri príklady.)

Poznámka. (O okrajových podmienkach v akustike.) Okrajové podmienky máme v akustike pod kontrolou prostredníctvom rýchlosti alebo tlaku na hranici. Ak poznáme rýchlosť stien, tak normálová zložka tejto rýchlosti $w_n = -\left(\operatorname{grad}\varphi\right)_n$ určuje Neumannove okrajové podmienky pre φ. Ak poznáme tlak na hranici (v ľubovoľnom čase), tak integráciou vzťahu $\delta p = \rho_0\frac{\partial}{\partial t}\varphi$ dostaneme hodnotu φ na hranici, čo zodpovedá Dirichletovým okrajovým podmienkam.

Dirichletove okrajové podmienky dobre vystihujú napr. pomery na otvorených koncoch píšťal, kde je tlak podstatne nižší ako vo vnútri píšťaly a len málo sa líši od atmosférického tlaku, takže tu s rozumnou presnosťou môžeme uvažovať $\delta p = 0$, čo vedie na nulovú Dirichletovu podmienku na otvorenom konci[4]. Poznamenajme, že na rozdiel od struny, voľnému koncu v akustike zodpovedajú nulové Dirichletove okrajové podmienky a pevným nehybným stenám nulové Neumannove podmienky.

[4] Ak uvažujeme šírenie sa zvuku z píšťaly, potom otvorený koniec píšťaly predstavuje hranicu úlohy pre vonkajší priestor a v tomto prípade je podmienka $\delta p = 0$ neadekvátna, pretože δp už nie je zanedbateľné vzhľadom k typickým tlakom vo vonkajšom prostredí.

Riešenie vlnovej rovnice separáciou premenných

V prípade struny sme si uviedli dve základné stratégie riešenia – d'Alambertovu a Fourierovu. Prvá z nich viedla na jednoduché riešenie typu "počiatočná výchylka sa rozdelí napoly, a každá polovica sa rozbehne svojim smerom". Akonáhle však prejdeme k vyšším dimenziám, prestáva táto stratégia vo všeobecnosti fungovať (hoci funguje v istých špeciálnych súvislostiach, napr. vo sférických súradniciach funguje pre tzv. radiálnu časť). Problém je, zhruba povedané, v tom, že vo viac ako jednom rozmere je nekonečne veľa smerov a teda počiatočnú podmienku by bolo treba rozdeliť na nekonečne veľa rovnakých (a teda nulových, to je ten problém) častí a každú poslať svojim smerom.

Na druhej strane Fourierova stratégia prechod k vyšším dimenziám prežije vcelku v dobrom zdraví, aj keď ani ona nie celkom bez problémov. Bezproblémová časť je odseparovanie časovej premennej od priestorových premenných. Problémy sú v separácii priestorových premenných.

Začneme s bezproblémovou časťou. Separácia časových a priestorových premenných znamená hľadanie riešenia v tvare

$$\varphi(\vec{r},t) = R(\vec{r})T\,(t)$$

čo po dosadení do homogénnej vlnovej rovnice a vykonaní štandardných povinných cvikov metódy separácie premenných[5] vedie na

$$\begin{aligned} \triangle R(\vec{r}) &= \alpha R(\vec{r}) \\ \ddot{T}\,(t) &= v^2 \alpha T\,(t) \end{aligned}$$

Prvá z týchto rovníc je pre $\alpha = 0$ Laplaceovou rovnicou, ktorou sme sa zaoberali v elektrostatike. A podobne ako tam, aj tu slúžia riešenia Laplaceovej rovnice na splnenie okrajových podmienok, ak tieto nezávisia od času. Na rozdiel od elektrostatiky sa však teraz môžu okrajové podmienky meniť s časom, ale to nie je podstatná komplikácia, viď príklady.

Pre $\alpha \neq 0$ a pre nulové okrajové podmienky (ktoré si môžeme dovoliť ak "ukojíme" zadané okrajové podmienky riešeniami Laplaceovej rovnice) je prvá rovnicou pre vlastné funkcie a vlastné hodnoty laplaciánu. Aj o tejto rovnici bola reč v kapitole o elektrostatike, kde sme si uviedli (hoci nedokázali) dve veľmi dôležité skutočnosti: 1. Vlastné hodnoty laplaciánu sú reálne záporné čísla. 2. Vlastné funkcie laplaciánu tvoria úplný ortonormálny systém.
Z prvej z nich vyplýva, že riešeniami rovnice pre $T\,(t)$ sú pre $\alpha \neq 0$

$$T(t) = \sin(\omega \cdot t) \qquad \text{a} \qquad T(t) = \cos(\omega \cdot t) \qquad \text{kde} \qquad \omega = v\sqrt{-\alpha}$$

Z druhej potom vyplýva, že všeobecné riešenie môžeme napísať ako superpozíciu vlastných funkcií laplaciánu násobených harmonickými časovými závislosťami $\sin \omega t$ a $\cos \omega t$, pričom koeficienty tejto superpozície určíme z počiatočných podmienok[6].

Separácia časovej premennej nám teda previedla problém riešenia vlnovej rovnice na problém hľadania vlastných funkcií a vlastných hodnôt laplaciánu v danej oblasti.

[5] Pozri riešenie Poissonovej rovnice v kapitole o elektrostatike **alebo** jednorozmernej vlnovej rovnice v predchádzajúcej časti.

[6] Pozri riešenie Poissonovej rovnice v kapitole o elektrostatike **a** jednorozmernej vlnovej rovnice v predchádzajúcej časti.

Konkrétne príklady

Nájsť vlastné funkcie laplaciánu pre nejakú konkrétnu oblasť je vo všeobecnosti veľmi ťažká úloha, ktorú pre väčšinu oblastí vieme zvládnuť len rôznymi približnými metódami. V prípade hranatých oblastí nám však Fourierova metóda, t.j. metóda separácie premenných, vyrieši aj túto úlohu. Tým získame niekoľko konkrétnych príkladov, ktoré nám poslúžia ako ilustrácia všeobecných vlastností riešení skalárnej vlnovej rovnice v troch rozmeroch.

Vzhľadom na to, že postup je prakticky totožný s postupom v elektrostatike, nebudeme ho opakovať, ale uvedieme rovno výsledky. Tieto výsledky by mali byť na základe našej doterajšej skúsenosti s elektrostatikou a jednorozmernou vlnovou rovnicou očividné. Ak nie sú, vrelo odporúčame precvičiť si metódu separácie premenných ešte raz a naozaj k týmto výsledkom dospieť.

neohraničený priestor

$$\varphi(\vec{r},t) = \int \alpha(\vec{k}).e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega.t)} + \beta(\vec{k}).e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}+\omega.t)}\ d^3k$$

$$\omega = vk = v\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}$$

$$\alpha(\vec{k}) = \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int \left(f(\vec{r}) + \frac{i}{\omega(\vec{k})}h(\vec{r})\right)\ e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}d^3r$$

$$\beta(\vec{k}) = \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int \left(f(\vec{r}) - \frac{i}{\omega(\vec{k})}h(\vec{r})\right)\ e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}d^3r$$

kde $f(\vec{r}) = \varphi(\vec{r},0)$ a $h(\vec{r}) = \partial_t\varphi(\vec{r},0)$ sú zadané počiatočné podmienky.

Poznámka. Riešenie je superpozíciou funkcií $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}\pm\omega.t)}$, ktorým sa hovorí *rovinné monochromatické vlny.* Tento názov pochádza z toho, že uvedené funkcie majú jednoznačnú frekvenciu ω (ktorá v prípade svetla určuje jednoznačnú farbu, odtiaľ monochromatické) a z toho, že ich hodnota je vo všetkých rovinách kolmých na vektor $\vec{k}$ konštantná (odtiaľ rovinné). Túto poslednú vlastnosť vidno okamžite z toho, že podmienke $\vec{k}\cdot\vec{r}\pm\omega.t = \text{const}$ vyhovujú pre ľubovoľný daný čas t práve polohové vektory $\vec{r}$ zodpovedajúce bodom v takýchto rovinách.

Poznámka. V neohraničenom priestore sa často používa aj riešenie v tvare tzv. (monochromatických) *sférických vĺn* $\frac{1}{r}e^{i(kr\pm\omega.t)}$, kde r je radiálna premenná sférických súradníc, pričom koeficienty rozvoja do týchto sférických vĺn sú funkciami uhlových sférických premenných φ a ϑ. Riešenie v tomto tvare dostaneme separáciou premenných v sférických súradniciach, čo je vec ktorú v týchto prednáškach nerobíme, ale vrele odporúčame pokúsiť sa urobiť si ju samostatne a postup aj výsledky porovnať s knihami (napr. z teórie elmag poľa, z kvantovej mechaniky, z matematickej fyziky alebo parciálnych diferenciálnych rovníc).

hranatý vlnovod

oblasť v smeroch x, y ohraničená obdĺžnikom a v smere z neohraničená
nulové Dirichletove okrajové podmienky[7]

$$\varphi(\vec{r},t)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\int dk\ \sin\frac{m\pi x}{L_x}\sin\frac{n\pi y}{L_y}\left(\alpha_{mn}(k).e^{i(kz-\omega t)}+\beta_{mn}(k).e^{i(kz+\omega t)}\right)$$

$$\omega_{mn}(k)=v\sqrt{\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2+k^2}$$

$$\alpha_{mn}(k)=\frac{1}{L_xL_y\pi}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\int_{-\infty}^{\infty}d^3r\left(f(\vec{r})+\frac{i}{\omega_{mn}(k)}h(\vec{r})\right)\ \sin\frac{m\pi x}{L_x}\sin\frac{n\pi y}{L_y}e^{-ikz}$$

$$\beta_{mn}(k)=\frac{1}{L_xL_y\pi}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\int_{-\infty}^{\infty}d^3r\left(f(\vec{r})-\frac{i}{\omega_{mn}(k)}h(\vec{r})\right)\ \sin\frac{m\pi x}{L_x}\sin\frac{n\pi y}{L_y}e^{-ikz}$$

Poznámka. Pre každú dvojicu prirodzených čísiel (m,n) existuje minimálna frekvencia $\omega_{mn}^{\min}=v\pi\sqrt{m^2/L_x^2+n^2/L_y^2}$. Vlnovodom sa teda nemôžu šíriť vlny ľubovoľne nízkej frekvencie. Konkrétny tvar $\omega_{mn}^{\min}$ sa týka hranatého vlnovodu, ale existencia minimálnej frekvencie je všeobecná vlastnosť vlnovodov.

hranatý rezonátor

oblasť ohraničená kvádrom, nulové Dirichletove okrajové podmienky (ako príklad)

$$\varphi(\vec{r},t)=\sum_{l,m,n=1}^{\infty}\sin\frac{l\pi x}{L_x}\sin\frac{m\pi y}{L_y}\sin\frac{n\pi z}{L_z}\left(c_{lmn}\cos\omega_{lmn}t+c'_{lmn}\sin\omega_{lmn}t\right)$$

$$\omega_{lmn}=v\pi\sqrt{\left(\frac{l}{L_x}\right)^2+\left(\frac{m}{L_y}\right)^2+\left(\frac{n}{L_z}\right)^2}$$

$$c_{lmn}=\frac{8}{V}\int d^3r\,f(\vec{r})\ \sin\frac{l\pi x}{L_x}\sin\frac{m\pi y}{L_y}\sin\frac{n\pi z}{L_z}$$

$$c'_{lmn}=\frac{8}{V}\int d^3r\,\frac{h(\vec{r})}{\omega_{lmn}}\ \sin\frac{l\pi x}{L_x}\sin\frac{m\pi y}{L_y}\sin\frac{n\pi z}{L_z}$$

Poznámka. Spektrum frekvencií rezonátora je diskrétne. Konkrétny tvar ω_{lmn} sa týka hranatého rezonátora, ale diskrétnosť spektra frekvencií je všeobecná vlastnosť rezonátorov.

[7]Nulové Neumannove okrajové podmienky – cosínusy namiesto sínusov. Nenulové okrajové podmienky – pozri príklady.

Nepovinná poznámka o hudobných nástrojoch

Rezonátory vďačia za svoje meno javu rezonancie, o ktorom zatiaľ nebola reč. Reč nebola preto, lebo v tejto kapitole sa zaoberáme riešeniami vlnovej rovnice s nulovou pravou stranou a k rezonancii treba nenulovú pravú stranu. Keď už sme však na rezonátory narazili, je lákavé povedať si o nich niečo viac. Tomuto lákaniu teraz na chvíľku podľahneme.

Ak je časová závislosť pravej strany harmonická (t.j. sínusová resp. cosínusová) s frekvenciou Ω rovnou niektorej z vlastných frekvencií ω_{mnr} rezonátora, potom dostaneme riešenia vlnovej rovnice s formálne nekonečnou amplitúdou (že je to tak, nahliadneme neskôr, nateraz sa uspokojíme analógiou s lineárnym harmonickým oscilátorom). V realistických prípadoch nie je rezonančná amplitúda nekonečná, ale je relatívne veľká (znova sa zatiaľ uspokojíme s analógiou, tentoraz s tlmeným LHO). Ak časová závislosť pravej strany nie je harmonická, môžeme ju rozvinúť do Fourierovho radu a na základe princípu superpozície zložiť celkové riešenie z riešení pre jednotlivé Fourierove komponenty pravej strany. V tomto riešení budú vo väčšine prípadov dominantné práve komponenty s rezonančnými frekvenciami ω_{mnr}.

A teraz k hudobným nástrojom. Celá hudba je, zhruba povedané, založená na fakte, že ľudskému uchu resp. mozgu sú príjemné zvuky s jednoznačnými frekvenciami, hovorí sa im čisté tóny. Príjemné sú tiež súzvuky čistých tónov pre ktoré je pomer frekvencií rovný pomeru malých prirodzených čísiel. Pomeru 1/2 hovoríme oktáva, pomeru 2/3 kvinta, pomeru 3/4 kvarta.

Vytvorenie čistého tónu v ľubovoľnom rezonátore vyžaduje špeciálne nastavenie počiatočných podmienok. Pri bežných počiatočných podmienkach je riešenie superpozíciou viacerých vlastných frekvencií, t.j. viacerých čistých tónov. Súzvuk týchto vlastných frekvencií určuje tzv. farbu zvuku daného rezonátora. Ak sú pomery vlastných frekvencií celé čísla, vnímame farbu zvuku ako príjemnú. V opačnom prípade ako menej príjemnú.

Z hľadiska farby zvuku je teda struna s frekvenciami $\omega_n = n\pi v/L$ ideálny hudobný nástroj. Nevýhodou struny je "malá účinnosť prenosu pohybu struny na pohyb vzduchu". Preto sa struna často pripája k nejakému inému rezonátoru, ako je napríklad telo gitary či huslí, a to tak, aby vlastné frekvencie celkovej sústavy boli v podstate dané vlastnými frekvenciami samotnej struny (v tejto súvislosti pozri príklad o dvoch spojených strunách). Tak vzniká celá rodina strunových nástrojov.

Hranaté rezonátory sú ako hudobné nástroje vo všeobecnosti nevhodné, pretože pomery frekvencií $\omega_{mnr} = v\pi\sqrt{m^2/L_x^2 + n^2/L_y^2 + r^2/L_z^2}$ sa pre rôzne m, n, r môžu značne líšiť od celočíselných pomerov. Ak je však jeden rozmer rezonátora oveľa väčší ako ďalšie dva, napr. $L_x \gg L_y, L_z$ potom niekoľko najnižších vlastných frekvencií zodpovedá trojiciam $(m, 0, 0)$ a teda pokiaľ nie sú "vybudené" vyššie frekvencie, celý "dlhý rezonátor" sa chová analogicky ako struna. Takýmto dlhým rezonátorom hovoríme píšťaly. Vyššie frekvencie samozrejme obsahujú "nepríjemné prímesi" od nenulových n, r. Tieto nepríjemné prímesy sa trochu zredukujú ak budú namiesto dvojice n, r charakterizované len jedným číslom, čo sa dosahuje vo valcových píšťalách (redukcia počtu parametrov z dvoch na jeden je tu dôsledkom zvýšenia symetrie). Tak vzniká celá rodina dychových nástrojov.

2.2. Vektorové vlny v trojrozmernom prípade.

neohraničený priestor

Prechod od skalárnych k vektorovým vlnám je v mnohých prípadoch triviálne jednoduchý a spočíva len v dopísaní šípiek na patričné miesta. Napríklad riešenie vlnovej rovnice pre nejakú vektorovú funkciu $\vec{A}(\vec{r},t)$ (ktorá nemusí byť nutne vektorovým elmag potenciálom)

$$\triangle\vec{A}(\vec{r},t) - \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}(\vec{r},t) = 0$$

je dané vzťahmi úplne analogickými vzťahom pre skalárne vlny

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \int \vec{\alpha}(\vec{k}).e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega.t)} + \vec{\beta}(\vec{k}).e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}+\omega.t)}\ d^3k$$

$$\omega = vk = v\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

$$\vec{\alpha}(\vec{k}) = \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\left(\vec{f}(\vec{r}) + \frac{i}{\omega(\vec{k})}\vec{h}(\vec{r})\right)\ e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}d^3r$$

$$\vec{\beta}(\vec{k}) = \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\left(\vec{f}(\vec{r}) - \frac{i}{\omega(\vec{k})}\vec{h}(\vec{r})\right)\ e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}d^3r$$

kde $\vec{f}(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r},0)$ a $\vec{h}(\vec{r}) = \partial_t\vec{A}(\vec{r},0)$ sú zadané počiatočné podmienky. Úplne analogický je aj postup odvodenia týchto vzťahov, preto ho tu nebudeme opakovať.

To nové, čo so sebou prináša vektorovosť vĺn, sa dá vlastne zhrnúť do jedného slova – *polarizácia.* Všeobecné riešenie vlnovej rovnice je superpozíciou rovinných monochromatických vĺn s rôznymi polarizáciami, ktoré sú dané vektormi $\vec{\alpha}(\vec{k})$ a $\vec{\beta}(\vec{k})$. Na elmag vlnách sú v tejto súvislosti pozoruhodné dve skutočnosti:
1. elmag vlny v neohraničenom priestore sú *transverzálne*
2. elmag vlny vo vlnovodoch a rezonátoroch vo všeobecnosti *nie sú* transverzálne

Transverzálnosť (priečnosť) vĺn je často dôsledkom nulovosti divergencie uvažovanej veličiny. Naozaj, ak platí div $\vec{A} = 0$ v ľubovoľnom čase, potom zo vzťahu

$$\text{div}\ \vec{A} = \int i\vec{k}\cdot\vec{\alpha}(\vec{k}).e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega.t)} + i\vec{k}\cdot\vec{\beta}(\vec{k}).e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}+\omega.t)}\ d^3k$$

a z jeho časovej derivácie dostaneme pre $t = 0$

$$\text{div}\ \vec{f} = \int\left(\vec{k}\cdot\vec{\alpha}(\vec{k}) + \vec{k}\cdot\vec{\beta}(\vec{k})\right) ie^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\ d^3k = 0$$

$$\text{div}\ \vec{h} = \int\left(\vec{k}\cdot\vec{\alpha}(\vec{k}) - \vec{k}\cdot\vec{\beta}(\vec{k})\right) \omega e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\ d^3k = 0$$

a keďže identicky nulová funkcia má všetky Fourierove komponenty nulové, dostávame

$$\vec{k}\cdot\vec{\alpha}(\vec{k}) = \vec{k}\cdot\vec{\beta}(\vec{k}) = 0$$

čo nie je nič iné ako vyjadrenie transverzálnosti (kolmosti na $\vec{k}$) vektorov $\vec{\alpha}(\vec{k})$ a $\vec{\beta}(\vec{k})$.

Pre elektromagnetické polia vo vákuu bez nábojov a prúdov platia vlnové rovnice a navyše platí div $\vec{B} = 0$ (vždy) a div $\vec{E} = 0$ (v uvažovanom prípade). Čiže elektrické a magnetické pole vo vákuu bez nábojov a prúdov má charakter superpozície priečne polarizovaných rovinných monochromatických vĺn. To je koniec koncov súčasťou bežného fyzikálneho folklóru, rovnako ako fakt, že v rovinnej elmag vlne sú aj polia $\vec{E}$ a $\vec{B}$ navzájom kolmé. Túto poslednú vlastnosť najľahšie nahliadneme pomocou elmag potenciálov. V Coulombovej kalibrácii div $\vec{A} = 0$ je (jednoznačným) riešením rovnice pre skalárny potenciál $\triangle\varphi = 0$ (pre $\rho = 0$) nulová funkcia $\varphi = 0$. Pre identicky nulové φ prejde rovnica pre $\vec{A}$ na vlnovú rovnicu, ktorej riešením je superpozícia transverzálnych (vďaka kalibračnej podmienke) vĺn. Pri nulovom φ ďalej platí

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\,\vec{A} = \int i\omega\vec{\alpha}(\vec{k}).e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega.t)} - i\omega\vec{\beta}(\vec{k}).e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}+\omega.t)}\; d^3k$$

$$\vec{B} = \text{rot}\;\vec{A} = \int i\vec{k}\times\vec{\alpha}(\vec{k}).e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega.t)} + i\vec{k}\times\vec{\beta}(\vec{k}).e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}+\omega.t)}\; d^3k$$

čiže pre jednotlivé monochromatické rovinné elmag vlny máme

$$\vec{E}(\vec{k})\|\vec{\alpha}(\vec{k}) \qquad \vec{B}(\vec{k})\|\vec{k}\times\vec{\alpha}(\vec{k}) \qquad \vec{k}\perp\vec{\alpha}(\vec{k})$$
$$\vec{E}(\vec{k})\|\vec{\beta}(\vec{k}) \qquad \vec{B}(\vec{k})\|\vec{k}\times\vec{\beta}(\vec{k}) \qquad \vec{k}\perp\vec{\beta}(\vec{k})$$

t.j. $\vec{E}(\vec{k})$, $\vec{B}(\vec{k})$ a $\vec{\alpha}(\vec{k})$ resp. $\vec{\beta}(\vec{k})$ sú navzájom kolmé.

vlnovody a rezonátory

Šírenie elmag vĺn vo vlnovodoch a rezonátoroch predstavuje rozsiahlu oblasť s mnohými veľmi dôležitými elektrotechnickými aplikáciami. My sa tejto problematiky dotkneme iba veľmi zbežne, v podstate nám pôjde len o naznačenie základných problémov a o veľmi hrubé načrtnutie spôsobov ich riešenia.

Prvým problémom je realizácia okrajových podmienok pre elmag polia vo vlnovode (rezonátore) ktorého steny sú tvorené vodičom. Tieto okrajové podmienky sú pomerne jednoduché pre ideálny vodič, t.j. vodič s nekonečnou vodivosťou. Pre takýto vodič je rozumné predpokladať nulové elektrické pole v jeho vnútri, pretože ľubovoľné nenulové pole by na základe Ohmovho zákona viedlo k nekonečným prúdom. Je však treba mať na pamäti, že toto je značná idealizácia, ktorá býva vhodná pri opise realistickej situácie len ako akési nulté priblíženie.

Nulovosť elektrického poľa v ideálnom vodiči a hraničná podmienka pre tangenciálne zložky elektrického poľa dajú pre vnútro vlnovodu nulové okrajové podmienky pre niektoré zložky $\vec{E}$. Pre vlnovod nekonečný v smere osi z dostávame všade na hranici okrajovú podmienku $E_z = 0$, plus ešte jednu podmienku, ktorej konkrétny tvar závisí od prierezu vlnovodu. Napríklad pre hranatý vlnovod $0 \leq x \leq L_x,\;\; 0 \leq y \leq L_y$ má táto podmienka tvar

$$E_x\,(x, 0, z) = 0 \qquad E_x\,(x, L_y, z) = 0$$
$$E_y\,(0, y, z) = 0 \qquad E_y\,(L_x, y, z) = 0$$

Vlnová rovnica a okrajové podmienky pre E_z v hranatom vlnovode sú zhodné s prípadom uvažovaným v časti venovanej skalárnym vlnám a tam uvádzané riešenie je teda aj riešením pre E_z. Dôležitou skutočnosťou zasluhujúcou zdôraznenie je nenulovosť všeobecného riešenia pre E_z, čo znamená, že elmag vlna šíriaca sa vo vlnovode môže mať nenulovú zložku aj v smere vlnovodu, t.j. v smere šírenia sa vlny. Vidíme, že elmag vlny vo vlnovode nemusia byť priečne.[8]

Pre E_x a E_y máme trochu odlišnú situáciu – okrajové podmienky (nulové Dirichletove) máme zadané len na časti hranice. Avšak akonáhle poznáme riešenie pre E_z, máme v skutočnosti okrajové podmienky zadané všade. Skutočne z podmienky $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ vyplýva

$$\frac{\partial}{\partial y} E_y(x,0,z) = -\frac{\partial}{\partial z} E_z(x,0,z) \qquad \frac{\partial}{\partial y} E_y(x,L_y,z) = -\frac{\partial}{\partial z} E_z(x,L_y,z)$$
$$\frac{\partial}{\partial x} E_x(0,y,z) = -\frac{\partial}{\partial z} E_z(0,y,z) \qquad \frac{\partial}{\partial x} E_x(L_x,y,z) = -\frac{\partial}{\partial z} E_z(L_x,y,z)$$

čo nie je nič iné, ako nulové Neumannove okrajové podmienky pre E_x a E_y na zvyšku hranice. Pre E_x a E_y máme teda kombinované okrajové podmienky (niekde Dirichletove, niekde Neumannove), to však nepredstavuje nijaký nový problém – takéto úlohy sa riešia analogicky ako úlohy s čisto Dirichletovými alebo čisto Neumannovými okrajovými podmienkami (pozri príklady).

Keď už máme vyriešenú úlohu pre elektrické pole vo vlnovode, dostaneme zo známeho $\vec{E}$ na hranici a z Maxwellových rovníc hodnoty derivácií $\vec{B}$ na hranici. Tým pádom poznáme Neumannove okrajové podmienky pre vlnové rovnice pre $\vec{B}$, takže môžeme napísať riešenie pre jednotlivé zložky $\vec{B}$. Nakoniec teda poznáme kompletné elmag pole vo vlnovode.

Uvedený postup je technicky pomerne pracný. Dá sa síce trochu zjednodušiť (napr. Fourierovou transformáciou rovníc, čo je technika, s ktorou sa zoznámime v ďalšej časti), ale zjednodušenie nie je dramatické. A to si ešte musíme uvedomiť, že sa jedná o najjednoduchší prípad hranatého vlnovodu so stenami z ideálneho vodiča. Nehranatosť so sebou prináša ďalšie problémy, realistické vodiče vyžadujú riešiť rovnice nielen vo vlnovode, ale aj vo vodiči a riešenia potom "zošívať" v súlade s hraničnými podmienkami, čo je zjavne obrovské množstvo roboty.

Tomuto všetkému sa vyhneme dosť brutálnym spôsobom – celú problematiku elmag vlnovodov a rezonátorov jednoducho preskočíme. Dôvodom nie je nedôležitosť tejto oblasti, ale skôr jej rozľahlosť a technická náročnosť, ktoré by nás odviedli od iných, tiež dôležitých vecí, ktoré nás ešte čakajú.

[8]Tento jav sa využíva napr. v urýchľovačoch elementárnych častíc na rýchlosti blízke rýchlosti svetla. Ak sa nabitá častica s rýchlosťou takmer c dostane vo vhodnom momente do vlnovodu, v ktorom sa šíri elmag vlna rýchlosťou c, a táto vlna má nenulovú pozdĺžnu zložku elektrického poľa, potom je častica počas "spoločného behu" celý čas urýchľovaná (pričom sa jej rýchlosť už moc nemení, ale zvyšuje sa jej energia).

Príklady

1. Píšťaly
(.)
a) kváder: okrajové podmienky 5 stien uzavreté, 1 koniec otvorený - explicitné riešenie
b) valec (nepovinné)
komentár: dierky na píšťale

2. názov
(.)
3. názov
(.)

3. Elektromagnetické vlny v disperznom prostredí

Motivácia

Medzi tým, čo sme si o elmag vlnách doteraz povedali a medzi tým, čo je o nich všeobecne známe, je jeden významný rozpor. Cieľom tohto motivačného paragrafu je na tento rozpor upozorniť. Cieľom celej tejto časti je explicitne ukázať, že v skutočnosti rozpor neexistuje.

Súčasťou všeobecného fyzikálneho folklóru je vysvetlenie rozkladu bieleho svetla (skleneným hranolom alebo vodnou kvapkou) závislosťou indexu lomu od vlnovej dĺžky resp. frekvencie svetla. Súčasťou folklóru je tiež súvis indexu lomu s rýchlosťou svetla danej vlnovej dĺžky resp. frekvencie v uvažovanom prostredí. Inými slovami, veľa bežných optických javov súvisí s tým, že v niektorých látkach závisí rýchlosť svetla od frekvencie – tomuto javu sa hovorí disperzia.

Na druhej strane riešenia vlnovej rovnice majú tvar superpozície rovinných monochromatických vĺn, ktoré sa všetky šíria rovnakou rýchlosťou v. Skutočne, rýchlosť šírenia sa postupnej vlny $f(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega.t) = f(k(\vec{n}\cdot\vec{r}-v.t))$ je daná práve parametrom v vystupujúcim vo vlnovej rovnici a je pre všetky postupné vlny *rovnaká*. A to je ten rozpor. Pre vysvetlenie mnohých známych javov potrebujeme disperziu vĺn, ale vo vlnovej rovnici pre ňu jednoducho nie je miesto. Kým budete čítať ďalej, skúste chvíľku porozmýšľať o tom, ako tento rozpor odstrániť.

Dobre, predpokladajme, že ste porozmýšľali. Potom je dosť možné, že vám napadlo čosi, čo je najčastejšie uvádzané ako prvá odpoveď: a to, že k disperzii dochádza ak je závislosť ω od k iná ako lineárna. To je správna odpoveď, ale nie na našu otázku. Pre monochromatické riešenia vlnovej rovnice totiž platí $\omega = vk$. Rozpor (zdanlivý) spočíva práve v tom, že aj keď potrebujeme nelineárnu závislosť ω od k, vlnová rovnica si vynucuje závislosť lineárnu. Takže ešte raz, kým budete čítať ďalej, skúste chvíľku porozmýšľať o tom, ako tento rozpor odstrániť.

Riešenie má príchuť Kolumbovho vajca: Nie všetky vlny sú riešeniami vlnovej rovnice. Existujú aj iné rovnice, ktorých riešeniami sú rovinné monochromatické vlny. A nielenže existujú, ale niekedy úzko súvisia s Maxwellovými rovnicami.

Maxwellove rovnice vo vákuu vedú na vlnovú rovnicu. Maxwellove rovnice v istom špeciálnom prostredí nevedú na vlnovú rovnicu, napriek tomu sú ich riešeniami rovinné monochromatické vlny, a to s nelinárnou závislosťou ω od k. Takýmto špeciálnym prostredím sú látky s tzv. lineárnou pamäťou. Vzhľadom na dôležitosť javu disperzie sa teraz budeme elektrodynamike takýchto látok venovať trochu podrobnejšie. Najprv si objasníme, čo sa vlastne myslí pod lineárnou pamäťou, potom si ukážeme že v látkach s takouto pamäťou Maxwellove rovnice naozaj nevedú na vlnovú rovnicu a nakoniec sa naučíme Maxwellove rovnice v tomto prípade riešiť. A pritom si ukážeme, že ich riešenia sú naozaj monochromatické vlny s nelineárnou závislosťou ω od k.

Lineárna, stále rovnaká pamäť

Lineárna skalárna funkcia jednej skalárnej premennej vyzerá takto: $y = ax + b$. Lineárna vektorová funkcia jednej vektorovej premennej vyzerá takto: $\vec{y} = \bar{\bar{A}}\vec{x} + \vec{b}$, kde $\bar{\bar{A}}$ je tenzor. V kartézskych súradniciach má táto závislosť tvar $y_i = A_{ij}x_j + b_i$. Ak budeme uvažovať vektory so spojitým indexom $t \in \langle t_i, t_f \rangle$ namiesto diskrétneho i, potom suma $A_{ij}x_j = \sum_j A_{ij}x_j$ prejde na integrál a lineárna závislosť bude mať tvar

$$y(t) = \int_{t_i}^{t_f} A\left(t, t'\right)\, x\left(t'\right) dt' + b(t)$$

A presne takto vyzerá lineárna pamäť. V izotropnom prostredí s lineárnou pamäťou (a priestorovou lokálnosťou) závisí vektor $\vec{D}(\vec{r}, t)$ od vektora $\vec{E}(\vec{r}, t')$ nasledovne

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{t} \epsilon\left(t, t'\right)\, \vec{E}(\vec{r}, t') dt'$$

Dolná hranica integrálu znamená, že pripúšťame nekonečne dobrú pamäť (čiže do ľubovoľne vzdialenej minulosti). Horná hranica znamená, že ide naozaj o pamäť (takže hodnotu $\vec{D}$ v čase t určujú len hodnoty $\vec{E}$ v skorších časoch). Niekedy sa používa zápis s hornou hranicou rovnou nekonečnu, ale potom musíme požadovať, aby $\epsilon(t, t') = 0$ pre $t < t'$ (inak by nešlo len o pamäť, ale aj o veštenie). V prípade takzvaných tvrdých dielektrík by sme k integrálu mali ešte pripočítať nejaký člen $\vec{d}(\vec{r}, t)$ nezávislý od $\vec{E}$, ale také špecialitky tu teraz nebudeme uvažovať.

Ak látka nemení s časom svoje vlastnosti, potom by jej pamäť mala byť stále rovnaká. To znamená, že o druhej by si mala pamätať to, čo bolo pred piatimi minútami rovnako, ako si pamätala o pol jednej, čo bolo pred piatimi minútami. To ale znamená, že funkcia dvoch premenných $\epsilon(t, t')$ by mala závisieť len od rozdielu týchto premenných. Pre látku s lineárnou, stále rovnakou pamäťou teda dostávame

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{t} \epsilon\left(t - t'\right)\, \vec{E}(\vec{r}, t')\, dt'$$

pričom hornú hranicu integrálu môžeme posunúť do ∞, ak $\epsilon(\tau) = 0$ pre $\tau < 0$.

Klebeta: Integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} f(t - t')g(t')\, dt'$ sa hovorí konvolúcia funkcií f a g.

Tvrdenie: Fourier obraz konvolúcie je $2\pi\times$ súčin Fourier obrazov obidvoch funkcií.

Dôkaz: Nech $K(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t')g(t')dt'$

$$\tilde{K}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(t)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t - t')g(t')e^{-i\omega t}dt\, dt'$$

Teraz vložíme jednotku napísanú ako $e^{-i\omega t'}e^{i\omega t'}$ a urobíme substitúciu $\tau = t - t'$, čím sa dvojitý integrál rozloží na súčin dvoch jednoduchých integrálov

$$\tilde{K}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \int_{-\infty}^{\infty} g(t')e^{-i\omega t'}dt' = 2\pi\tilde{f}(\omega)\tilde{g}(\omega)$$

Ešte jedno tvrdenie, ktoré budeme neskôr potrebovať: Ak je funkcia $f(t)$ reálna, potom pre jej Fourier obraz platí $\tilde{f}^*(\omega) = \tilde{f}(-\omega)$. Dôkaz: $\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$, čiže $\tilde{f}^*(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt$ a zároveň $\tilde{f}(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt$.

Čo to znamená pre elektrodynamiku? Ak urobíme Fourierovu transformáciu vo všetkých premenných ($\vec{r}$ aj t) a ak prestaneme písať vlnovku (či sa jedná o funkciu alebo o jej Fourier obraz spoznáme podľa premenných), dostaneme

$$\vec{D}(\vec{k},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} \vec{D}(\vec{r},t)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}+\omega t)}d^3r\,dt = 2\pi\epsilon(\omega)\vec{E}(\vec{k},\omega)$$

Analogicky dostaneme pre magnetické polia $\vec{H}(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{t} \mu^{-1}(t-t')\,\vec{B}(\vec{r},t')dt'$ a odtiaľ úplne rovnakým postupom

$$\vec{H}(\vec{k},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} \vec{H}(\vec{r},t)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}+\omega t)}d^3r\,dt = 2\pi\mu^{-1}(\omega)\vec{B}(\vec{k},\omega)$$

Záver: Po Fourierovej transformácii vyzerá látka so stále rovnakou lineárnou pamäťou ako vákuum (konvolúcia prešla na súčin). Akurát že ϵ a μ^{-1} závisia od ω.

Fourierova transformácia má ešte jednu dôležitú vlastnosť: prevádza derivácie na niečo jednoduchšie. Vezmime si napríklad Fourierov obraz časovej derivácie $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{d}{dt}f(t))e^{-i\omega t}dt$. Metódou per partes to prevedieme na súčet dvoch integrálov $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dt}\left(f(t)e^{-i\omega t}\right)dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{d}{dt}e^{-i\omega t}dt$. Prvý z nich je $\frac{1}{2\pi}[f(t)e^{-i\omega t}]_{-\infty}^{\infty}$ a ak ide $f(t)$ k nule pre $t\to\pm\infty$, potom je tento príspevok nulový. Druhý integrál (aj so znamienkom mínus) je $\frac{i\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt = i\omega f(\omega)$, takže celkove môžeme konštatovať, že pre funkcie nulové v nekonečne prevádza Fourierova tranformácia deriváciu podľa času na násobenie faktorom $i\omega$

$$\tfrac{d}{dt}f(t) \to i\omega f(\omega)$$

Úplne rovnako nahliadneme, že pre vyššie derivácie

$$\tfrac{d^n}{dt^n}f(t) \to (i\omega)^n f(\omega)$$

Ak máme v hre derivácie podľa času aj podľa priestorových súradníc, potom

$$\tfrac{\partial}{\partial x_j}f(\vec{r},t) \to ik_j\,f(\vec{k},\omega)$$
$$\operatorname{div}\vec{f}(\vec{r},t) \to i\vec{k}\cdot\vec{f}(\vec{k},\omega)$$
$$\operatorname{rot}\vec{f}(\vec{r},t) \to i\vec{k}\times\vec{f}(\vec{k},\omega)$$

Záver: Fourierova transformácia prevádza derivovanie na násobenie a diferenciálne rovnice na algebraické. A keďže algebraické rovnice sa dosť často riešia jednoduchšie ako diferenciálne, Fourierova transformácia je ďalšou vítanou metódou riešenia diferenciálnych rovníc. Túto metódu sme mohli použiť už aj v niektorých predchádzajúcich prípadoch (napríklad pri riešení Maxwellových rovníc vo vákuu bez nábojov a prúdov), ale tam by to bolo vždy len alternatíva k inej dostatočne jednoduchej metóde. Prípad lineárnej, stále rovnakej pamäte, je dobrou a prakticky dôležitou ilustráciou sily tejto metódy tam, kde iné metódy až tak dobre nefungujú.

Fourierova transformácia Maxwellových rovníc

Spomeňme si, ako sme riešili Maxwellove rovnice vo vákuu bez nábojov a prúdov. Zobrali sme dve Maxwellove rovnice s rotáciami, urobili sme z nich rotáciu, využili sme vzťah pre rotáciu rotácie, využili sme zvyšné dve Maxwellove rovnice a "materiálové"vzťahy vo vákuu, čím sme dostali pre elektrické aj magnetické pole vlnovú rovnicu. A túto diferenciálnu rovnicu vieme v neohraničenom priestore riešiť celkom jednoducho.

Ak by sme tento postup skúsili pre prostredie s lineárnou, stále rovnakou pamäťou, nedostali by sme vlnové rovnice, ale komplikovanejšie integro-diferenciálne rovnice (odvoďte si ich, nech viete, o čom je reč), ktoré sme sa riešiť neučili. Je preto milým prekvapením, že ak najprv urobíme Fourierovu transformáciu rovníc (čo znamená prechod k rovniciam pre Fourierove transformácie polí)[9] starý postup bez problémov prejde.

Maxwellove rovnice prejdú po Fourierovej transformácii na

$$\begin{aligned} i\vec{k}\cdot\vec{D}(\vec{k},\omega) &= \rho(\vec{k},\omega) \\ i\vec{k}\times\vec{E}(\vec{k},\omega) &= -i\omega\vec{B}(\vec{k},\omega) \\ i\vec{k}\cdot\vec{B}(\vec{k},\omega) &= 0 \\ i\vec{k}\times\vec{H}(\vec{k},\omega) &= \vec{j}(\vec{k},\omega)+i\omega\vec{D}(\vec{k},\omega) \end{aligned}$$

a materiálové vzťahy budú

$$\begin{aligned} \vec{D}(\vec{k},\omega) &= 2\pi\,\epsilon(\omega)\,\vec{E}(\vec{k},\omega) \\ \vec{H}(\vec{k},\omega) &= 2\pi\,\mu^{-1}(\omega)\,\vec{B}(\vec{k},\omega) \end{aligned}$$

V takejto látke a s nulovými vonkajšími hustotami náboja a prúdu teda dostaneme

$$\begin{aligned} \epsilon(\omega)\,\vec{k}\cdot\vec{E}(\vec{k},\omega) &= 0 \\ \vec{k}\times\vec{E}(\vec{k},\omega) &= -\omega\vec{B}(\vec{k},\omega) \\ \vec{k}\cdot\vec{B}(\vec{k},\omega) &= 0 \\ \vec{k}\times\vec{B}(\vec{k},\omega) &= \omega\,\epsilon(\omega)\,\mu(\omega)\,\vec{E}(\vec{k},\omega) \end{aligned}$$

Teraz urobíme analogickú vec, ako bolo pôsobenie rotáciou na rovnice obsahujúce rotáciu. Rotácii zodpovedá po Fourierovej transformácii násobenie (vektorový súčin) vektorom $i\vec{k}$. Vezmeme teda rovnice s takýmto súčinom, vynásobíme ich (vektorovo) zľava vektorom $i\vec{k}$ a využijeme $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b}\,)$, čím dostaneme

$$\begin{aligned} [k^2-\omega^2\,\epsilon(\omega)\,\mu(\omega)]\,\vec{E}(\vec{k},\omega) &= 0 \\ [k^2-\omega^2\,\epsilon(\omega)\,\mu(\omega)]\,\vec{B}(\vec{k},\omega) &= 0 \end{aligned}$$

[9]Zovšeobecnenie Fourierovej transformácie na funkcie viac premenných: $\vec{f}(\vec{x},t)\leftrightarrow\vec{f}(\vec{k},\omega)$, kde $\vec{f}(\vec{x},t) = \int_{-\infty}^{\infty}\vec{f}(\vec{k},\omega)\;e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}+\omega t)}\,d^3k\,d\omega$ a $\vec{f}(\vec{k},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{f}(\vec{x},t)\,e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}+\omega t)}\,d^3x\,dt$ (nad vektorom $\vec{f}(\vec{k},\omega)$ má byť ešte vlnovka, ale tú kvôli väčšej prehľadnosti radšej nepíšeme).

Riešenie výsledných rovníc je úplne jednoduché. Ak je výraz $k^2 - \omega^2\,\epsilon(\omega)\,\mu(\omega)$ nenulový, polia musia byť nulové. A ak je tento výraz nulový, polia môžu byť akékoľvek. Tieto dve vety sa dajú elegantne zapísať pomocou δ-funkcie ako

$$\vec{E}(\vec{k},\omega) = \vec{e}\,(\vec{k},\omega)\,\delta\left(k^2 - \omega^2\,\epsilon(\omega)\,\mu(\omega)\right)$$

kde $\vec{e}\,(\vec{k},\omega)$ je ľubovoľná vektorová funkcie premenných $\vec{k}$ a ω. (Pre $\vec{B}(\vec{k},\omega)$ platí analogický zápis).

Spätná Fourierova transformácia nám dá

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \int \vec{e}\,(\vec{k},\omega)\,\delta\left(k^2 - \omega^2\,\epsilon(\omega)\,\mu(\omega)\right)\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}+\omega t)}\,d^3k\,d\omega$$

a podobne pre $\vec{B}$. Jedna z integrácií sa urobí ľahko pomocou δ-funkcie. Ktorá? Nulové body δ-funkcie nájdeme veľmi ľahko vtedy, ak považujeme k za premennú a ω za parameter. Vtedy $k = \omega\sqrt{\epsilon(\omega)\,\mu(\omega)}$ a cez k môžeme okamžite preintegrovať v sférických súradniciach[10] A to je všetko, zvyšné tri integrály cez dva uhly v $\vec{k}$-priestore a cez ω nevieme urobiť bez explicitnej znalosti funkcií $\epsilon(\omega)$ a $\mu(\omega)$. Výsledok v tejto forme však nie je veľmi prehľadný, preto sa zvyčajne postupuje inak.

Iný postup spočíva v tom, že δ-funkcie sa zbavíme integráciou cez premennú ω. To znamená, že najprv integrujeme cez ω pričom v argumente δ-funkcie považujeme ω za premennú a $\vec{k}$ za parameter, pričom využijeme vzťah $\delta(g_{\vec{k}}(\omega)) = \sum_i \frac{\delta(\omega-\omega_i(\vec{k}))}{|g'(\omega_i(\vec{k}))|}$, kde $\omega_i(\vec{k})$ sú (explicitne neznáme) nulové body funkcie $g_{\vec{k}}(\omega) = k^2 - \omega^2\,\epsilon(\omega)\,\mu(\omega)$. Integrácia cez ω dá $\vec{E}(\vec{r},t) = \int \sum_i \vec{c}_i\,(\vec{k}\,)\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}+\omega_i(\vec{k}\,)t)}\,d^3k$, kde $\vec{c}_i\,(\vec{k}\,) = \frac{\vec{e}\,(\vec{k},\omega_i(\vec{k}\,))}{|g'(\omega_i(\vec{k}))|}$ sú ľubovoľné funkcie premennej $\vec{k}$ (tú ľubovoľnosť zdedili po funkcii $\vec{e}\,(\vec{k},\omega)$).

Koľko nulových bodov má funkcia $g_{\vec{k}}(\omega)$? V prvom rade si treba uvedomiť, že ak je nejaké ω riešením rovnice $k^2 - \omega^2\,\epsilon(\omega)\,\mu(\omega) = 0$ pre dané k, potom je riešením aj $-\omega$. Naozaj, pre reálne funkcie $f(t)$ platí $f^*(\omega) = f(-\omega)$, takže $(-\omega)^2\,\epsilon(-\omega)\,\mu(-\omega) = \omega^2\,\epsilon^*(\omega)\,\mu^*(\omega) = (\omega^2\,\epsilon(\omega)\,\mu(\omega))^* = (k^2)^* = k^2$. Nič viac vo všeobecnosti povedať nevieme. Ak ale budeme predpokladať (a v konkrétnych prípadoch to potom musíme overiť), že až na znamienko je ω určené hodnotou k jednoznačne, potom dostaneme

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\alpha}(\vec{k})\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}+\omega(k)t)} + \vec{\beta}(\vec{k})\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega(k)t)}\,d^3k$$

A to je superpozícia rovinných monochromatických vĺn so všeobecnou, nie nutne lineárnou závislosťou $\omega(k)$. Za uvedeného predpokladu sme teda dostali, že riešenie Maxwellových rovníc bez nábojov a prúdov v prostredí s lineárnou, stále rovnakou pamäťou, vyzerá až na jeden rozdiel rovnako, ako riešenie vo vákuu. Obe riešenia majú tvar superpozície rovinných monochromatických vĺn, rozdiel spočíva v rôznej závislosti ω od $\vec{k}$.

[10]Ak položíme os z v smere vektora $\vec{r}$, potom

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-1}^{1} d\cos\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dk\,\vec{e}\,(k,\varphi,\vartheta,\omega)\,\delta\left(k^2 - \omega^2\,\epsilon(\omega)\,\mu(\omega)\right)\,e^{i(kr\cos\vartheta+\omega t)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-1}^{1} d\cos\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\;\vec{\alpha}\,(\varphi,\vartheta,\omega)\,e^{i(\omega\sqrt{\epsilon(\omega)\,\mu(\omega)}r\cos\vartheta+\omega t)}\end{aligned}$$

kde $\vec{\alpha}\,(\varphi,\vartheta,\omega) = \vec{e}\,(\omega\sqrt{\epsilon(\omega)\,\mu(\omega)},\varphi,\vartheta,\omega)$ je ľubovoľná funkcia premenných φ,ϑ,ω.

Grupová rýchlosť vlnového balíka

Všeobecné riešenie Maxwellových rovníc bez nábojov a prúdov v neohraničenom prostredí s lineárnou, stále rovnakou pamäťou, vyzerá takmer rovnako, ako ich riešenie vo vákuu. V obidvoch prípadoch ide o superpozíciu rovinných monochromatických priečne polarizovaných vĺn, ktoré sa šíria rýchlosťou $\frac{\omega(k)}{k}$ (všetky tieto veci sa nahliadnu rovnakým spôsobom ako v prípade vákua a toto je vhodná chvíľa na zopakovanie si príslušných argumentov, k čomu je čitateľ dosť nástojčivo vyzývaný). Jediný rozdiel je vo funkcii $\omega(k)$. Pre vákuum je táto funkcia lineárna $\omega(k) = ck$ a rýchlosť všetkých rovinných monochromatických vĺn je teda rovnaká (rovná c). Pre vlny v disperznom prostredí to už pravda nie je. Každá monochromatická vlna sa šíri svojou vlastnou rýchlosťou $\frac{\omega(k)}{k}$, ktorej hovoríme fázová rýchlosť.

Stretnúť skutočnú monochromatickú rovinnú vlnu, ktorá vyzerá rovnako v celom vesmíre, je prakticky nemožné. To, čo sa v svete okolo nás naozaj vyskytuje, sú rôzne superpozície monochromatických vĺn. Superpozíciám, ktoré sú nezanedbateľne veľké len v určitej ohraničenej oblasti priestoru (a to aj v premenných $\vec{r}, t$ aj v premenných $\vec{k}, \omega$) hovoríme vlnové balíky. Predstavme si teraz vlnový balík zložený iba z monochromatických vĺn z malého okolia nejakého $\vec{k}_0$. Všetky tieto monochromatické vlny majú fázovú rýchlosť blízku k $\frac{\omega(k_0)}{k_0}$. Aká bude rýchlosť celého vlnového balíka?

Ak by sa nejednalo o vlnový balík, ale povedzme o kŕdeľ husí, z ktorých každá letí rýchlosťou približne $\vec{v}_0$, potom aj celý kŕdeľ letí približne takouto rýchlosťou. V prípade vĺn je to inak. Vlnový balík sa môže pohybovať rýchlosťou, ktorá je rádovo iná ako rýchlosť jednotlivých monochromatických vĺn. Tento pozoruhodný a na prvý pohľad prekvapujúci jav sa teraz pokúsime aspoň do istej miery pochopiť. Sústredíme sa pritom na jednorozmerný prípad, ktorý je formálne jednoduchší a vidno na ňom všetko podstatné. Uvažujme teda jednorozmerný vlnový balík

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(k)\, e^{i(kx+\omega(k)t)} + \beta(k)\, e^{i(kx-\omega(k)t)}\, dk$$

$$\alpha(k) \neq 0 \quad \text{len na malom intervale } \langle k_0 - \delta k, k_0 + \delta k\rangle$$

$$\beta(k) = 0 \quad \text{všade}$$

Rozviňme teraz funkciu $\omega(k)$ do Taylorovho radu v okolí k_0 a predpokladajme, že δk je natoľko malé, aby boli všetky členy vyššie ako lineárne zanedbateľné

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \omega'(k_0)(k - k_0) + \ldots$$

kde $\omega'(k) = \frac{d\omega(k)}{dk}$. Dosadením a zanedbaním zanedbateľného dostaneme

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{k_0-\delta k}^{k_0+\delta k} \alpha(k)\, e^{i(kx+\omega(k_0)t+\omega'(k_0)(k-k_0)t)}\, dk \\ &= e^{i(\omega(k_0)-\omega'(k_0)k_0)t} \int_{k_0-\delta k}^{k_0+\delta k} \alpha(k)\, e^{i(kx+\omega'(k_0)k\, t)}\, dk \end{aligned}$$

čo je (nejakým periodickým fázovým faktorom závislým len od času vynásobená) superpozícia monochromatických vĺn, ktoré sa všetky šíria rovnakou rýchlosťou $\frac{\omega'(k_0)k}{k} = \omega'(k_0)$. Táto spoločná rýchlosť je zároveň rýchlosťou celého balíka (prečo?) a hovoríme jej grupová rýchlosť vlnového balíka.

Príklady

1. Precvičenie novej metódy na starom príklade.
Nájdite riešenie pre Maxwellove rovnice vo vákuu bez nábojov a prúdov metódou Fourierovej transformácie rovníc.

2. Elementárna ilustrácia grupovej rýchlosti.
Notoricky známy príklad, na ktorom je dobre vidieť rozdiel medzi grupovou a fázovou rýchlosťou, aj keď z neho vôbec nie je jasná univerzálnosť týchto pojmov. Uvažujme superpozíciu dvoch vĺn $u(x,t) = \cos(kx+\omega t)+\cos((k+\Delta k)x+(\omega+\Delta\omega)t)$, pričom $\Delta k \ll k$ a $\frac{\omega}{k} \neq \frac{\omega+\Delta\omega}{k+\Delta k}$. Pomocou súčtových vzorcov pre kosínus ukážte, že superpozícia sa pohybuje grupovou rýchlosťou $\frac{\Delta\omega}{\Delta k}$. (Odporúčanie: výsledok si nakreslite, najlepšie na počítači ako animáciu.)

3. Gaussovský balík.

4

ELEKTROMAGNETICKÉ ŽIARENIE

Cieľom tejto kapitoly je preskúmať jeden dôležitý fyzikálny jav, ktorý možno v stručnosti sformulovať nasledovne: Elektrický náboj pohybujúci sa so zrýchlením nevyhnutne stráca časť svojej energie. Deje sa to tak, že časť kinetickej energie náboja sa premení na energiu elmag poľa a táto energia "odíde do nekonečna". Kľúčovým slovným spojením predchádzajúcej vety nie je spojenie "premení sa na energiu elmag poľa"(to ešte nie je žiarenie), ale spojenie "odíde do nekonečna"(až tomuto hovoríme žiarenie). Pod elektromagnetickým žiarením totiž rozumieme práve tú časť elemag polí, ktorá sa úplne "oslobodí"od náboja a putuje si priestorom nezávisle od náboja. Zmyslom tejto kapitoly je vysvetliť si, ako je existencia tejto časti elmag polí zašifrovaná v Maxwellových rovniciach a ako ju odtiaľ dešifrovať.

V prípade vákua bez nábojov a prúdov bolo výhodné pracovať v Coulombovej kalibrácii, v ktorej sa ľahko nahliadla transverzálnosť (priečna polarizácia) elmag vĺn. V prípade nenulových hustôt náboja a/alebo prúdu je výhodnejšia Lorenzova kalibrácia, v ktorej majú rovnice pre skalárny aj vektorový potenciál tvar vlnových rovníc s nenulovou pravou stranou

$$\triangle\varphi(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(\vec{r},t) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r},t)$$
$$\triangle\vec{A}(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}(\vec{r},t) = -\mu_0\vec{j}(\vec{r},t)$$

Tieto rovnice sa teraz naučíme riešiť metódou Greenovej funkcie. Podobne ako v prípade Poissonovej rovnice, aj v prípade vlnovej rovnice bude Greenova funkcia definovaná ako riešenie rovnice s δ-funkciou na pravej strane – akurát, že tentoraz to nebude len $\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$, ale $\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\delta(t-t')$. Základná idea metódy spočíva v tom, že ľubovoľnú pravú stranu vieme veľmi ľahko zapísať ako superpozíciu δ-funkcií a riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice vieme potom podľa princípu superpozície okamžite napísať ako rovnakú superpozíciu Greenových funkcií. (Predchádzajúca veta by mala byť po tom, čo sme sa o Greenovej funkcii naučili pri Poissonovej rovnici, úplne zrozumiteľná. Ak nebola, treba si ju poriadne premyslieť a pochopiť.)

Poznámka. (O zdrojoch v akustike.) Rovnica pre skalárny elmag potenciál je prakticky zhodná s rovnicou pre akustický potenciál (rozdiel je len v prítomnosti alebo neprítomnosti faktora $-1/\epsilon_0$). Mnohé závery tejto kapitoly sa preto budú týkať aj akustiky. Funkcia $\rho(\vec{r},t)$ súvisí v akustike so zvonku pridanou hustotou hmotnosti, jej fyzikálna interpretácia a praktická realizácia sú teda komplikovanejšie ako v prípade elektrodynamiky.

1. Jednoznačnosť riešenia vlnovej rovnice

Ako sme už spomínali v kapitole o elektrostatike, pri akejkoľvek diferenciálnej rovnici je užitočné vyjasniť si hneď na začiatku otázky existencie a jednoznačnosti riešenia. Podobne ako v prípade Poissonovej rovnice, aj pri vlnovej rovnici existenciu riešenia dokazovať nebudeme (v konkrétnych prípadoch vyplynie z toho, že riešenie explicitne nájdeme), ale vetu o jednoznačnosti riešenia sformulujeme a dokážeme (bez tejto vety by sme nemohli používať uhádnutie ako korektnú metódu riešenia). Hlavný rozdiel oproti Poissonovej rovnici je, že v prípade vlnovej rovnice máme okrem okrajových podmienok (Dirichletových resp. Neumannových)

$$\varphi(\vec{r},t)|_S = f(\vec{r},t) \qquad \text{resp.} \qquad \left.\frac{\partial}{\partial n}\varphi(\vec{r},t)\right|_S = g(\vec{r},t)$$

v typickej situácii zadané aj počiatočné podmienky (Cauchyho)

$$\varphi(\vec{r},0) = \varphi_0(\vec{r}) \qquad \text{a} \qquad \dot{\varphi}(\vec{r},0) = \upsilon_0(\vec{r})$$

Veta o jednoznačnosti riešenia pre skalárnu vlnovú rovnicu

> Dirichletova resp. Neumannova okrajová úloha (s Cauchyho počiatočnými podmienkami) pre skalárnu vlnovú rovnicu v oblasti ohraničenej uzavretou plochou S má najviac jedno riešenie, t.j. ak riešenie existuje, tak je jednoznačné.

Dôkaz je podobne ako v prípade Poissonovej rovnice založený na Greenovej identite

$$\int_V (\varphi\triangle\psi + \nabla\varphi\cdot\nabla\psi)dV = \oint_S \varphi\partial_n\psi dS$$

(pripomeňme, že ide o priamy dôsledok Gaussovej vety pre vektorové pole $\varphi\nabla\psi$).

Nech φ_1 a φ_2 sú dve riešenia uvažovanej úlohy. Ich rozdiel $\phi = \varphi_1 - \varphi_2$ spĺňa v oblasti ohraničenej plochou S rovnicu $\triangle\phi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = 0$ a na hranici S má ϕ resp. $\partial_n\phi$ nulovú hodnotu. Ak v Greenovej identite položíme $\varphi = \frac{\partial}{\partial t}\phi$ a $\psi = \phi$ dostaneme

$$\int_V \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\triangle\phi + \nabla\frac{\partial\phi}{\partial t}\cdot\nabla\phi\right)dV = 0$$

kde sme využili nulové okrajové podmienky ($\phi(\vec{r},t)|_S = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{r},t)|_S = 0$). Ďalej využijeme vlnovú rovnicu

$$\int_V \left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \nabla\frac{\partial\phi}{\partial t}\cdot\nabla\phi\right)dV = 0$$

a toto prepíšeme do tvaru

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_V \left(\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + (\nabla\phi)^2\right)dV = 0$$

Hodnota tohto integrálu sa teda v čase nemení a keďže na počiatku bola nulová, je nulová navždy. To ale znamená, že nulová je aj podintegrálna funkcia (vzhľadom na to, že je všade nezáporná). A to ďalej znamená, že

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \qquad \wedge \qquad \nabla\phi = 0$$

Z nulovosti gradientu vyplýva, že $\phi \equiv \text{const}$, a z nulovosti časovej derivácie vyplýva, že táto konštanta je taká ako na počiatku t.j. nulová. Takže $\phi \equiv 0$ a teda $\varphi_1 \equiv \varphi_2$.

2. Greenova funkcia vlnovej rovnice

Vlnovú rovnicu s ľubovoľnou pravou stranou budeme riešiť metódou Greenovej funkcie, pričom Greenova funkcia je definovaná ako riešenie rovnice s δ-funkciou (vo všetkých premenných) na pravej strane. Takáto pravá strana zodpovedá bodovému náboju, ktorý sa objaví v mieste $\vec{r}\,'$ v jedinom momente t'.

$$\triangle G(\vec{r},\vec{r}\,',t,t') - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(\vec{r},\vec{r}\,',t,t') = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\delta(t-t')$$

Okrem splnenia rovnice požadujeme splnenie nulovej okrajovej podmienky (Dirichletovej alebo Neumannovej) na hranici a namiesto počiatočnej podmienky je v kraji zvykom požadovať nulovosť funkcie pred objavením sa zdroja (aby Greenova funkcia opisovala len polia, ktoré vznikli v dôsledku objavenia sa bodového zdroja na pravej strane rovnice)

$$\lim_{r\to\infty} G(\vec{r},\vec{r}\,',t,t') = 0 \qquad\qquad G(\vec{r},\vec{r}\,',t,t') = 0 \text{ pre } t < t'$$

Takejto Greenovej funkcii sa hovorí retardovaná, čiže opozdená.

Počiatočné podmienky pre retardovanú Greenovu funkciu si zaslúžia komentár. Sú síce dobre fyzikálne motivované, ale nie sú to štandardné Cauchyho počiatočné podmienky, aké sa vyskytujú napríklad v predpokladoch vety o jednoznačnosti. Nebude to spôsobovať problémy napríklad vtedy, ak budeme chcieť nájsť Greenovu funkciu čiatočným uhádnutím? Nebude. Po prvé, Greenovu funkciu nájdeme tentoraz bez hádania, a po druhé, z podmienky pre retardovanú Greenovu funkciu sa dajú relatívne ľahko odvodiť Cauchyho počiatočné podmienky pre túto funkciu.[1]

Ak máme riešiť vlnovú rovnicu s pravou stranou $-\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r},t)$, potom túto pravú stranu môžeme napísať ako $-\frac{1}{\epsilon_0}\int \rho(\vec{r}\,',t')\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\delta(t-t')\,d^3r'\,dt'$, čo môžeme chápať ako superpozíciu δ-funkcií. Princíp superpozície nám hneď dá partikulárne riešenie tejto rovnice ako rovnakú superpozíciu retardovaných Greenových funkcií

$$\varphi(\vec{r},t) = -\tfrac{1}{\epsilon_0}\int \rho(\vec{r}\,',t')G(\vec{r},\vec{r}\,',t,t')\,d^3r'\,dt'$$

Avšak podobne ako v prípade Poissonovej rovnice, aj tu vieme dostať z Greenovej funkcie nielen partikulárne, ale kompletné všeobecné riešenie. Inými slovami, aj pre vlnovú rovnicu platí magic rule, podobné tomu, ktoré platí pre Poissonovu rovnicu. Z časopriestorových dôvodov sa mu však v tomto texte nebudeme venovať a vyslovene zvedavého čitateľa odkážeme napríklad na veľmi peknú knihu G. Bartona *Elements of Green's Functions and Propagation – Potentials, Diffusion and Waves*. Na porozumenie javu elektromagnetického žiarenia – čo je náš hlavný cieľ – nám totiž bude stačiť partikulárne riešenie v jednom konkrétnom prípade, a to v prípade neohraničeného priestoru. Naším najbližším cieľom je preto nájsť retardovanú Greenovu funkciu pre tento prípad.

---

[1] Ak integrujeme diferenciálnu rovnicu pre Greenovu funkciu podľa času t od $t'-\varepsilon$ do $t'+\varepsilon$, dostaneme $\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} dt\, \triangle\, G(\vec{r},\vec{r}\,',t,t') - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}G(\vec{r},\vec{r}\,',t'+\varepsilon,t') = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$, kde sme v druhom člene využili počiatočnú podmienku pre retardovanú Greenovu funkciu, z ktorej jednoducho vyplýva $\frac{\partial}{\partial t}G(\vec{r},\vec{r}\,',t'-\varepsilon,t') = 0$. Pre $\varepsilon \to 0$ ide prvý integrál do nuly, čím dostávame Cauchyho podmienku v $t=t'$ pre prvú deriváciu $\frac{\partial}{\partial t}G(\vec{r},\vec{r}\,',t',t') = -c^2\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$. Ďalšou takouto integráciou dostaneme Cauchyho podmienku pre samotnú funkciu $G(\vec{r},\vec{r}\,',t',t') = 0$.

Retardovaná Greenova funkcia pre neohraničený priestor

Uvažujme neohraničený priestor, v ktorom nie je translačná symetria vlnovej rovnice pokazená existenciou hranice. Z toho, že pravá strana rovnice pre Greenovu funkciu závisí len od rozdielov $\vec{r}-\vec{r}\,'$ a $t-t'$ je intuitívne jasné, že aj Greenova funkcia by mala závisieť len od týchto rozdielov (ak poznáme riešenie pre bodový zdroj, ktorý sa objavil tu a teraz, prenesením tohto riešenia v priestore a v čase dostaneme riešenie pre bodový zdroj, ktorý sa objavil hocikedy a hocikde). Ak je teda funkcia $g(\vec{R},\tau)$ riešením rovnice

$$\triangle g(\vec{R},\tau)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}g(\vec{R},\tau)=\delta(\vec{R})\delta(\tau)$$

s podmienkami $\lim_{R\to\infty} g(\vec{R},\tau)=0$ a $g(\vec{R},\tau)=0$ pre $\tau<0$, potom retardovanú Greenovu funkciu vlnovej rovnice dostaneme ako $G(\vec{r},\vec{r}\,',t,t')=g(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t')$.

Rovnicu pre $g(\vec{R},\tau)$ riešime technikou, ktorú sme sa naučili v časti o vlnách v disperznom prostredí, čiže Fourierovou transformáciou

$$g(\vec{R},\tau)\to\tilde{g}(\vec{k},\omega)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}g(\vec{R},\tau)\,e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{R}+\omega\tau)}d^3R\,d\tau$$

Táto transformácia prevedie diferenciálnu rovnicu na rovnicu algebraickú

$$\left(-k^2+\frac{\omega^2}{c^2}\right)\tilde{g}(\vec{k},\omega)=\frac{1}{(2\pi)^4}$$

ktorej riešenie je triviálne (pre $k^2c^2-\omega^2\neq 0$)

$$\tilde{g}(\vec{k},\omega)=\frac{c^2}{(2\pi)^4}\frac{1}{\omega^2-k^2c^2}$$

Netriviálna je integrácia pri spätnej Fourierovej transformácii

$$g(\vec{R},\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{g}(\vec{k},\omega)\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{R}+\omega\tau)}d^3k\,d\omega=\frac{c^2}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega^2-k^2c^2}\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{R}+\omega\tau)}d^3k\,d\omega$$

Integrácia cez ω sa najjednoduchšie robí trikom, ktorým sa integrál prevedie na integrál v komplexnej rovine a ten sa potom veľmi jednoducho vypočíta pomocou reziduovej vety. Ale keďže tento trik predbieha prednášku z matematiky, uvedieme len výsledok[2] . Pre $\tau<0$ máme z "počiatočnej podmienky"$g(\vec{R},\tau)=0$ a pre $\tau\geq 0$

$$g(\vec{R},\tau)=-\frac{c}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin kc\tau}{k}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}d^3k$$

[2]Pre tých, ktorí integrovanie v komplexnej rovine a reziduovú vetu poznajú, stručne naznačme postup. Integrál po reálnej osi (náš integrál) doplníme nekonečne veľkým oblúkom v hornej alebo dolnej polrovine tak, aby sme dostali integrál po uzavretej krivke v komplexnej rovine. Ak doplníme horný oblúk v prípade kladného τ, respektíve dolný oblúk v prípade záporného τ, potom integrál po týchto oblúkoch bude nulový a v takom prípade sa náš pôvodný integrál po reálnej osi rovná integrálu po príslušnej uzavretej krivke. Póly podintegrálnej funkcie však ležia na reálnej osi a preto na výpočet integrálu nemôžeme priamo použiť reziduovú vetu. Súčasťou triku je preto mierna deformácia krivky tak, aby sme póly obišli po malých oblúčikoch ležiacich v dolnej polrovine (prečo v dolnej, uvidíme hneď). Teraz môžeme použiť reziduovú vetu, ktorá nám dá pre záporné τ automaticky nulu (nijaké póly v oblasti ohraničenej krivkou v dolnej polrovine). Presne takýto výsledok sme pre záporné τ potrebovali (a preto sme malé oblúčiky umiestnili do dolnej polroviny). Teraz už stačí použiť reziduovú vetu aj pre kladné τ. Póly sú dva $\omega=\pm kc$, reziduá v nich sú $\pm\frac{1}{2kc}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{R}\pm kc\tau)}$ a $2\pi i$-násobok súčtu reziduí je teda $-\frac{2\pi}{kc}e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{R}}\sin kc\tau$.

Pre ďalšie integrácie je výhodné prejsť do sférických súradníc, kde je integrál cez jeden uhol triviálny, cez druhý uhol jednoduchý a integrál cez radiálnu premennú sa ukáže byť jedným zo známych vyjadrení δ-funkcie. V sférických súradniciach máme

$$\begin{aligned} g(\vec{R},\tau) &= -\frac{c}{(2\pi)^3}\int_0^\infty k^2 dk \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, \frac{\sin kc\tau}{k}\, e^{ikR\cos\theta} \\ &= -\frac{c}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dk\; k\, \sin kc\tau \int_{-1}^1 d\cos\theta\, e^{ikR\cos\theta} \\ &= -\frac{c}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dk\; k\, \sin kc\tau\, \frac{e^{ikR}-e^{-ikR}}{ikR} \end{aligned}$$

Teraz ešte vyjadríme sínus cez imaginárne exponenty $\sin kc\tau = \frac{1}{2i}(e^{ikc\tau}-e^{-ikc\tau})$ a tým prevedieme integrál na známy tvar reprezentujúci Diracovu δ-funkciu

$$\begin{aligned} g(\vec{R},\tau) &= \frac{c}{(2\pi)^2}\frac{1}{2R}\int_0^\infty dk\, \left(e^{ik(c\tau+R)} + e^{-ik(c\tau+R)} - e^{ik(c\tau-R)} - e^{-ik(c\tau-R)}\right) \\ &= \frac{c}{(2\pi)^2}\frac{1}{2R}\int_{-\infty}^\infty dk\, \left(e^{ik(c\tau+R)} - e^{ik(c\tau-R)}\right) \\ &= \frac{c}{4\pi R}\left(\delta(c\tau+R) - \delta(c\tau-R)\right) \end{aligned}$$

Nakoniec si už len uvedomíme, že ak $\tau > 0$ alebo $R > 0$, potom $\delta(c\tau+R) = 0$, takže pre takéto hodnoty argumentov dostávame

$$g(\vec{R},\tau) = -\frac{c}{4\pi R}\,\delta(c\tau - R)$$

A ak ešte využijeme, že pre kladnú konštantu c platí $\delta(cx) = \frac{1}{c}\delta(x)$, tak môžeme výsledok zapísať ako

$$g(\vec{R},\tau) = -\frac{1}{4\pi R}\,\delta\left(\tau - \frac{R}{c}\right)$$

Tým sme našli vyjadrenie Greenovej funkcie všade okrem bodu $\tau = 0 \ \wedge\ R = 0$, ktorý by ešte potreboval jemnejšiu diskusiu. Tej sa však vyhneme, pretože poznať Greenovu funkciu v tomto bode nebudeme v ďalšom potrebovať.

Poznámka. Nájdená Greenova funkcia má tvar Coulombovského potenciálu, ktorý sa šíri od zdroja rýchlosťou svetla a je nenulový práve len tam, kam stihne doraziť svetlo za čas τ. Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že ide o trojrozmernú analógiu kruhov na vode, čo sú vlny na dvojrozmernej hladine. Ale tak to nie je. Pri tejto príležitosti je asi vhodné explicitne zdôrazniť, že zatiaľ čo riešenia vlnovej rovnice s nulovou pravou stranou v rôznych dimenziách sa na seba veľmi podobajú, Greenove funkcie sú pre rôzne dimenzie výrazne rôzne. Greenova funkcia pre 2D a 1D sa počíta rovnako ako v 3D, ale pri spätnej Fourierovej transformácii dostávame iné priestorové integrály. Vo všetkých dimenziách je retardovaná Greenova funkcia nulová všade tam, kam ešte svetlo nestihlo doraziť. Ale za svetelným frontom (to je tá oblasť, kam svetlo práve stihlo doraziť) je to v rôznych dimenziách rôzne. V 3D je to nula, v 2D funkcia rýchlo klesajúca od svetelného frontu smerom ku stredu (to sú, zhruba povedané, tie kruhy na vode) a v 1D je to konštanta. Kto chce vedieť viac, nech si pozrie napríklad už spomínanú Bartonovu knihu.

3. Elektromagnetické žiarenie bodového náboja

Maxwellove rovnice pre elmag potenciály vo vákuu majú v Lorenzovej kalibrácii tvar vlnových rovníc s nenulovou pravou stranou

$$\triangle\varphi(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(\vec{r},t) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r},t)$$
$$\triangle\vec{A}(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}(\vec{r},t) = -\mu_0\vec{j}(\vec{r},t)$$

V ďalšom nás bude zaujímať riešenie týchto rovníc v neohraničenom priestore, pretože práve v tomto prípade vidno celý jav elektromagnetického žiarenia najlepšie.

Akonáhle poznáme Greenovu funkciu, vieme riešiť danú rovnicu s ľubovoľnou pravou stranou. Z lineárnosti vlnovej rovnice vyplýva, že všeobecné riešenie rovníc pre elmag potenciály v Lorenzovej kalibrácii sa dá napísať v tvare

$$\varphi(\vec{r},t) = -\frac{1}{\epsilon_0}\int g(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t')\,\rho(\vec{r}\,',t')d^3r'\,dt'$$
$$\vec{A}(\vec{r},t) = -\mu_0\int g(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t')\,\vec{j}(\vec{r}\,',t')d^3r'\,dt'$$

Počítanie elmag potenciálov pre dané rozloženie náboja a prúdu v priestore a v čase sme teda previedli na počítanie príslušných integrálov a tie môžeme teraz počítať vo fyzikálne zaujímavých prípadoch. Mimoriadne dôležitým prípadom je pritom prípad hustôt náboja a prúdu zodpovedajúcich pohybujúcemu sa bodovému náboju. Práve tento prípad teraz pomerne podrobne preskúmame.

Predstavme si pohybujúci sa bodový náboj e. Pohyb je opísaný závislosťou polohového vektora od času. Ak označíme tento polohový vektor gréckym písmenom ksí (malé aj veľké r už používame na označenie súradníc), potom je pohyb náboja daný funciou $\vec{\xi}(t)$. Ako vyzerá príslušná hustota náboja? To predsa vieme – hustota bodového náboja je daná δ-funkciou, čiže

$$\rho(\vec{r},t) = e\,\delta(\vec{r}-\vec{\xi}(t))$$

A ako vyzerá hustota prúdu pohybujúceho sa bodového náboja? Ako súčin náboja a rýchlosti, čiže

$$\vec{j}(\vec{r},t) = e\,\dot{\vec{\xi}}(t)\,\delta(\vec{r}-\vec{\xi}(t))$$

Elmag potenciály takto sa pohybujúceho náboja sú teda dané integrálmi

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\delta\left(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)\,\delta(\vec{r}\,'-\vec{\xi}(t'))\,d^3r'\,dt'$$
$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{e\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\delta\left(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)\,\dot{\vec{\xi}}(t')\,\delta(\vec{r}\,'-\vec{\xi}(t'))\,d^3r'\,dt'$$

Integrácia cez d^3r' je triviálna a vedie na

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{1}{|\vec{r}-\vec{\xi}(t')|}\,\delta\left(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{\xi}(t')|}{c}\right)\,dt'$$
$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{e\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{|\vec{r}-\vec{\xi}(t')|}\,\delta\left(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{\xi}(t')|}{c}\right)\,\dot{\vec{\xi}}(t')\,dt'$$

Posledná integrácia obsahuje δ-funkciu, ktorej argumentom je iná funkcia, konkrétne

$$g(t') = t - t' - \tfrac{|\vec{r}-\vec{\xi}(t')|}{c}$$

Ak chceme vypočítať príslušný integrál, potrebujeme poznať nulové body tejto funkcie a jej derivácie v týchto nulových bodoch. To prvé sa nám nepodarí, rovnicu $g(t') = 0$ nedokážeme vyriešiť pre všeobecne zadané $\vec{\xi}(t')$. To druhé je jednoduché

$$\frac{dg(t')}{dt'} = -1 - \frac{1}{c}\frac{\vec{r}-\vec{\xi}(t')}{|\vec{r}-\vec{\xi}(t')|} \cdot (-\dot{\vec{\xi}}(t')) = -1 + \frac{\vec{n}(t') \cdot \dot{\vec{\xi}}(t')}{c}$$

kde jednotkový vektor $\vec{n}(t')$ je definovaný vzťahom $\vec{n}(t') = \frac{\vec{r}-\vec{\xi}(t')}{|\vec{r}-\vec{\xi}(t')|}$.

Teraz príde kľúčový moment celého výpočtu. Keďže náboje sa hýbu podsvetelnými rýchlosťami, máme $|\dot{\vec{\xi}}(t')| < c$, čiže $\frac{\vec{n}(t') \cdot \dot{\vec{\xi}}(t')}{c} < 1$ a teda $\dot{g}(t') < 0$. To znamená, že funkcia $g(t')$ je všade klesajúca. Ak je navyše pohyb náboja obmedzený len na nejakú konečnú oblasť priestoru, potom $g(\mp\infty) = \pm\infty$. Funkcia g teda začína v kladných číslach, končí v záporných a celý čas klesá. Taká funkcia, keďže je spojitá, má pre každú dvojicu $\vec{r}, t$ práve jeden nulový bod. Nevieme, kde je, ale vieme, že je práve jeden. A táto informácia bude dostatočná na vyvodenie zásadných fyzikálnych dôsledkov.

Označme čas, v ktorom funkcia $g(t')$ nadobúda nulovú hodnotu, symbolom t_{ret}. Tento čas, ktorému hovoríme retardovaný (oneskorený), nepoznáme – vieme len, že je jednoznačnou funkciou parametrov $\vec{r}, t$. Pomocou tohto času však môžeme ľahko zapísať $\delta(g(t'))$ ako $\frac{1}{|\dot{g}(t_{\text{ret}})|}\delta(t' - t_{\text{ret}})$, čiže

$$\delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r}-\vec{\xi}(t')|}{c}\right) = \frac{1}{1 - \frac{\vec{n}(t_{\text{ret}}) \cdot \dot{\vec{\xi}}(t_{\text{ret}})}{c}}\,\delta(t' - t_{\text{ret}})$$

A teraz už ľahko môžeme napísať výrazy pre elmag potenciály

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{\xi}(t_{\text{ret}})|}\;\frac{1}{1 - \frac{\vec{n}(t_{\text{ret}}) \cdot \dot{\vec{\xi}}(t_{\text{ret}})}{c}}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{e\mu_0}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{\xi}(t_{\text{ret}})|}\;\frac{1}{1 - \frac{\vec{n}(t_{\text{ret}}) \cdot \dot{\vec{\xi}}(t_{\text{ret}})}{c}}\,\dot{\vec{\xi}}(t_{\text{ret}})$$

Týmto potenciálom sa hovorí Liénard-Wiechertove potenciály. Ak pre lepšiu čitateľnosť výsledkov ešte zavedieme označenie

$$\vec{R}(t_{\text{ret}}) = \vec{r} - \vec{\xi}(t_{\text{ret}})$$

$$\vec{v}(t_{\text{ret}}) = \dot{\vec{\xi}}(t_{\text{ret}})$$

potom Liénard-Wiechertove potenciály nadobudnú prekvapujúco jednoduchý tvar

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\;\frac{1}{R - \frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{e\mu_0}{4\pi}\;\frac{\vec{v}}{R - \frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}}$$

kde $\vec{R}$ a $\vec{v}$ sú chápané v retardovanom čase t_{ret}.

Na výpočet elmag polí ($\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi$ a $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$) potrebujeme vypočítať derivácie potenciálov podľa x_i a t. Potenciály závisia od retardovaného času t_{ret}, ktorý je (implicitne zadanou) funkciou premenných $\vec{r}$ a t, takže ide o derivácie zloženej funkcie, pričom niektoré derivácie musíme počítať ako derivácie implicitne zadanej funkcie. Výpočet je dlhý a nudný, presunieme ho do príkladov, tu uvedieme len výsledok

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{R} \times \left[\left(\vec{R} - \frac{R\vec{v}}{c} \right) \times \vec{a} \right]}{c^2 \left(R - \frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c} \right)^3} + \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left(\vec{R} - \frac{R\vec{v}}{c} \right)}{\left(R - \frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c} \right)^3} \right)$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\, \vec{n} \times \vec{E}(\vec{r},t)$$

kde $\vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}$ a $\vec{a}$ je zrýchlenie pohybujúceho sa náboja (brané v retardovanom čase).

Najzaujímavejšie na týchto poliach je, ako sa chovajú pri $R \to \infty$, kde dominujú najpomalšie klesajúce členy úmerné $1/R$. Týmto členom sa hovorí radiačné polia

$$\vec{E}_{\mathrm{rad}}(\vec{r},t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \frac{\vec{n} \times \left[\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right) \times \vec{a} \right]}{c^2 \left(1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{c} \right)^3}$$

$$\vec{B}_{\mathrm{rad}}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\, \vec{n} \times \vec{E}_{\mathrm{rad}}(\vec{r},t)$$

Ako vyzerá tok energie ďaleko od náboja? Je daný Poyntingovým vektorom

$$\vec{S}_{\mathrm{rad}} = \vec{E}_{\mathrm{rad}} \times \vec{H}_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E}_{\mathrm{rad}} \times \left(\vec{n} \times \vec{E}_{\mathrm{rad}} \right)$$

a keďže $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ a ďalej $\vec{n} \cdot \vec{E}_{\mathrm{rad}} = \vec{n} \cdot (\vec{n} \times \ldots) = 0$

$$\vec{S}_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{\mu_0 c} E_{\mathrm{rad}}^2\, \vec{n}$$

Koľko energie pretečie za jednu sekundu plochou $d\vec{\Sigma}$ prislúchajúcou na sfére s veľkým polomerom R priestorovému uhlu $d\Omega$? Ak je pohyb náboja obmedzený na nejakú konečnú oblasť priestoru a ak nás zaujíma veľká sféra ďaleko od tejto oblasti, potom môžeme celú túto oblasť považovať za umiestnenú v strede sféry, a vtedy $d\vec{\Sigma} = \vec{n} R^2 d\Omega$, čiže intenzita vysielania energie do priestorového uhla $d\Omega$ je

$$dI = \vec{S}_{\mathrm{rad}} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\left| \vec{n} \times \left[\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right) \times \vec{a} \right] \right|^2}{c^4 \left(1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{c} \right)^6} d\Omega$$

Absolútne kľúčovou vlastnosťou tohto vzťahu je jeho nezávislosť od polomeru sféry. Množstvo energie, ktoré pretečie sférou, je rovnaké pre sféry s čoraz väčším polomerom. Táto energia teda odteká do nekonečna. Práve tomuto odtekaniu energie do nekonečna hovoríme elektromagnetické žiarenie. Všimnime si, že radiačné polia sú úmerné zrýchleniu náboja. To znamená, že k vyžarovaniu energie dochádza len v prípade nábojov pohybujúcich sa s nenulovým zrýchlením pričom energia vyžiarená (nenávratne stratená) za jednu sekundu do priestorového uhla $d\Omega$ je

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4\pi c^3} \frac{\left| \vec{n} \times \left[\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right) \times \vec{a} \right] \right|^2}{\left(1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{c} \right)^6}$$

Poznámka. (Čerenkovovo žiarenie)

Poznámka. (Einsteinov faktor)

Poznámka. (Rutherfordov model)

Jednoduché špeciálne prípady

Žiarenie nerelativistického náboja. Ak sa náboj pohybuje rýchlosťou oveľa menšou ako rýchlosť svetla, t.j. ak $v \ll c$, členy úmerné $\frac{v}{c}$ môžeme zanedbať a pre výkon vyžiarený do priestorového uhla $d\Omega$ dostaneme

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{4\pi c^3}\left|\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{a}\,)\right|^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{a^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta$$

kde θ je uhol mezi zrýchlením $\vec{a}$ a smerom $\vec{n}$. Vidíme, že uhlové rozloženie žiarenia nerelativistického náboja je také, že najviac vyžaruje v smere kolmom na svoje zrýchlenie (čiže oscilujúci náboj v smere kolmom na smer oscilácií, náboj pohybujúci sa po kružnici v smere svojej rýchlosti, a to dopredu aj dozadu). Celkový výkon žiarenia je daný tzv. Larmorovou formulou

$$I = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{a^2}{4\pi c^3}\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d\cos\theta\,(1-\cos^2\theta) = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{a^2}{c^3}$$

Žiarenie ultrarelativistického náboja. Ak sa náboj pohybuje takmer rýchlosťou svetla, t.j. ak $v \approx c$, potom rozhodujúca je šiesta mocnina v menovateli, čo je pre $\vec{n}$ v smere blízkom smeru $\vec{v}$ šiesta mocnina veľmi malého čísla. Vidíme, že uhlové rozloženie žiarenia ultrarelativistického náboja je také, že suverénne najviac vyžaruje pred seba (dopredu v smere rýchlosti). Takto vyzerá typické žiarenie v urýchľovačoch častíc na relativistické energie (tzv. synchrotrónové žiarenie). Čím bližšie je rýchlosť častice k rýchlosti svetla, tým viac energie vyžiari (jednak kvôli šiestej mocnice v menovateli, ale aj kvôli rastúcemu dostredivému zrýchleniu). Značná časť energie vloženej do urýchľovania ultrarelativistickej častice v kruhovom urýchľovači sa preto nevyužije na zvyšovanie jej energie, ale sa vyžiari vo forme elmag energie.

Rozptyl svetla na voľnom bodovom náboji. Rozptyl svetla je dôležitým fyzikálnym javom, ktorý spočíva v tom, že rovinná elmag vlna dopadne na nejaký náboj, ten sa začne v dôsledku Lorentzovej sily pohybovať s nejakým zrýchlením a tým pádom vyžarovať energiu aj do smerov iných, než bol smer pôvodnej dopadajúcej elmag vlny. Koľko energie sa vyžiari do jednotlivých smerov? Ako ilustráciu urobíme výpočet pre rozptyl svetla s veľkou vlnovou dĺžkou na voľnom bodovom náboji.

Pohybová rovnica pre hmotný bod s hmotnosťou m a nábojom e je vo všeobecnosti $m\ddot{\vec{r}}(t) = e\vec{E}(\vec{r},t) + e\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r},t)$. V elektromagnetickej vlne je $B = E/c$, takže pre nerelativistické náboje môžeme magnetickú silu zanedbať (je $\frac{v}{c}$-krát slabšia ako elektrická sila). Ak sa náboj pohybuje v oblasti, ktorej rozmery sú oveľa menšie ako vlnová dĺžka dopadajúcej vlny, potom môžeme elektrické pole považovať za priestorovo konštantné a časovo sínusové resp. kosínusové, čiže $m\ddot{\vec{r}}(t) = e\vec{E}_0\cos\omega t$. Túto rovnicu nemusíme riešiť, pretože jediné, čo potrebujeme, je zrýchlenie, a to nám tá rovnica priamo dáva. Dosadením do vzťahu pre vyžiarený výkon dostaneme

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{4\pi c^3}\frac{e^2E_0^2\cos^2\omega t}{m^2}\sin^2\theta$$

a vydelením hustotou výkonu dopadajúcej vlny $dI = c\epsilon_0 E_0^2\cos^2\omega$ získame účinný prierez pre tzv. Thompsonov rozptyl (voľný náboj, dostatočne veľká vlnová dĺžka)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}\right)^2\sin^2\theta$$

Príklady

1. Polia prislúchajúce Liénard-Wiechertovým potenciálom. (Nudné, pracné, dôležité.)
Úloha: Vypočítajte $\vec{E}$ a $\vec{B}$ pre Liénard-Wiechertove potenciály.
Postup:

$$E_i = -\frac{\partial}{\partial t} A_i - \mathrm{grad}_i\, \varphi = -\frac{\partial A_i}{\partial t_{\mathrm{ret}}} \frac{\partial t_{\mathrm{ret}}}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial t_{\mathrm{ret}}} \frac{\partial t_{\mathrm{ret}}}{\partial x_i}$$

$$B_i = \epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_k}{\partial t_{\mathrm{ret}}} \frac{\partial t_{\mathrm{ret}}}{\partial x_j} \right)$$

Budeme potrebovať deriváciu výrazu z L-W potenciálov (vypočítajte ju)

$$\frac{d}{dt_{\mathrm{ret}}} \frac{1}{R - \frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}} = \frac{\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{R} - \frac{v^2}{c} + \frac{\vec{R}\cdot\vec{a}}{c}}{\left(R - \frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2}$$

a derivácie funkcie $t_{\mathrm{ret}}(\vec{r}, t)$ danej implicitne vzťahom $t - t_{\mathrm{ret}}(\vec{r}, t) - \frac{|\vec{r} - \vec{\xi}(t_{\mathrm{ret}}(\vec{r},t))|}{c} = 0$ (vypočítajte ich)

$$\frac{\partial t_{\mathrm{ret}}}{\partial t} = \frac{R}{R - \frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}}$$

$$\frac{\partial t_{\mathrm{ret}}}{\partial x_i} = -\frac{1}{c} \frac{R_i}{R - \frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}}$$

Pomocou týchto derivácií (a s využitím $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$) dostaneme

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \left(\frac{R\vec{a}}{\left(R - \frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2} + \frac{\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{R} - \frac{v^2}{c} + \frac{\vec{R}\cdot\vec{a}}{c}}{\left(R - \frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^3} R\vec{v} \right)$$

$$\mathrm{grad}\, \varphi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\frac{\vec{v}}{c} - \frac{\vec{R}}{R}}{\left(R - \frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2} - \frac{\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{R} - \frac{v^2}{c} + \frac{\vec{R}\cdot\vec{a}}{c}}{\left(R - \frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^3} \frac{\vec{R}}{c} \right)$$

$$\mathrm{rot}\, \vec{A} = \frac{1}{c^2} \mathrm{rot}(\varphi\, \vec{v}) = \frac{1}{c^2} (\varphi\, \mathrm{rot}\, \vec{v} - \vec{v} \times \mathrm{grad}\, \varphi)$$

$$= \frac{1}{c^2} \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{a} \times \vec{R}}{c\left(R - \frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2} - \vec{v} \times \mathrm{grad}\, \varphi \right)$$

čo dá výsledok zo strany 100 (vidno po rozpísaní vektorových súčinov v tom výsledku).

4. Multipólový rozvoj potenciálov

Táto časť nie je prepísaná do TeXu, nebola odprednášaná a netreba z nej nič vedieť na skúšku.