

šikmý vrh u Newtona

chvála počítačové fyziky

mechanika 5

in the previous episode

- Vypočítame, ako vyzerá pohyb telesa, na ktoré pôsobí gravitácia aj odpor vzduchu
- Urobíme to pomocou programov v Pythone. Z počiatočnej podmienky a zo známych síl dokážeme prepovedať (vyveštit') celý pohyb
- Ak budeme poznať celý pohyb, dokážeme odpovedať na rôzne konkrétne otázky týkajúce sa tohto pohybu



prvý príklad: tenisová loptička

- skúsme takúto otázku:

Dá sa zahrať od základnej čiary vodorovný úder vo výške ramena tak, aby prešiel ponad sieť a potom dopadol do kurty?

- najprv to počítajme bez odporu vzduchu (to by vedel aj Galileo), ale potom sa pozrieme aj na to, ako sa dá tento odpor zaradiť (to už by Galileo nevedel)

dĺžka kurty	23.77 m
šírka kurty	8.23 m
výška siete (v strede)	0.91 m
hmotnosť loptičky	0.057 kg
polomer loptičky	0.034 m
rýchlosť loptičky pri forehande (muži)	35 m/s

- počiatkové podmienky:

$$x_0 = 0 \quad z_0 = 1.5$$

$$vx_0 = 35 \quad vz_0 = 0$$

- zrýchlenie (sa v tomto prípade nemení, takže ho stačí zadať raz)

$$ax_n = 0 \quad az_n = -9.81$$

- počítanie

$$x_{n+1} = x_n + vx_n * dt$$

$$z_{n+1} = z_n + vz_n * dt$$

$$vx_{n+1} = vx_n + ax_n * dt$$

$$vz_{n+1} = vz_n + az_n * dt$$



```
from pylab import *
```

```
dt=0.001
```

```
N=550
```

```
x=empty(N+1)
```

```
z=empty(N+1)
```

```
vx=empty(N+1)
```

```
vz=empty(N+1)
```

```
m=0.057
```

```
g=-9.81
```

```
x[0]=0.
```

```
z[0]=1.5
```

```
vx[0] = 35.
```

```
vz[0] = 0.
```

```
for n in range(0,N):
```

```
    x[n+1]=x[n]+vx[n]*dt
```

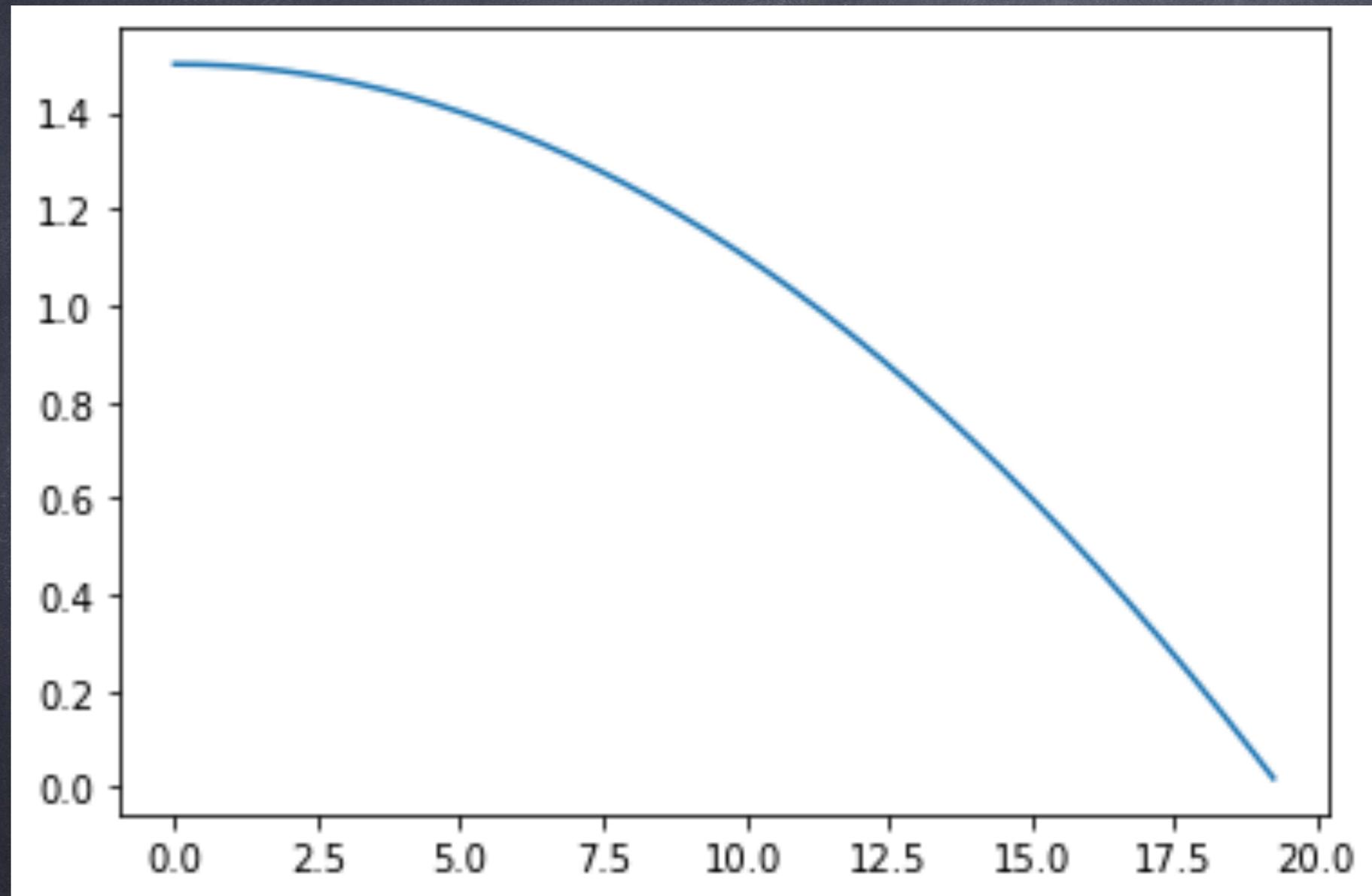
```
    z[n+1]=z[n]+vz[n]*dt
```

```
    vx[n+1]=vx[n] # Fx=0
```

```
    vz[n+1]=vz[n]+g*dt # Fz=m*g
```

```
plot(x,z)
```

nezdravý tenis (vo vákuu)



Numerické výstupy:

$z[547]$ 0.035

Loptička dopadá po čosi
viac ako pol sekunde

$x[340]$ 11.90

$z[340]$ 0.93

Loptička neprejde ponad
sieť' ($93 < 91 + 3.4$ cm),
ale má šancu na "prasa".

odpor vzduchu

- Síla odporu vzduchu je vo všeobecnosti komplikovanou funkcí rychlosti, ale pro typické rychlosti lopt v športe je velikost této síly úměrná druhé mocnině rychlosti

$$F = \alpha \cdot v^2$$

- Směr síly odporu vzduchu je opačný ako směr rychlosti

$$\vec{F} = -\alpha \cdot v \cdot \vec{v}$$

- Koeficient alfa je daný súčinem hustoty prostredia, prierezu loptičky a polovice istého aerodynamického koeficientu C (pre tenisovú loptičku je C okolo 0.5)

$$\alpha = \frac{1}{2} C \rho \pi r^2 = 0.001 \quad [\text{v jednotkách SI}]$$

• počiatkové podmienky:

$$x_0 = 0 \quad z_0 = 1.5$$

$$vx_0 = 35 \quad vz_0 = 0$$

• počítanie

$$v_n = \text{sqrt}(vx_n^2 + vz_n^2)$$

$$ax_n = (-0.001 v_n vx_n) / m$$

$$az_n = (mg - 0.001 v_n vz_n) / m$$

$$x_{n+1} = x_n + vx_n * dt$$

$$z_{n+1} = z_n + vz_n * dt$$

$$vx_{n+1} = vx_n + ax_n * dt$$

$$vz_{n+1} = vz_n + az_n * dt$$



```
from pylab import *
```

```
dt=0.001
```

```
N=600
```

```
x=empty(N+1)
```

```
z=empty(N+1)
```

```
vx=empty(N+1)
```

```
vz=empty(N+1)
```

```
v=empty(N+1)
```

```
ax=empty(N+1)
```

```
az=empty(N+1)
```

```
m=0.057
```

```
g=-9.81
```

```
x[0]=0.
```

```
z[0]=1.5
```

```
vx[0]=35.
```

```
vz[0]=0.
```

```
for n in range(0,N):
```

```
    v[n]=sqrt(vx[n]*vx[n] + vz[n]*vz[n])
```

```
    ax[n]= -0.001 * v[n] * vx[n] / m
```

```
    az[n]= ( m*g - 0.001 * v[n] * vz[n] )/m
```

```
    x[n+1]=x[n]+vx[n]*dt
```

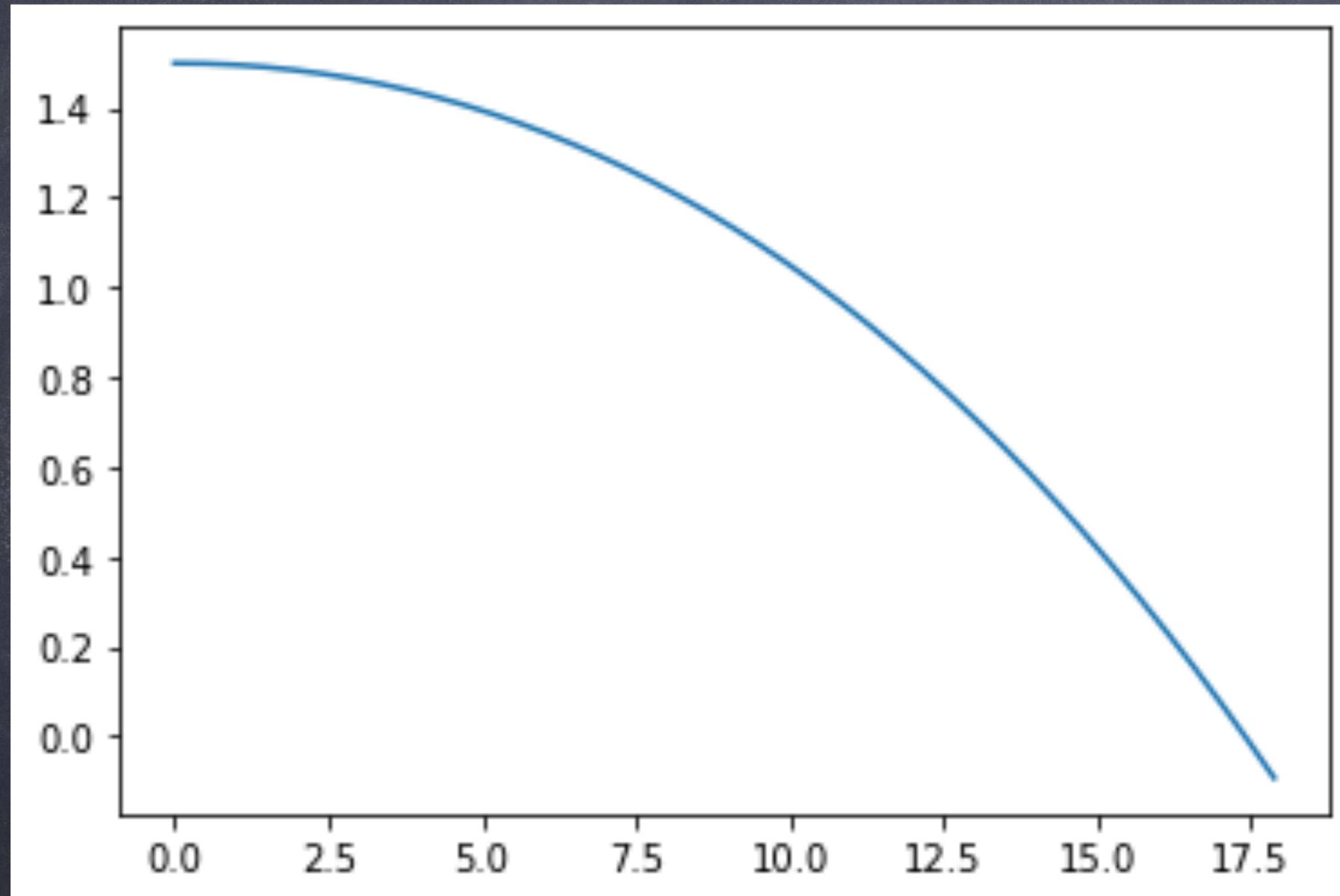
```
    z[n+1]=z[n]+vz[n]*dt
```

```
    vx[n+1]=vx[n]+ax[n]*dt
```

```
    vz[n+1]=vz[n]+az[n]*dt
```

```
plot(x,z)
```

tenis na čerstvém vzduchu



Numerické výstupy:

$z[574]$ 0.037

Loptičke to trvá
o čosi dlhšie ako
bez vzduchu

$x[377]$ 11.87

$z[377]$ 0.85

Loptička tentoraz
nepreletí cez sieť

druhý příklad: vrh guľou^v

- skúsme takúto otázku:
Pod akým uhlom má atlét vrhať guľu, aby doletela čo najďalej?
- Bez odporu vzduchu je všeobecne známa (nesprávna) odpoveď 45° . Aká je správna odpoveď a ako sa táto odpoveď zmení, ak vrháme guľu v reálnom svete?
- Je to vlastne otázka z balistiky (delostrelectva), preformulovaná do pacifistickej podoby.

hmotnosť guľe (muži)	7.26 kg
hmotnosť guľe (ženy)	4.00 kg
polomer guľe (muži)	0.06 m
polomer guľe (ženy)	0.05 m
svetový rekord (muži)	23.37 m
svetový rekord (ženy)	22.63 m
koeficient alfa (v SI)	
muži	0.003
ženy	0.002

• počiatkové podmienky:

$$x_0 = 0$$

$$z_0 = 2.$$

$$v_0 = 14.$$

$$\text{uhol} = 42. \text{ (v stupňoch)}$$

$$\text{theta} = \text{uhol} \cdot \pi/180 \text{ (v radiánoch)}$$

$$vx_0 = v_0 \cdot \cos(\text{theta})$$

$$vz_0 = v_0 \cdot \sin(\text{theta})$$

• počítanie rovnaké, ako predtým



```
from pylab import *
from numpy import *

dt=0.001
N=2300

x=empty(N+1)
z=empty(N+1)
vx=empty(N+1)
vz=empty(N+1)
v=empty(N+1)
ax=empty(N+1)
az=empty(N+1)
print(type(x))

m=7.26
g=-9.81

x[0]=0.
z[0]=2.0

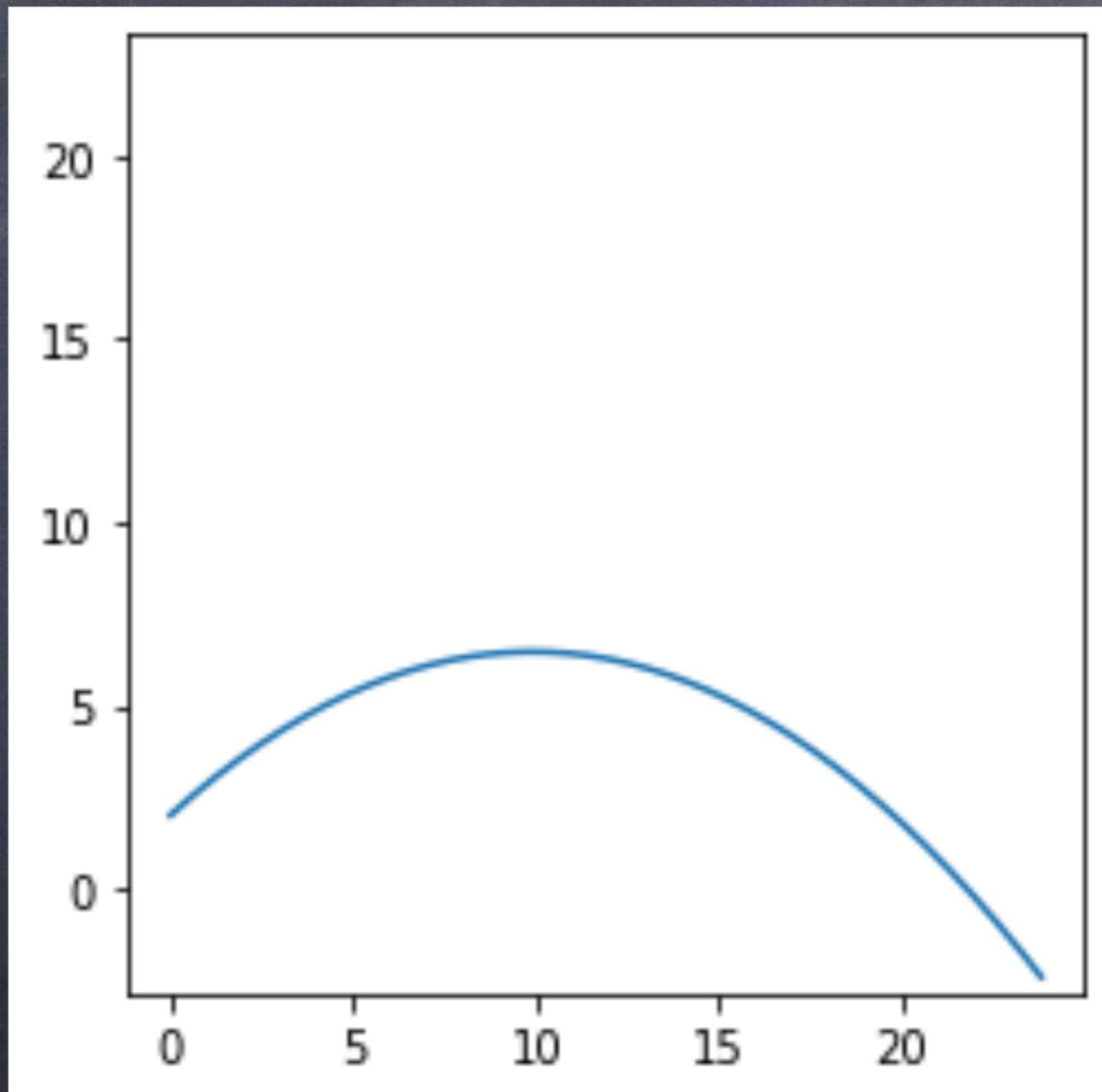
v0 = 14.
uhol = 42. # v stupňoch

theta = uhol * pi/180.
vx[0] = v0 * cos(theta)
vz[0] = v0 * sin(theta)

for n in range(0,N):
    v[n]= sqrt( vx[n]*vx[n] + vz[n]*vz[n] )
    ax[n]= -0.003 * v[n] * vx[n] / m
    az[n]= (m*g - 0.003 * v[n] * vz[n])/m
    x[n+1]=x[n]+vx[n]*dt
    z[n+1]=z[n]+vz[n]*dt
    vx[n+1]=vx[n]+ax[n]*dt
    vz[n+1]=vz[n]+az[n]*dt

plot(x,z)
axis('square')
```

vrh guľou - výsledky



Numerické výstupy:

vzduch

optimálny uhol 42°

dolet 21.70 m

vákuum

optimálny uhol 43°

dolet 21.84 m

dôležité upozornenie:

Optimálny uhol vo vákuu je
notoricky známych 45° len
pre vrh z výšky 0 m

a do tretice futbal

• skúsme takúto otázku:

Ako sa zmení dĺžka výkopu futbalového brankára, ak fúka slabý vietor s rýchlosťou 3 m/s

a) v smere výkopu

b) proti smeru výkopu

c) ide o bočný vietor

• základná zmena (zovšeobecnenie):

v odporovej sile musí vystupovať relatívna rýchlosť telesa vzhľadom k vzduchu

$$\vec{u} = \vec{v} - \vec{w}$$

hmotnosť lopty 0,43 kg

polomer lopty 0,11 m

koeficient alfa 0,006

bežná dĺžka výkopu 50 m

označenie:

rýchlosť lopty \vec{v}

rýchlosť vetra \vec{w}

vzájomná rýchlosť \vec{u}

• počítanie

$$u_{x_n} = v_{x_n} - w_x$$

$$u_{y_n} = v_{y_n} - w_y$$

$$u_{z_n} = v_{z_n} - w_z$$

$$u_n = \text{sqrt}(u_{x_n}^2 + u_{y_n}^2 + u_{z_n}^2)$$

$$a_{x_n} = (-0.006 u_n u_{x_n}) / m$$

$$a_{y_n} = (-0.006 u_n u_{y_n}) / m$$

$$a_{z_n} = (mg - 0.006 u_n u_{z_n}) / m$$

$$x_{n+1} = x_n + v_{x_n} * dt$$

$$y_{n+1} = y_n + v_{y_n} * dt$$

$$z_{n+1} = z_n + v_{z_n} * dt$$

$$v_{x_{n+1}} = v_{x_n} + a_{x_n} * dt$$

$$v_{y_{n+1}} = v_{y_n} + a_{y_n} * dt$$

$$v_{z_{n+1}} = v_{z_n} + a_{z_n} * dt$$



```
m=0.43  
g=-9.81
```

```
wx = 0.  
wy = 0.  
wz = 0.
```

```
x[0]=5.  
y[0]=0.  
z[0]=0.
```

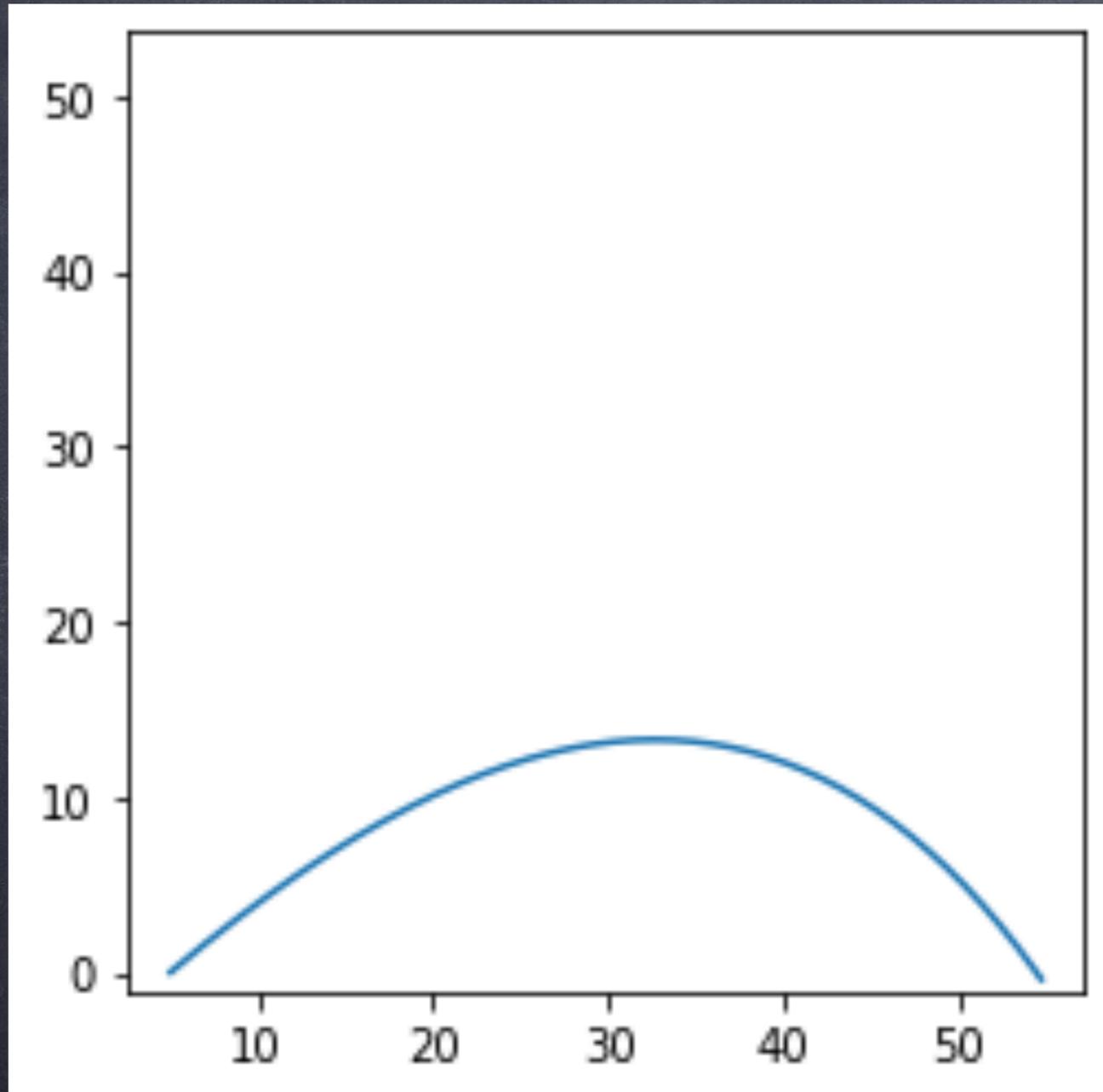
```
v0 = 30.  
uhol = 40. # v stupňoch
```

```
theta = uhol * pi/180.  
vx[0] = v0 * cos(theta)  
vy[0] = 0.  
vz[0] = v0 * sin(theta)
```

```
for n in range(0,N):  
    ux[n] = vx[n] - wx  
    uy[n] = vy[n] - wy  
    uz[n] = vz[n] - wz  
    u[n] = sqrt(ux[n]*ux[n] + uy[n]*uy[n] + uz[n]*uz[n])  
    ax[n] = -0.006 * u[n] * ux[n] / m  
    ay[n] = -0.006 * u[n] * uy[n] / m  
    az[n] = (m*g - 0.006 * u[n] * uz[n]) / m  
    x[n+1] = x[n] + vx[n]*dt  
    y[n+1] = y[n] + vy[n]*dt  
    z[n+1] = z[n] + vz[n]*dt  
    vx[n+1] = vx[n] + ax[n]*dt  
    vy[n+1] = vy[n] + ay[n]*dt  
    vz[n+1] = vz[n] + az[n]*dt
```

```
plot(x,z)  
axis('square')
```

odkop od bránky - výsledky



Numerické výstupy:

bezvetrie

optimálny uhol

40°

dolet

54.39 m

vietor v smere

dolet (pri uhle 40°)

59.70 m

vietor v protismere

dolet (pri uhle 40°)

48.98 m

bočný vietor

dolet (pri uhle 40°)

54.26 m

posun v kolmom smere

3.35 m

zhrnutie

- Druhý Newtonov zákon (zákon sily) nám umožňuje zo známych počiatočných podmienok (poloha a rýchlosť) a zo známych pôsobiacich síl vypočítať celý pohyb (budúci aj minulý).
- Ak poznáme celý pohyb, vieme odpovedať na všetky otázky týkajúce sa tohto pohybu.
- Ilustrovali sme si to na pohybe gule, na ktorú pôsobila gravitačná sila a sila odporu prostredia (ktorá je vo všeobecnosti zložitejšia než sme uvažovali my, ale náš prístup bol rozumne realistickým priblížením)

Čo nás čaká ďalej?

- Naučiť sa, aké všelijaké sily môžu pôsobiť na telesá (to budeme robiť na najbližších prednáškach)
- Naučiť sa, ako sa dá predpovedať pohyb úplne presne, nielen približne metódou krok za krokom (to potom budeme robiť do konca semestra)

úloha na záver

- Nájdite pohyb lopty pri výkope od bránky pri futbale vodníkov na dne jazera. Ako sa zmení dĺžka výkopu v porovnaní s našim futbalom?
- Ak vám vyšla nejaká dĺžka výkopu, t.j. ak vám lopta dopadla na dno jazera, máte tam zjavne chybu (lopta v skutočnosti skončí na hladine, nie na dne). Zrejme ste zabudli na vztlakovú silu z Archimedovho zákona. Takže nech sa páči, ešte raz, aj s touto silou.