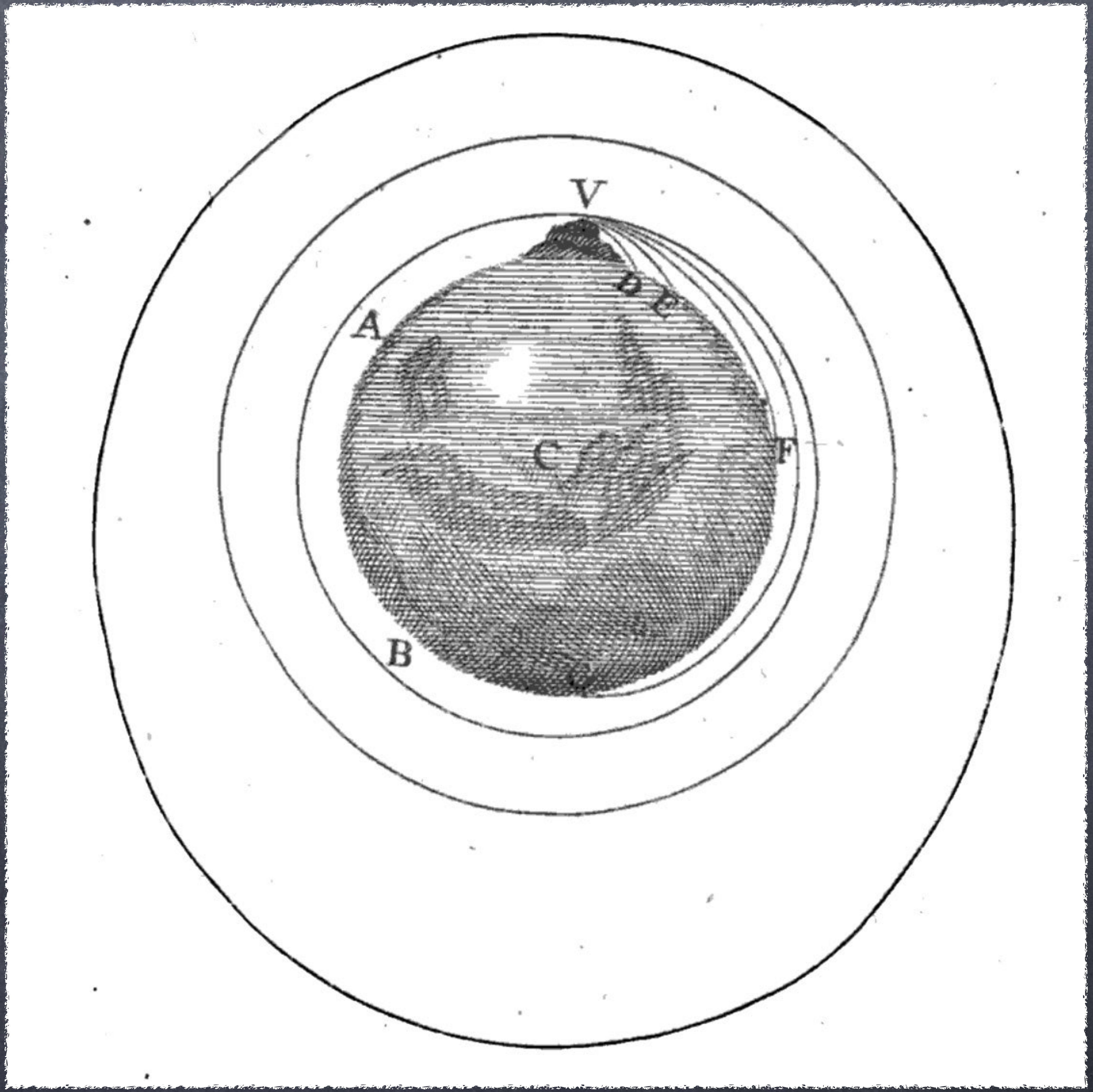
Hra na Newtona

ako z Newtona dostať Keplera

mechanika 7

Newton a Galilei

- Newtonov nápad: nie je obiehanie satelitu okolo Zeme to isté, ako šikmý (resp. vodorovný) vrh ?
- Galileo: gravitačná sila nezávislá od výšky $\overrightarrow{F} = -k.M.m\frac{\vec{r}}{r}$ (pozri minulú prednášku)
- dostaneme z tej sily ten obrázok?
- skúsime to zistiť našou metódou krok za krokom (pričom budeme predstierať, že správny gravitačný zákon nepoznáme, ale objavíme)



číselné hodnoty

- Polomer Zeme $R_Z = 6\ 371\ 000$ m
- Súčin k.M $F = k\,M\,m$

  $a = F/m = k\,M$

a zároveň vieme, že $a = g = 9.81\ m/s^2$ (experimentálny fakt)

čiže $k\,M = g$

$$\vec{a} = -\,g\,\frac{\vec{r}}{r}$$

- počiatočné podmienky:

  $x_0 = 0$ $\quad$ $y_0 = 1.1\ R_z$

  $vx_0 = 5000$ $\quad$ $vy_0 = 0$

- počítanie

  $r_n = \mathrm{sqrt}\,(\,x_n^2 + y_n^2\,)$

  $ax_n = -\,g\ x_n\,/\,r_n$

  $ay_n = -\,g\ y_n\,/\,r_n$

  $x_{n+1} = x_n + vx_n * dt$

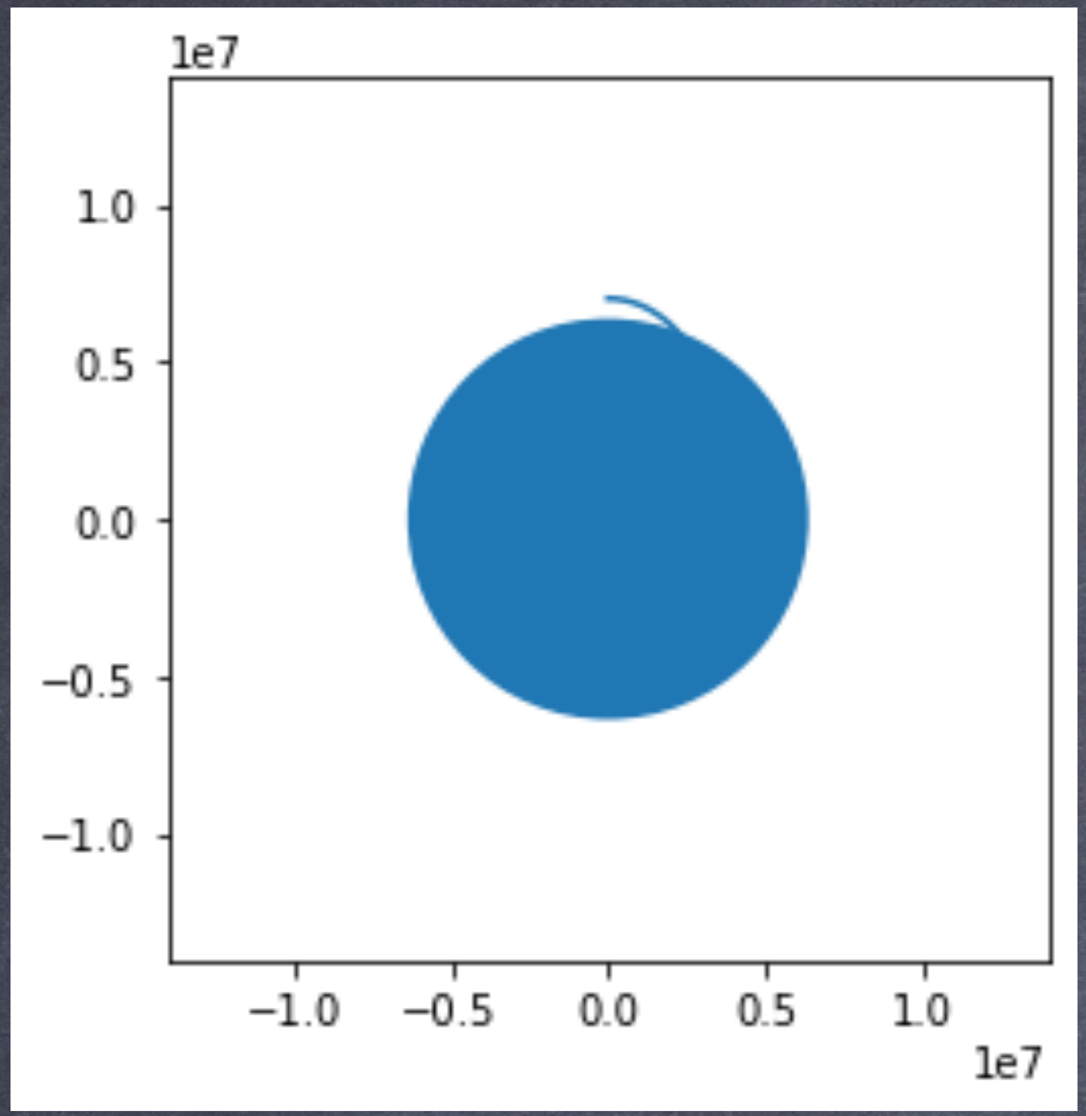
  $y_{n+1} = y_n + vy_n * dt$

  $vx_{n+1} = vx_n + ax_n * dt$

  $vy_{n+1} = vy_n + ay_n * dt$

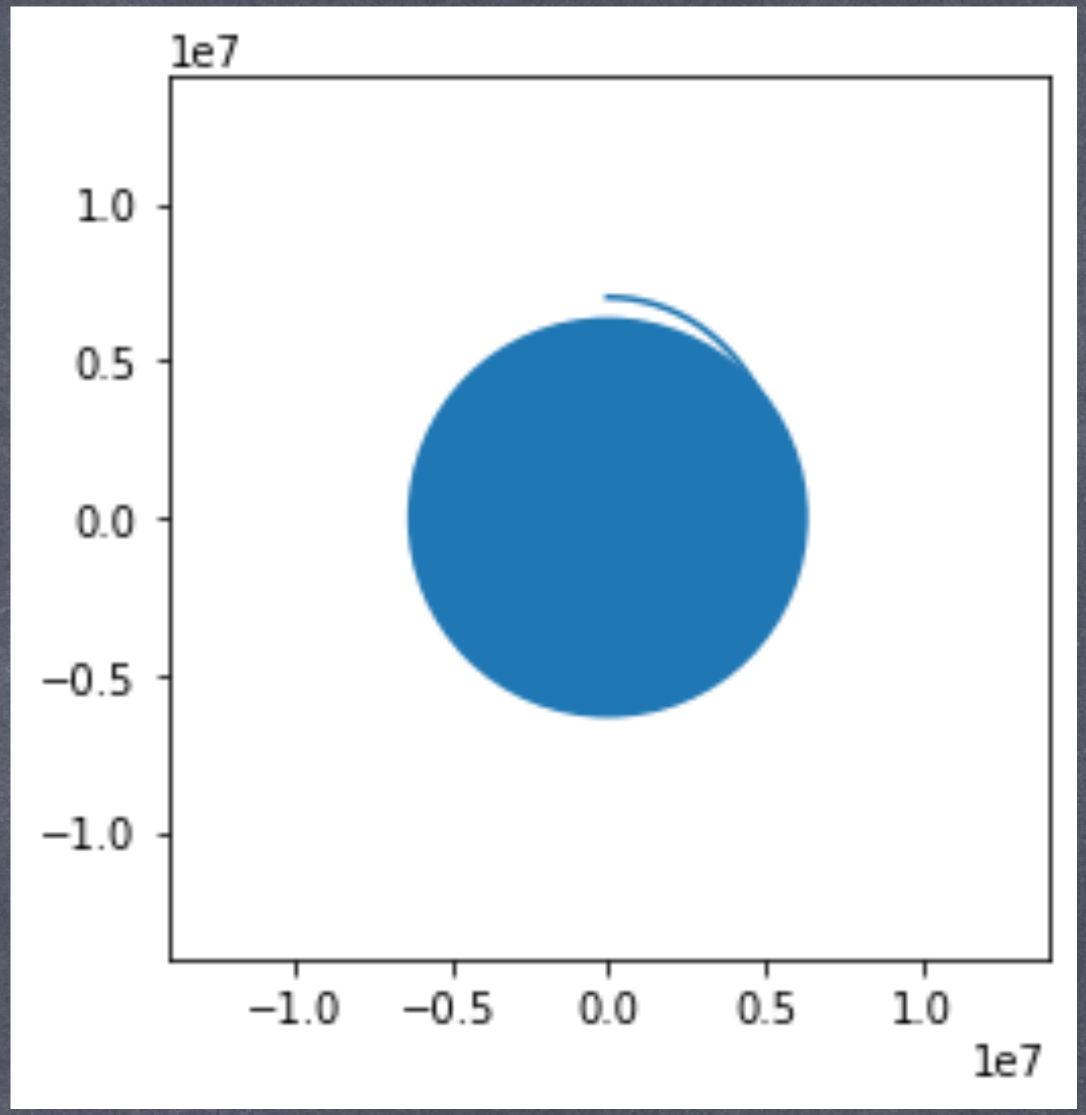
```
from pylab import *

dt=1
N=1000

g=9.81
Rz=6371000.

x=empty(N+1)
y=empty(N+1)
vx=empty(N+1)
vy=empty(N+1)
r=empty(N+1)
ax=empty(N+1)
ay=empty(N+1)

x[0]=0.
y[0]=1.1*Rz
vx[0] = 5000.
vy[0] = 0.

for n in range(0,N):
    r[n]=sqrt(x[n]*x[n] + y[n]*y[n])
    ax[n]=-g*x[n]/r[n]
    ay[n]=-g*y[n]/r[n]

    x[n+1]=x[n]+vx[n]*dt
    y[n+1]=y[n]+vy[n]*dt
    vx[n+1]=vx[n]+ax[n]*dt
    vy[n+1]=vy[n]+ay[n]*dt

plot(x,y)
```

výsledky



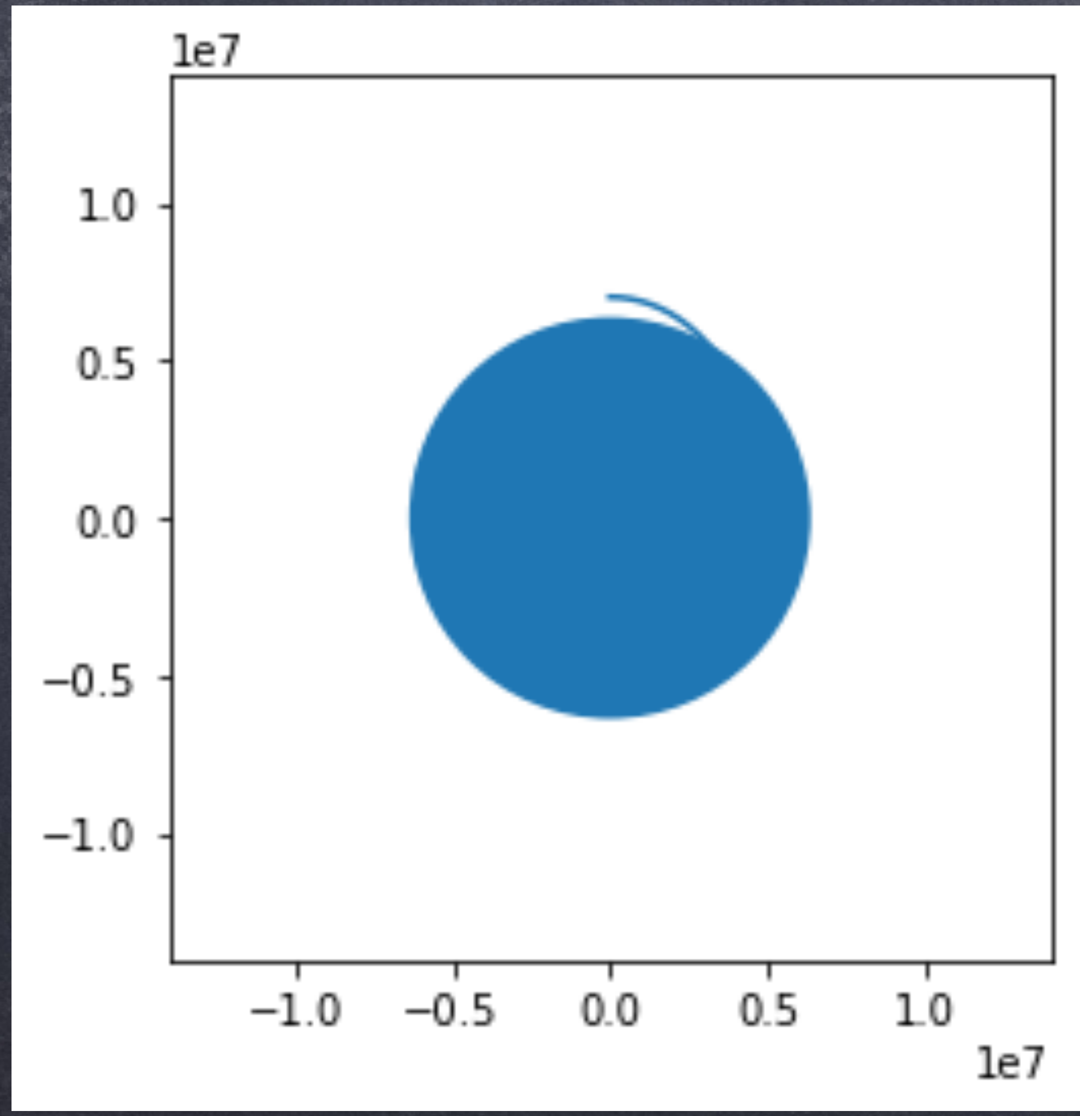
v0 = 5000 m/s

T = 459 s



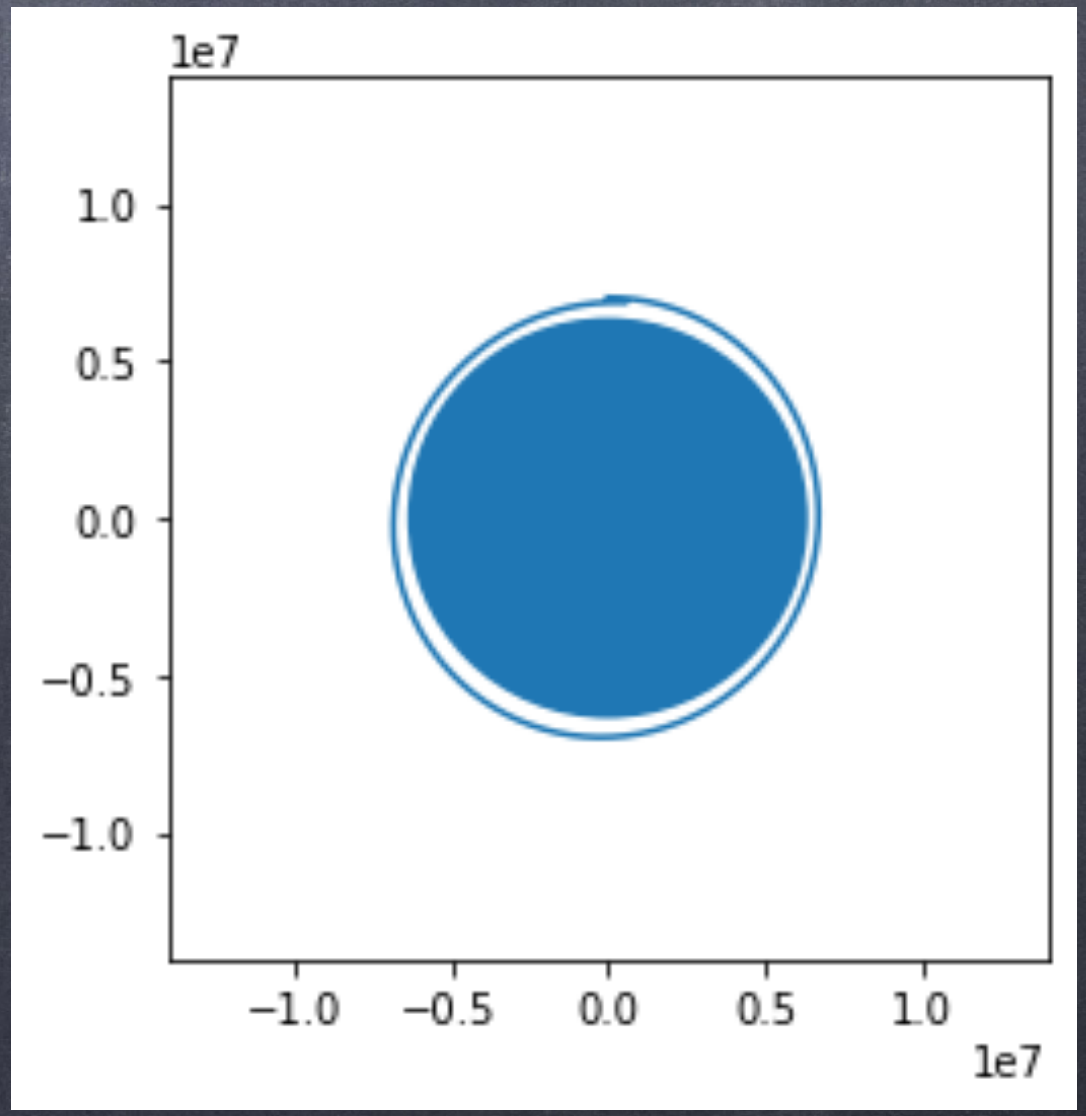
v0 = 7000 m/s

T = 724 s



v0 = 6000 m/s

T = 538 s

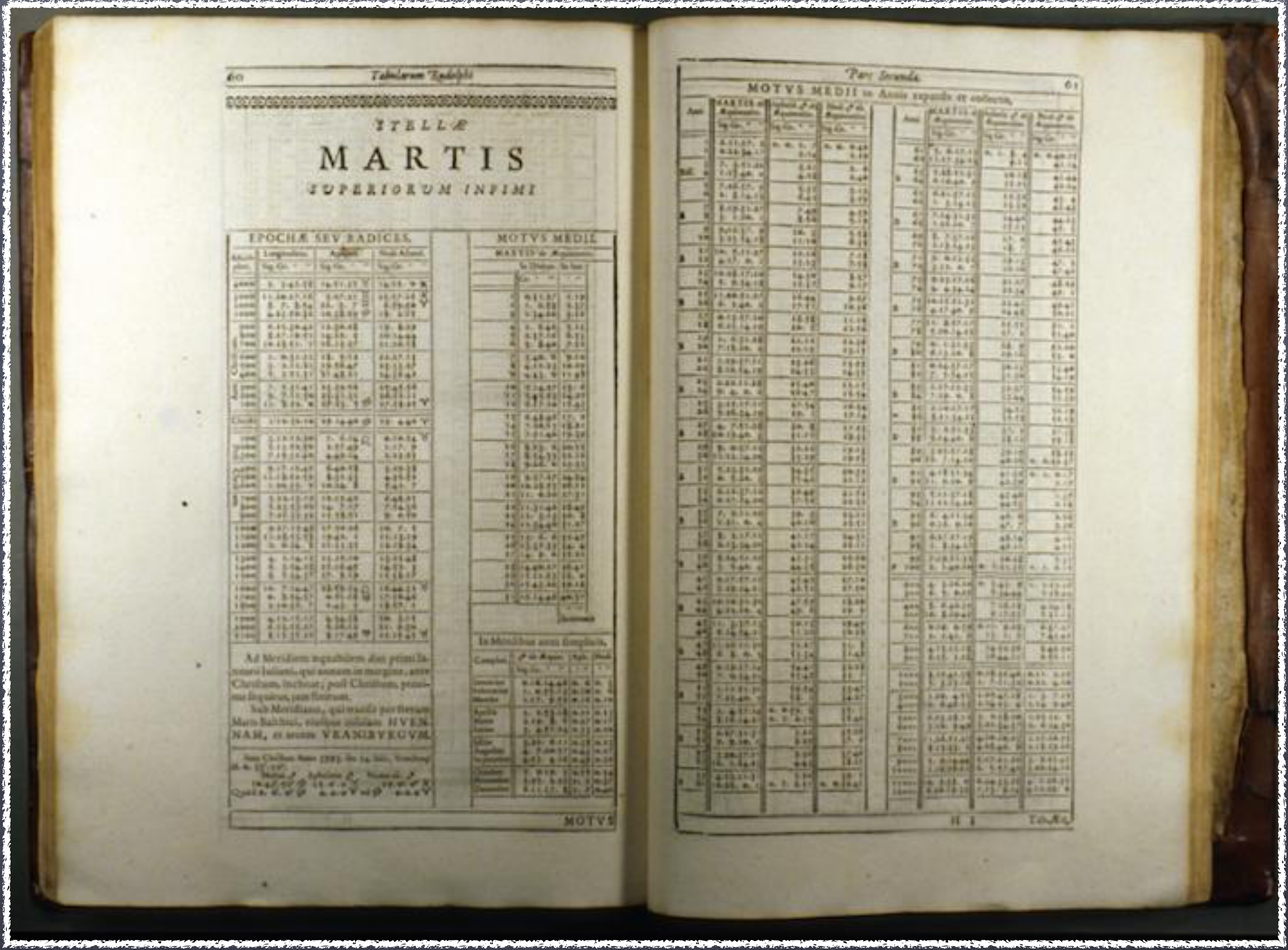


v0 = 8000 m/s

T = 5232 s

Obrázok je OK, ale film nie

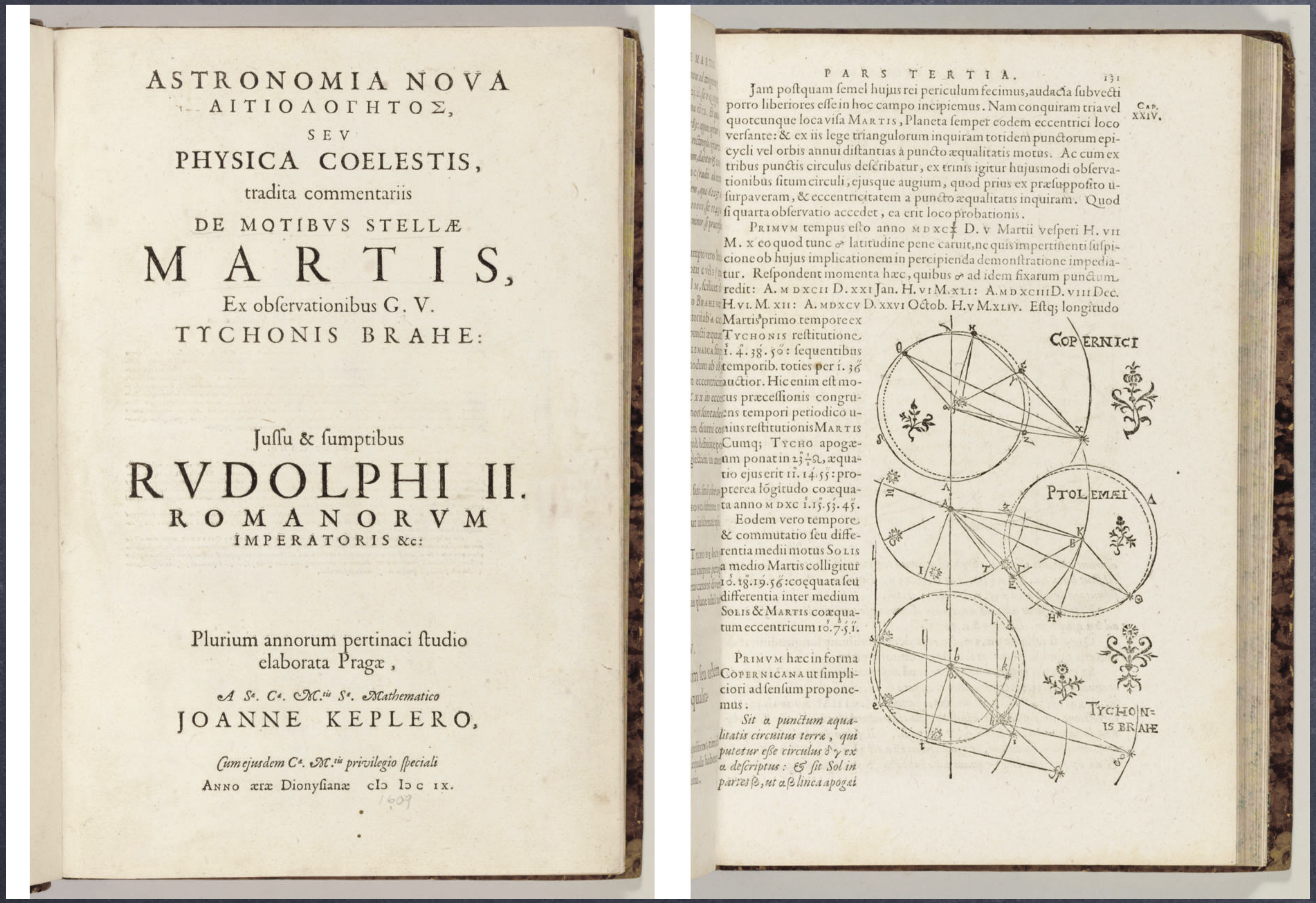
- Veci sa totiž značne pokazia, ak vezmeme do úvahy aj čas (čiže ak si všímame nielen trajektóriu, ale celý pohyb)
- Film v 17. storočí nemali, ale mali astronomické tabuľky, ktoré hovorili, kde sa kedy nachádzali planéty. Vtedajší blockbuster: Rudolfínske tabuľky, ktoré na základe presných meraní Tycha Brahe zostavil Johannes Kepler.



Johannes Kepler (1571-1630) bol cisárskym matematikom na dvore Rudolfa II. v Prahe. Jeho najväčším objavom boli kvantivatívne detaily týkajúce sa pohybu planét, známe ako tri Keplerove zákony. Práve na základe týchto zákonov objavil Newton všeobecný zákon gravitácie.

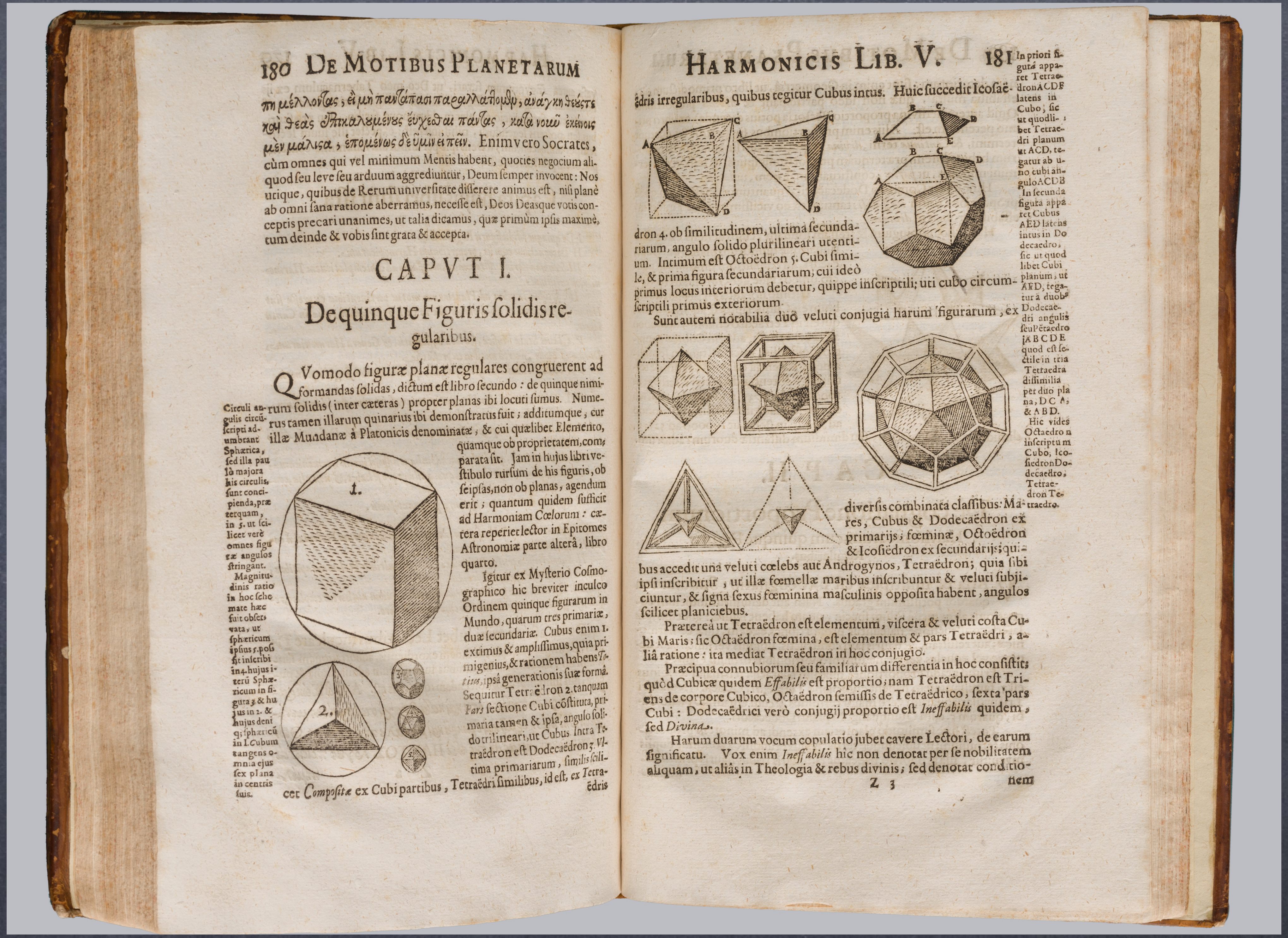
súčasník
Galileo Galilei

Dve dôležité knihy



Nová astronómia, 1609

prvý a druhý zákon



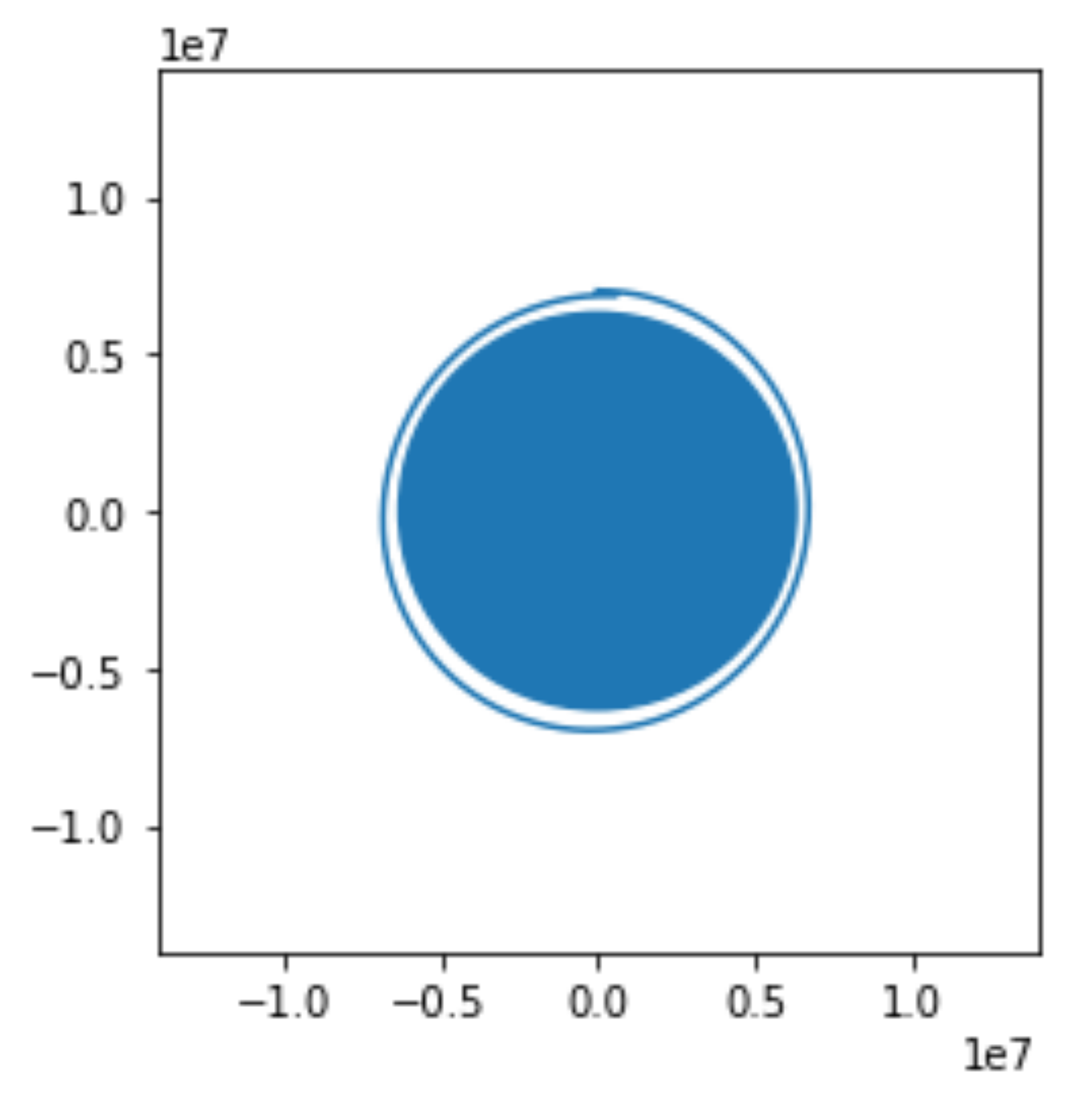
Harmónia sveta, 1619

tretí zákon

Keplerove zákony

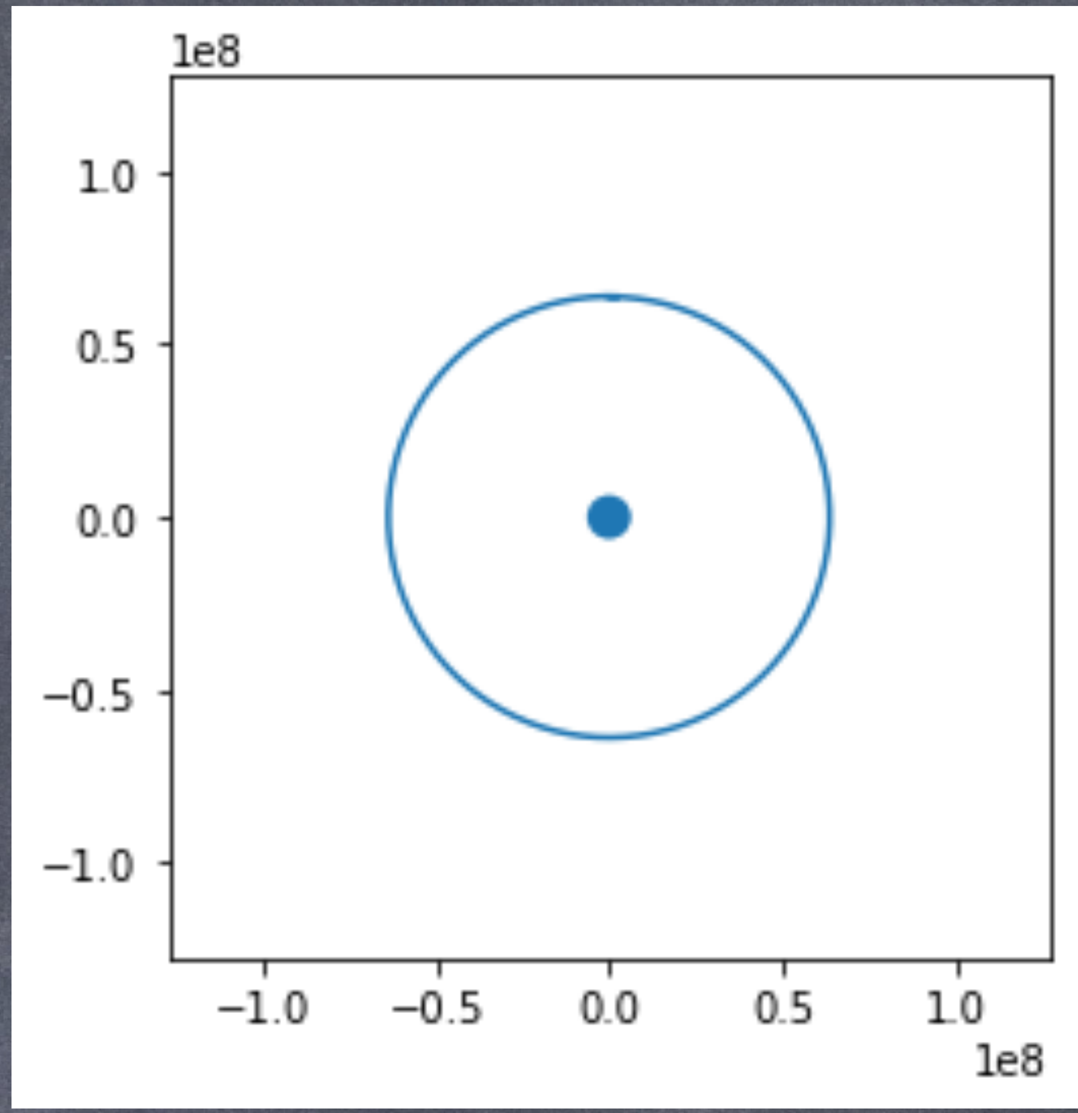
- Každá planéta obieha okolo Slnka po elipse (blízkej kružnici). Slnko sa nachádza v jednom z ohnísk elipsy.
- Spojnica planéty so Slnkom “vymetie” za rovnaké časy rovnaké plochy.
- Pomer druhých mocnín obežných dôb dvoch planét je rovný pomeru tretích mocnín ich vzdialeností od Slnka.

výsledky



y0 = 1.1 Rz
v0 = 8000 m/s
T = 5232 s

y0 = 10 Rz
v0 = 25000 m/s
T = 16018 s



$$\left(\frac{10}{1.1}\right)^3 \simeq 1000 \neq 10 \simeq \left(\frac{16018}{5232}\right)^2$$

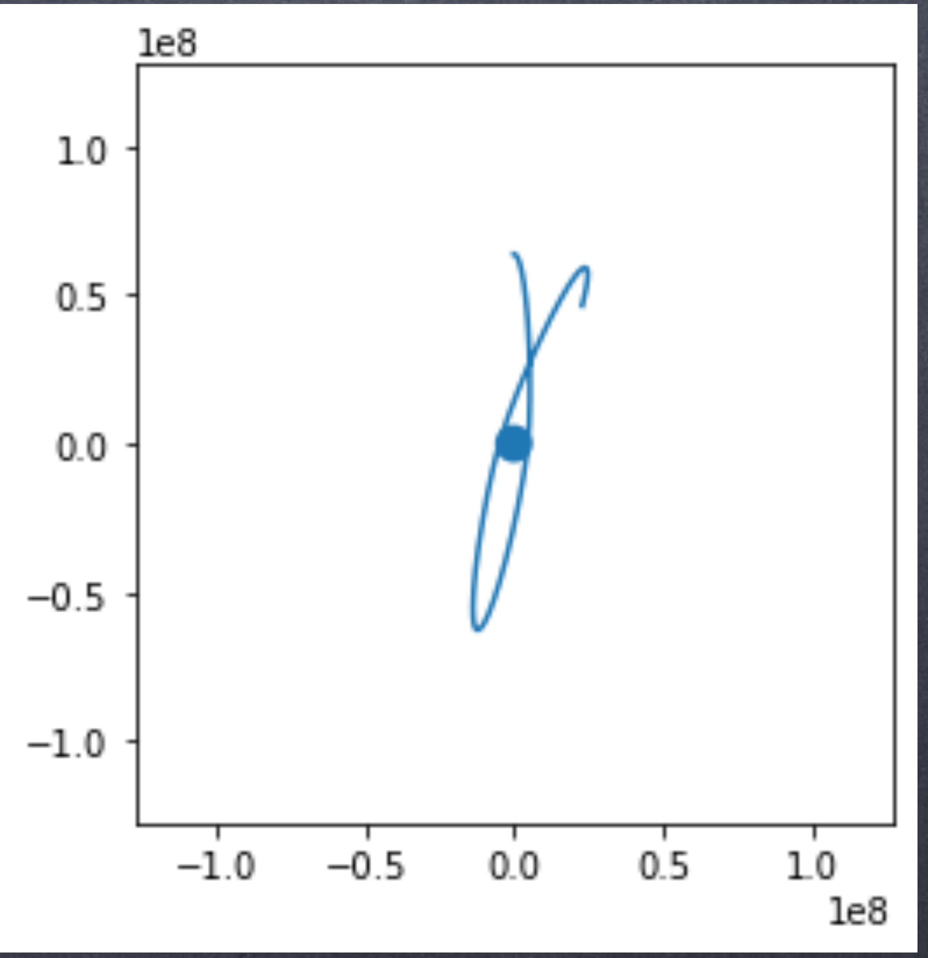
Naša sila vôbec nedáva tretí Keplerov zákon.
Takto zjednotenie pozemskej a nebeskej mechaniky v našom svete vyzerať nemôže.

V čom je problém?

- Vzdialenejšia planéta nám ide príliš rýchlo.
- Potrebovali by sme pre ňu desaťkrát dlhšiu obežnú dobu, čiže desaťkrát menšiu rýchlosť.

$$\left(\frac{160000}{5232}\right)^2 \cong 1000$$

- Lenže pri danom zrýchlení by bola pri menšej rýchlosti dráha oveľa viac zakrivovaná.



- Zdá sa, že vzdialenejšia planéta potrebuje menšie zrýchlenie. To znamená, že potrebujeme zrýchlenie (a teda silu) klesajúce s rastúcou vzdialenosťou.

Ako rýchlo klesá grav. sila?

- Keď nemáme nič lepšie, vždy sa dá skúsiť metóda pokus-omyl.
- Skúšajme nejaké jednoduché klesajúce fnkcie r a počítajme, či nám niektorá z nich dá tretí Keplerov zákon
- Asi najjednoduchšia možnosť je nepriama úmera F~1/r, čiže

$$\overrightarrow{F} = -K\,\frac{M\,.\,m}{r}\,\frac{\vec{r}}{r}$$

- Číselnú hodnotu konštanty K dostaneme zo známeho gravitačného zrýchlenia na povrchu Zeme $g = K.M/R_Z$
- Vidíme, že nedostaneme K, ale súčin K.M, čo nám stačí

$$K.M = g.R_Z$$

?

Neodporuje to Galileovi?

- Galileo nepozoroval závislosť gravitačného zrýchlenia od výšky. My teraz predpokladáme, že sa s výškou mení. Nie je to rozpor?
- Nie je. Galileo robil pokusy pre výšky na úrovni max. desiatok metrov. Na takých vzdialenostiach sa nami predpokladaná závislosť zrýchlenia od výšky prakticky vôbec neprejaví (t. j. neprejaví sa merateľným spôsobom).

- počiatočné podmienky:

  $x_0 = 0$ $\quad$ $y_0 = 10\ R_z$

  $vx_0 = 2500$ $\quad$ $vy_0 = 0$

- počítanie

  $r_n = \text{sqrt}\ (\ x_n^2 + y_n^2\ )$

  $ax_n = -\ g\ Rz\ x_n\ /\ (r_n * r_n)$

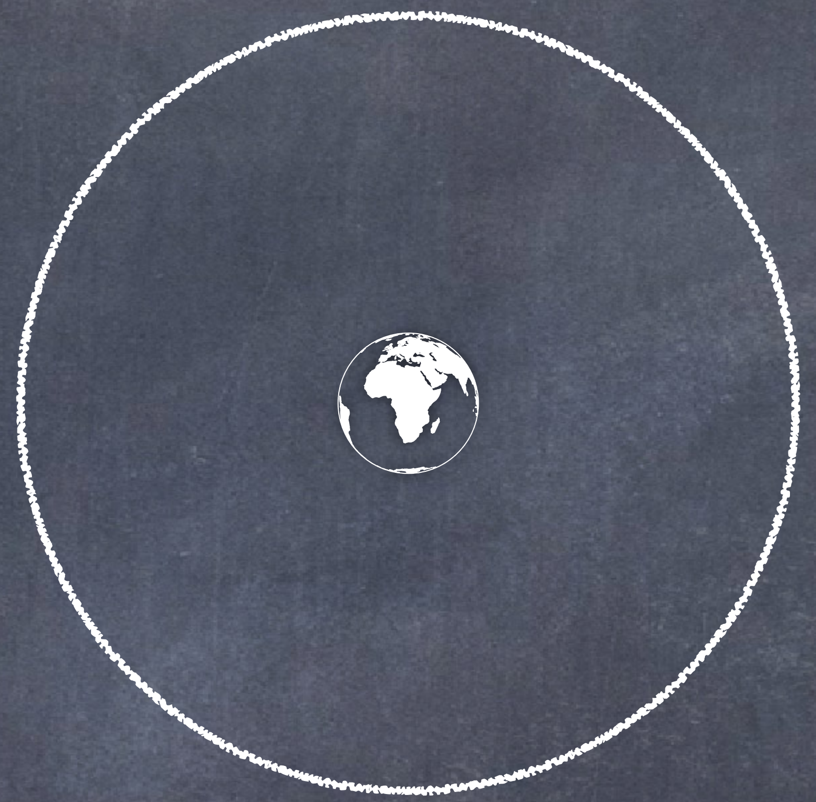
  $ay_n = -\ g\ Rz\ y_n\ /\ (r_n * r_n)$

  $x_{n+1} = x_n + vx_n * dt$

  $y_{n+1} = y_n + vy_n * dt$

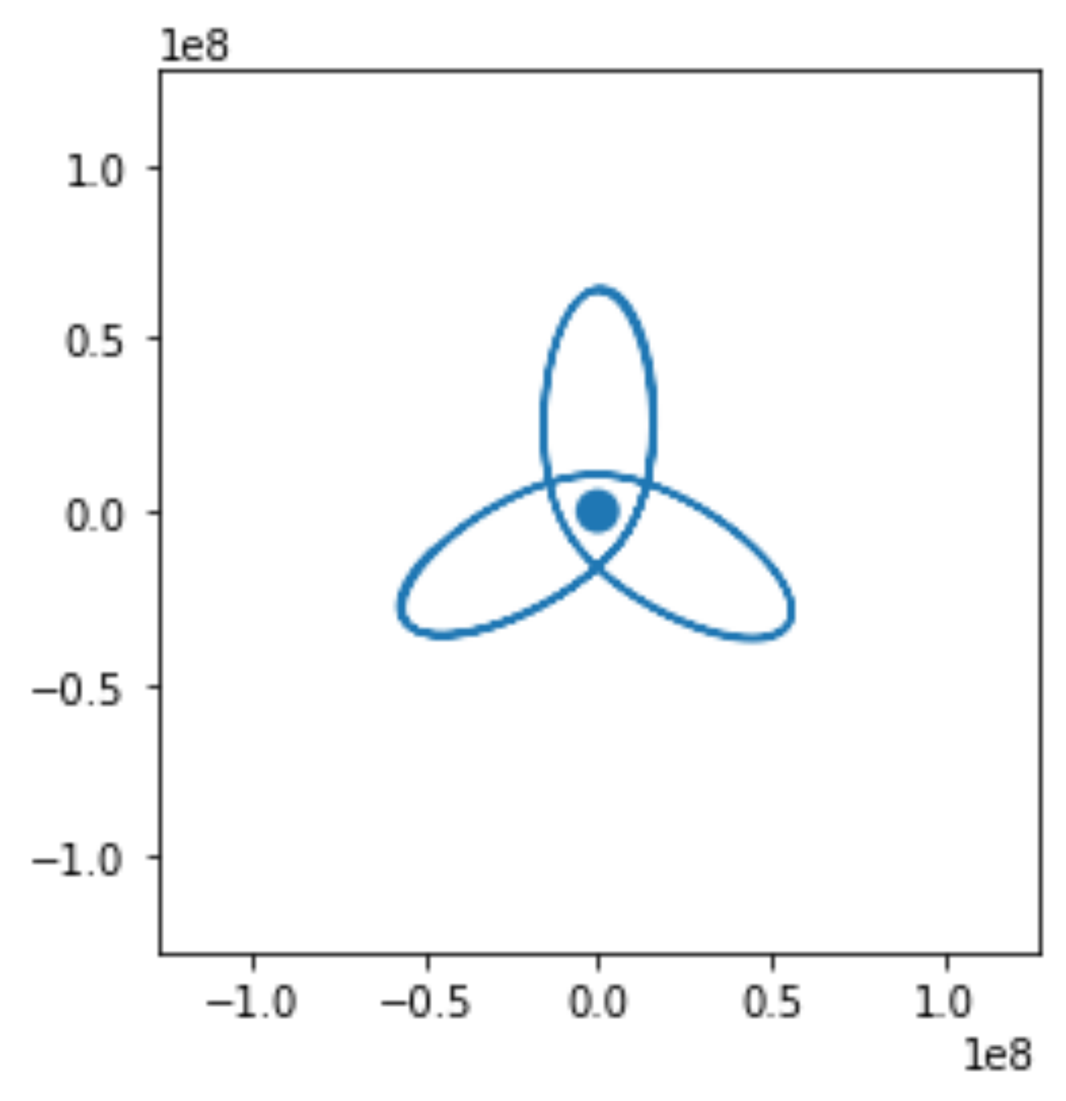
  $vx_{n+1} = vx_n + ax_n * dt$

  $vy_{n+1} = vy_n + ay_n * dt$



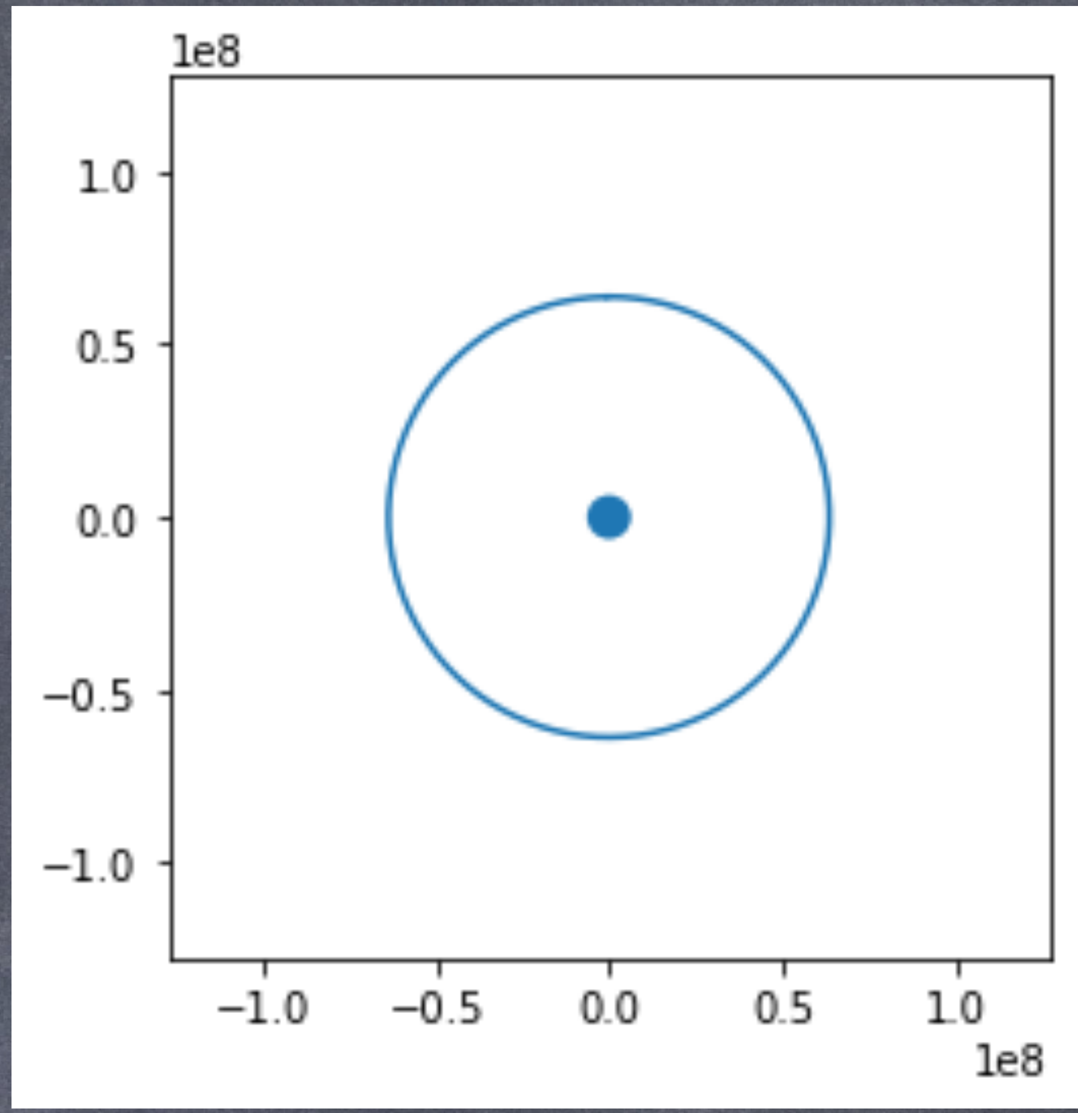
```python
from pylab import *

dt=1
N=160000

g=9.81
Rz=6371000.

x=empty(N+1)
y=empty(N+1)
vx=empty(N+1)
vy=empty(N+1)
r=empty(N+1)
ax=empty(N+1)
ay=empty(N+1)

x[0]=0.
y[0]=10. * Rz
vx[0] = 2500.
vy[0] = 0.

for n in range(0,N):
    r[n]=sqrt(x[n]*x[n] + y[n]*y[n])
    ax[n]=-g*Rz * x[n]/(r[n] * r[n])
    ay[n]=-g*Rz * y[n]/(r[n] * r[n])

    x[n+1]=x[n]+vx[n]*dt
    y[n+1]=y[n]+vy[n]*dt
    vx[n+1]=vx[n]+ax[n]*dt
    vy[n+1]=vy[n]+ay[n]*dt

plot(x,y)
```

výsledky



y0 = 10 Rz
v0 = 2500 m/s
Nesplĺňa ani len
1. Keplerov zákon

y0 = 10 Rz
v0 = 7900 m/s
1. zákon OK
T = 50621 s



$$\left(\frac{10}{1.1}\right)^3 \simeq 1000 \neq 100 \simeq \left(\frac{50621}{5232}\right)^2$$

Gravitačná sila nepriamo úmerná vzdialenosti
tiež nedáva tretí Keplerov zákon.
Tento pokus bol omylom.

Ako rýchlo klesá grav. sila? II

- Je čas na druhý pokus.
- Jednou z celkom prirodzených možností je zvýšiť mocninu r v menovateli, čiže uvažovať

  $F \sim 1/r^2$

$$\overrightarrow{F} = -\kappa \frac{M\,.\,m}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}$$

- Číselnú hodnotu súčinu $\kappa.M$ dostaneme opäť zo známeho gravitačného zrýchlenia na povrchu Zeme $g = \kappa.M/R_Z{}^2$
- $\kappa.M = g\,R_Z{}^2$

?

- počiatočné podmienky:

  $x_0 = 0 \qquad y_0 = 10\, R_z$

  $vx_0 = 2500 \qquad vy_0 = 0$

- počítanie

  $r_n = \mathrm{sqrt}\,(\, x_n^2 + y_n^2\,)$

  $ax_n = -\, g\, R_z^2\, x_n \,/\, (r_n * r_n * r_n)$

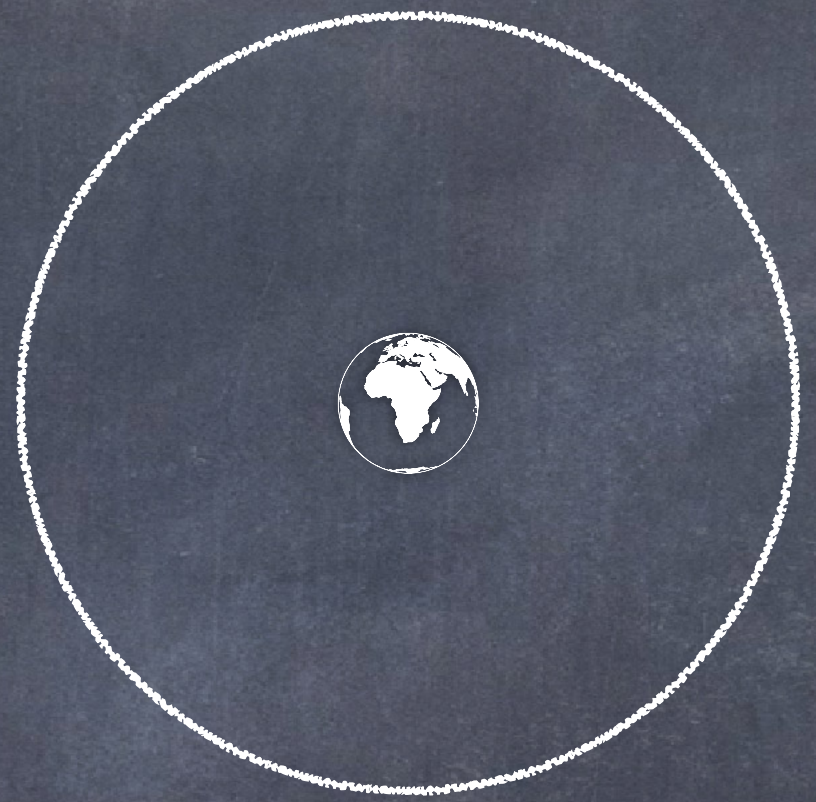
  $ay_n = -\, g\, R_z^2\, y_n \,/\, (r_n * r_n * r_n)$

  $x_{n+1} = x_n + vx_n * dt$

  $y_{n+1} = y_n + vy_n * dt$

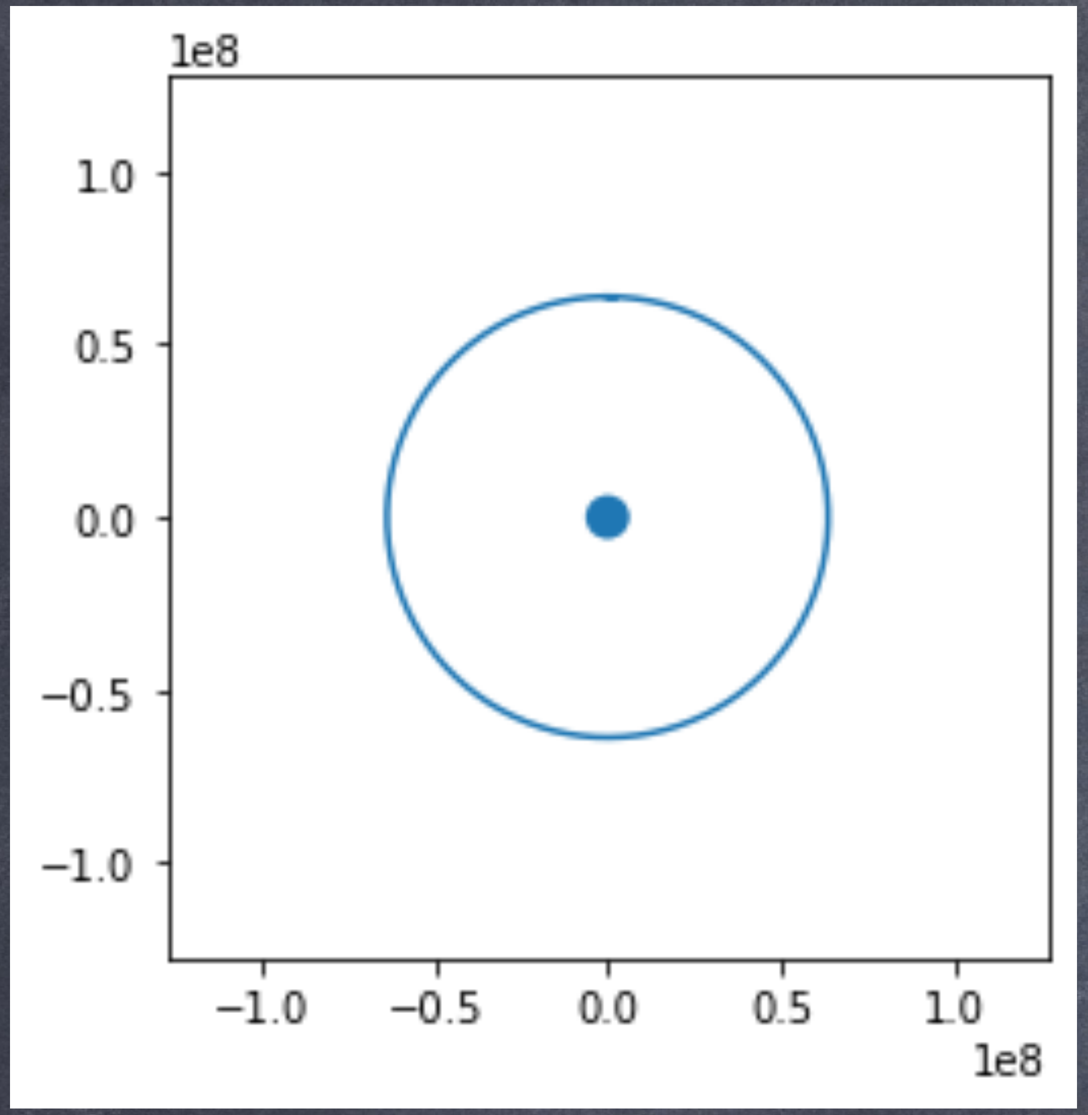
  $vx_{n+1} = vx_n + ax_n * dt$

  $vy_{n+1} = vy_n + ay_n * dt$



```python
from pylab import *

dt=1
N=161000

g=9.81
Rz=6371000.

x=empty(N+1)
y=empty(N+1)
vx=empty(N+1)
vy=empty(N+1)
r=empty(N+1)
ax=empty(N+1)
ay=empty(N+1)

x[0]=0.
y[0]=10. * Rz
vx[0] = 2500.
vy[0] = 0.

for n in range(0,N):
    r[n]=sqrt(x[n]*x[n] + y[n]*y[n])
    ax[n]=-g*Rz*Rz * x[n]/(r[n]*r[n]*r[n])
    ay[n]=-g*Rz*Rz * y[n]/(r[n]*r[n]*r[n])

    x[n+1]=x[n]+vx[n]*dt
    y[n+1]=y[n]+vy[n]*dt
    vx[n+1]=vx[n]+ax[n]*dt
    vy[n+1]=vy[n]+ay[n]*dt

plot(x,y)
```

výsledky

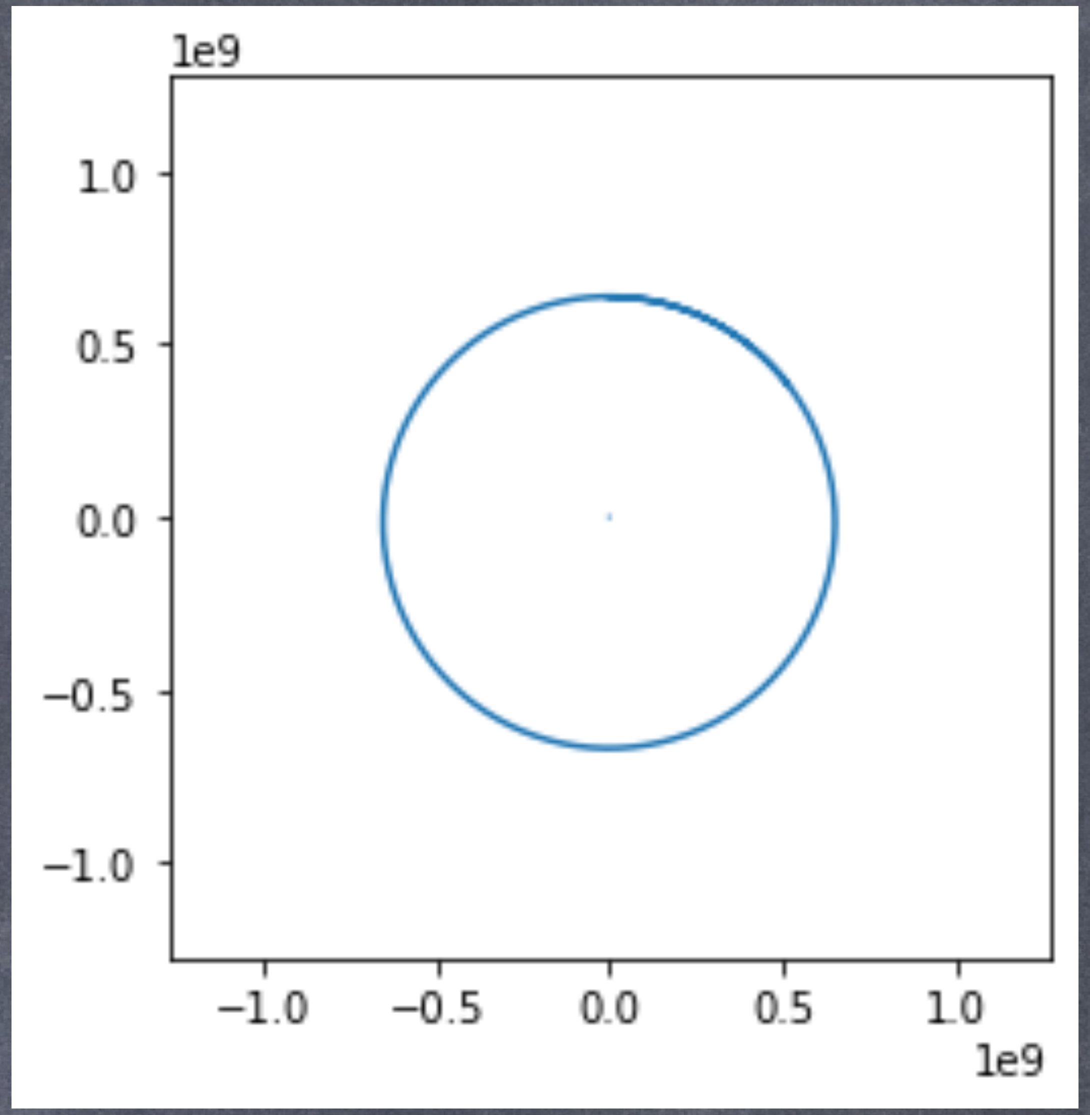


y0 = 10 Rz
v0 = 2500 m/s

T = 160182 s

y0 = 100 Rz
v0 = 7900 m/s

T = 5254980 s



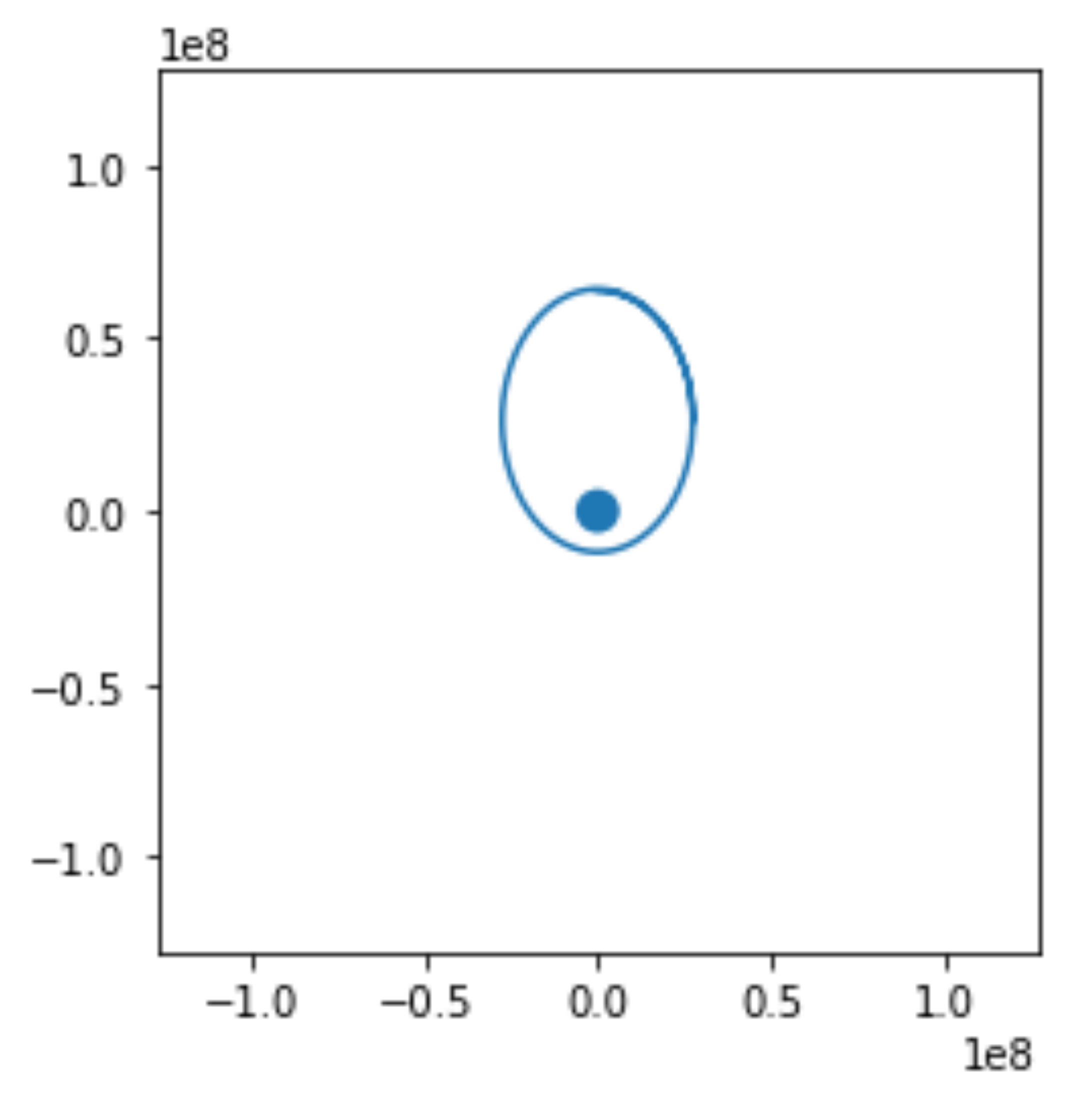
Bingo!

$$\left(\frac{10}{1.1}\right)^3 \simeq 1000 \quad = \quad 1000 \simeq \left(\frac{160182}{5232}\right)^2$$

$$\left(\frac{100}{1.1}\right)^3 \simeq 10^6 \quad = \quad 10^6 \simeq \left(\frac{5254980}{5232}\right)^2$$

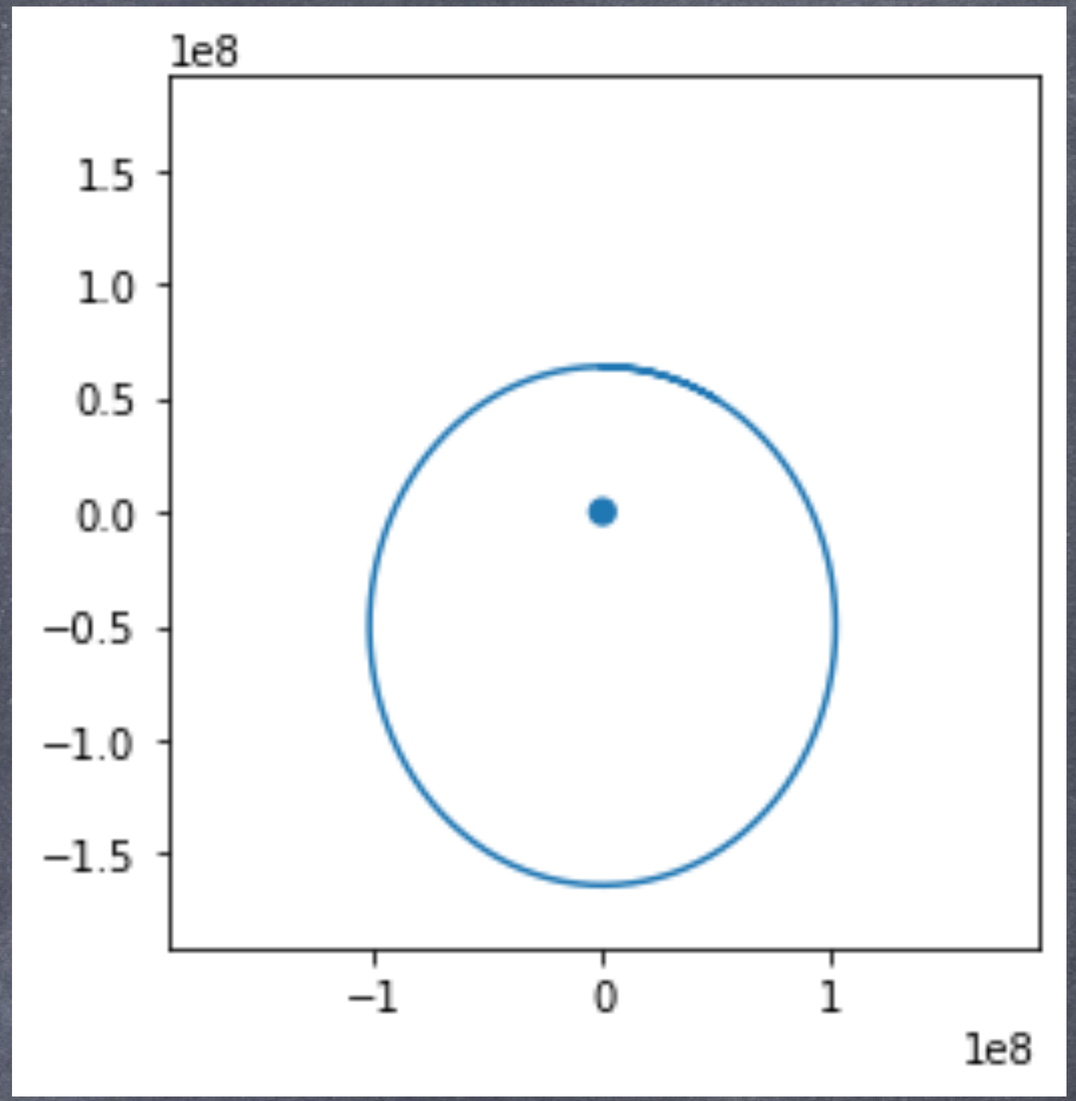
Bingo!

ďalšie výsledky



y0 = 10 Rz
v0 = 1400 m/s
elipsa

y0 = 10 Rz
v0 = 3000 m/s
elipsa



Sedí všetko, čo vyskúšame.
Ľubovoľné počiatočné podmienky vedú na pohyb,
ktorý spĺňa všetky tri Keplerove zákony.
(S tým, že elipsy nemusia byť vždy blízke kružniciam
a môžu to niekedy dokonca byť aj iné kužeľosečky.)

zhrnutie

zákon sily a gravitačný zákon

$$\overrightarrow{F} = m\,\overrightarrow{a} \qquad \overrightarrow{F} = -\kappa\,\frac{M\,.\,m}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}$$

naozaj predstavujú zjednotenie pozemskej a nebeskej mechaniky

V nebeskej mechanike je gravitačná sila dominantná.
V pozemskej mechanike hrajú významnú úlohu aj sily, ktoré sú rôznymi prejavmi elektromagnetických síl.
O nich bude reč nabudúce.

poznámka na záver

- Zo vzťahu pre dostredivé zrýchlenie $a = v^2/r$ môžeme z 3. Keplerovho zákona odvodiť závislosť gravitačnej sily od r aj bez metódy "krok za krokom"
- Keplerov zákon napíšeme takto: $r^3/T^2 = const$ a uvedomíme si, že $v \sim r/T$
- Spolu teda dostávame $r\, v^2 = const$ (iná konštanta) čiže $v^2 = const/r$ a teda $a = v^2/r = const/r^2$