Najdôležitejšia fyzikálna veličina

rýchlosť ako derivácia

mechanika 10

„Asi nemá veľký zmysel prieť sa o to, ktorá fyzikálna veličina je najdôležitejšia. Jednak preto, lebo základné veličiny sú vlastne všetky rovnako dôležité, a jednak preto, lebo najdôležitejšia je celkom zjavne rýchlosť.“

–Jeden výdych koňa

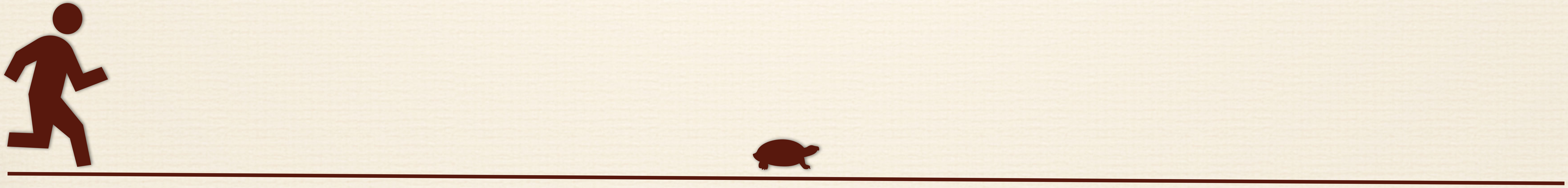
matematický opis pohybu

- Poloha $\vec{r}$ ako funkcia spojite sa meniaceho času t, čiže funkcia $\vec{r}(t)$
- Uvažovanie takejto funkcie vôbec nie je triviálnou myšlienkou.
V skutočnosti je to pozoruhodná idea, ktorá nás (okrem iného) zbavuje Zenonových paradoxov.
- Pre jednoduchosť budeme zo začiatku uvažovať len jeden rozmer, čiže pohyb bude opisovať obyčajná (nie vektorová) funkcia $x(t)$
(k trom rozmerom a vektorom sa vrátime na konci tejto časti)

Achileus a korytnačka

- Najznámejší Zenonov paradox:
  Rýchlonohý Achileus preteká s korytnačkou, ktorá je stokrát pomalšia. Na začiatku nech má korytnačka stometrový náskok. Keď Achileus prebehne 100 metrov, je korytnačka už na 101 metroch. Keď Achileus prebehne 101 metrov, korytnačka je na 101,01 m. Atď, čiže Achileus korytnačku nikdy nedobehne.

- Funkcia x(t) odpovedá:
  Ak sa čas mení spojito, potom každý nenulový časový interval v sebe obsahuje nekonečne veľa okamihov (takto budeme nazývať časový bod). To, že Zenón vtipne vymenoval nekonečne veľa okamihov z nejakého časového intervalu vôbec neznamená, že ten interval má nekonečnú dĺžku. Preto je použitie slova “nikdy” zjavne nepatričné.



dichotómia a šíp

- Iný Zenónov paradox:
  Atalanta, najrýchlejšia z ľudí, nemôže vlastne prebehnúť nijakú vzdialenosť, lebo na to, aby ju prebehla, musí najprv prebehnúť polovicu, ale na to musí najprv prebehnúť polovicu polovice, ale na to musí najprv prebehnúť polovicu z polovice polovice, a tak ďalej. Čiže pohyb nemôže ani len začať.

- Ešte jeden:
  Letiaci šíp je v ľubovoľnom okamihu na nejakom mieste. Ale byť na danom mieste znamená stáť na tom mieste. Čiže letiaci šíp v každom okamihu stojí.

- Funkcia x(t) odpovedá:
  To je to isté, ako Achileus a korytnačka, akurát z druhej strany (teraz sa pozeráme na začiatok pohybu). Znovu je paradox v tom, že v konečnom intervale (priestoru aj času) vymenujeme nekonečne veľa bodov. Ale samotné pojmy spojitého priestoru a času predpokladajú, že konečné intervaly obsahujú nekonečne veľa bodov.

- Funkcia x(t) odpovedá:
  Toto je nová myšlienka. Predpokladá, že ak okamih netrvá nijaký čas, potom nie je možná rýchlosť v danom okamihu. Ale ako uvidíme v ďalšom, nie je to pravda.

priemerná rýchlosť

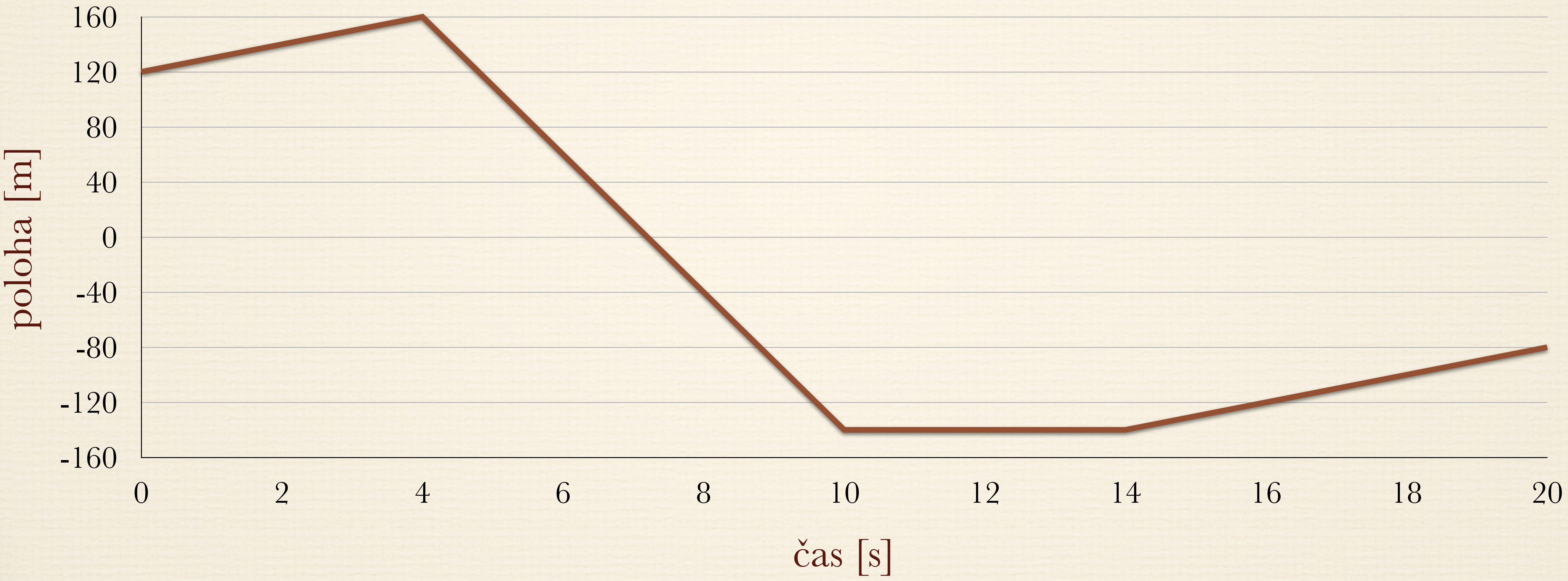
- bezproblémová veličina týkajúca sa nejakého časového intervalu Δt
- priemerná rýchlosť je dráha prejdená za nejaký čas, lomeno ten čas
- dráha je poloha na konci mínus poloha na začiatku

$$v = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

- x nemusí byť len poloha nejakého telesa, môže to byť ľubovoľná veličina (v je vtedy rýchlosť zmeny tej veličiny, napríklad hustoty, náboja, teploty)

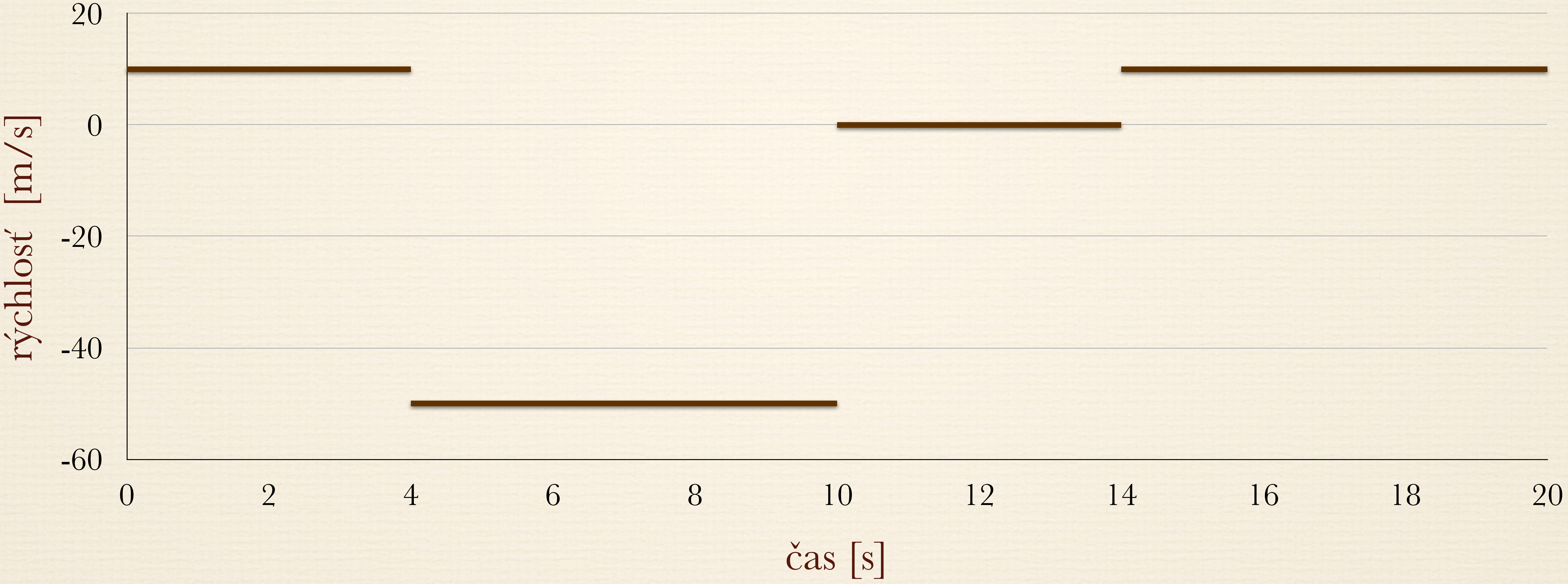
úloha (dôležitá)

Toto je graf závislosti polohy od času x(t). Nakreslite graf závislosti rýchlosti od času.



správny výsledok

Toto je príslušný graf závislosti rýchlosti od času v(t). Ak to máte zle, niečo dôležité nechápete.



otázka (zásadná)

- priemerná rýchlosť je definovaná pre nejaký časový interval
- v grafe závislosti rýchlosti od času nijaký časový interval nevystupuje
- aký interval sme tam mali na mysli?
- v našom grafe to vyzerá tak, ako keby bola rýchlosť definovaná pre každý čas t, nielen pre interval od t po $t + \Delta t$
- čo presne máme na mysli, keď hovoríme o rýchlosti v čase t ?

okamžitá rýchlosť

- netriviálna veličina, ktorá vyzbrojila fyziku novou, veľmi silnou matematikou
- je rozumne definovaná vtedy, ak sa priemerná rýchlosť s klesajúcou dĺžkou časového intervalu príliš nemení, presnejšie povedané ak pre Δt idúce k nule priemerná rýchlosť smeruje k nejakej konkrétnej hodnote
- tú konkrétnu hodnotu nazývame limitou a okamžitú rýchlosť definujeme ako

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

- ak poznáte pojem derivácia funkcie, mali by ste v tom spoznať deriváciu

okamžité zrýchlenie

- rýchlosť zmeny je analogickým spôsobom definovaná pre všetky s časom sa meniace veličiny (ak sa mení s časom teplota, je rýchlosť zmeny teploty daná deriváciou funkcie T(t) podľa času, a podobne)
- meniacou sa veličinou môže byť aj rýchlosť
- rýchlosť zmeny rýchlosti nazývame zrýchlením
- okamžité zrýchlenie teda definujeme ako

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

niekoľko poznámok

- okamžitú rýchlosť (deriváciu podľa času) označujeme symbolom $\frac{dx(t)}{dt}$
- okamžité zrýchlenie (druhá derivácia podľa času): $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$
- derivácia sa zvykne označovať čiarkou, ale derivácia podľa času bodkou (čiarka označuje derivácie podľa iných vecí): $v(t) = \dot{x}(t)$, $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$
- v matematike sa limity a derivácie definujú pomocou tzv. epsilon-delta techniky, ktorá rozhodne nie je jadrom celej myšlienky, ale len nástrojom na jej pevné uchopenie (my túto techniku nebudeme používať)

rýchlosť niektorých dôležitých pohybov

- základom metódy "celý pohyb naraz" je znalosť závislosti okamžitej rýchlosti od času pre niekoľko základných pohybov
- našou prvou úlohou teda bude zistiť, ako sa mení údaj tachometra, ak sa poloha mení zadaným spôsobom (napríklad mocninovým)
- tvrdenia budeme dokazovať tak, aby bola jasná myšlienka (technické epsilon-delta detaily necháme na prednášku z matematiky)

aká je rýchlosť, ak je pohyb $x(t) = t^n$?

$$\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t+\Delta t)^n - t^n}{\Delta t}$$

$$(t+\Delta t)^n = (t+\Delta t)(t+\Delta t)\cdots(t+\Delta) = t^n + n\, t^{n-1}\Delta t + \overbrace{\cdots}^{\text{obsahuje } (\Delta t)^2 \text{ a vyššie mocniny}}$$

$$\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t^n + nt^{n-1}\Delta t + \cdots - t^n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (\, n\, t^{n-1} + \underbrace{\cdots}_{\text{obsahuje } \Delta t \text{ a vyššie mocniny}}) = n\, t^{n-1}$$

$$\boxed{\frac{dt^n}{dt} = n\, t^{n-1}}$$

aké je <u>zrýchlenie</u>, ak je pohyb $x(t) = t^n$?

$\dot{x}(t) = n\ t^{n-1}$ toto sme ukázali pred chvíľou

$\frac{d}{dt}(c\,x(t)) = c\,\dot{x}(t)$ toto ukážte teraz (priamo z definície derivácie)

$$\ddot{x}(t) = \dot{v}(t) = \frac{d}{dt}(n\ t^{n-1})$$

$$= n\ (n-1)\ t^{n-2}$$

toto nám umožňuje určiť v niektorých prípadoch
zo zadaného zrýchlenia celý pohyb naraz

to sme doteraz vedeli pre pohyb s nulovým zrýchlením
a pre pohyb s rovnomerným zrýchlením,
teraz to vieme pre oveľa širšiu triedu zrýchlení

základná úloha mechaniky

- v mechanike väčšinou nehľadáme zrýchlenie pre zadaný pohyb, ale pohyb pre zadané zrýchlenie (ktoré je zadané cez zákon sily)

- ak je zrýchlenie zadané ako konkrétna funkcia času, potom rýchlosť je odpoveďou na otázku: aká funkcia času má práve túto deriváciu?

- odpovedať na túto otázku je vo všeobecnosti ťažká úloha, ale je to ľahké v prípade, že narazíme na funkciu, ktorú sme už stretli ako deriváciu (nejakej inej funkcie)

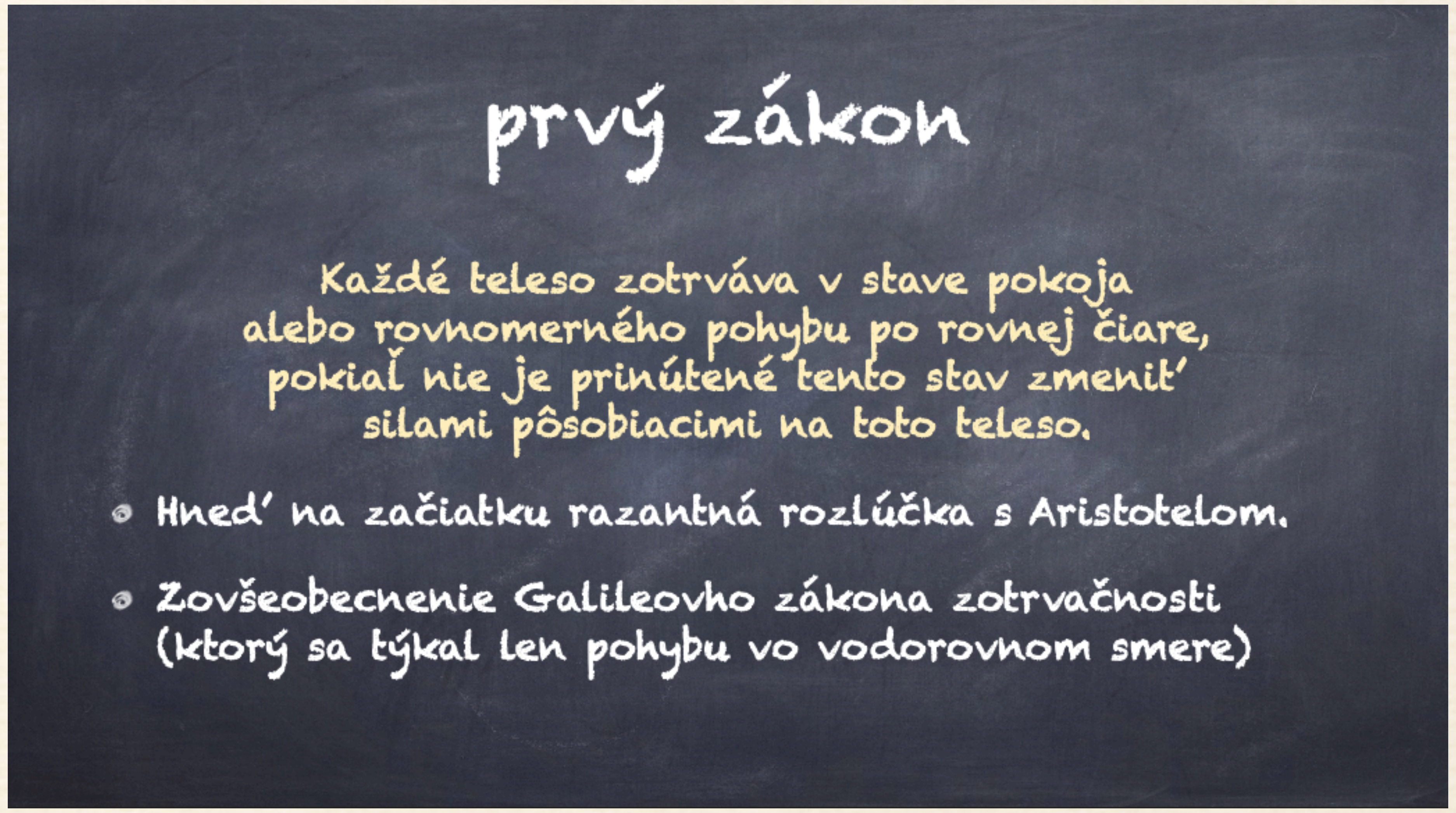
- terminologická poznámka: funkcia, ktorej deriváciou je zadaná funkcia $f(t)$ sa nazýva (neurčitým) integrálom funkcie $f(t)$

aký je pohyb, ak je zrýchlenie nulové?

- aká je $v(t)$ ak je $a(t) = \dot{v}(t) = 0$?
- konštantná: $v(t) = c$
- ak je počiatočná rýchlosť v_0, tak $c = v_0$
- aký je pohyb, ak $v(t) = \dot{x}(t) = v_0$?
- lineárny: $x(t) = v_0 \,.\, t + c'$
- ak je počiatočná poloha x_0, tak $c' = x_0$

$$x(t) = v_0 \,.\, t + x_0$$

odpoveď už poznáme:



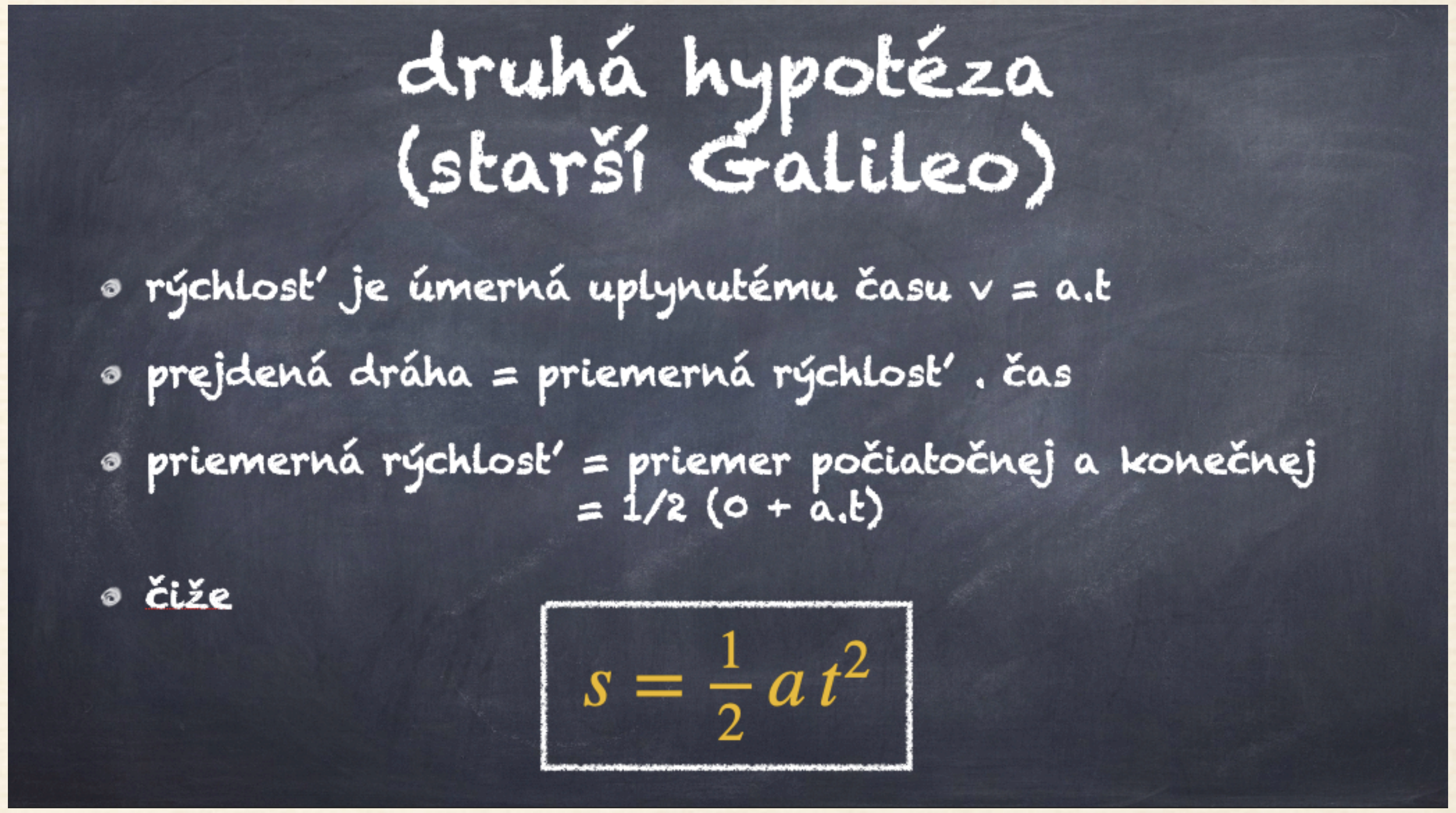
teraz sme ju získali iným spôsobom

aký je pohyb, ak je zrýchlenie konštantné?

- aká je $v(t)$ ak je $a(t) = \dot{v}(t) = a$?
- lineárna: $v(t) = a\,.\,t + c$
- ak je počiatočná rýchlosť v_0, tak $c = v_0$
- aký je pohyb, ak $v(t) = \dot{x}(t) = a\,.\,t + v_0$?
- $\frac{dt^2}{dt} = 2.t \implies x(t) = \frac{1}{2}a\,.\,t^2 + v_0\,.\,t + c'$
- ak je počiatočná poloha x_0, tak $c' = x_0$

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

odpoveď už poznáme:



teraz sme ju získali iným spôsobom

aký je pohyb, ak je zrýchlenie $a(t) = b\,.\,t$?

- aká je $v(t)$ ak je $a(t) = \dot{v}(t) = bt$?
- kvadratická: $v(t) = \frac{1}{2}bt^2 + c$
- ak je počiatočná rýchlosť v_0, tak $c = v_0$
- aký je pohyb, ak $v(t) = \dot{x}(t) = \frac{1}{2}bt^2 + v_0$
- $\frac{dt^3}{dt} = 3.t^2 \implies x(t) = \frac{1}{2.3}bt^3 + v_0 t + c'$
- ak je počiatočná poloha x_0, tak $c' = x_0$

$$x(t) = \frac{1}{6}bt^3 + v_0 t + x_0$$

odpoveď sme doteraz nepoznali

NEW

teraz sme ju získali prvý raz

aký je pohyb, ak je zrýchlenie $a(t) = b\,.\,t^n$?

- ukážte sami, že $x(t) = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} b t^{n+2} + v_0 t + x_0$
- pohyb teda vieme vypočítať pre (nekonečne) veľa rôznych zrýchlení, a to nielen krok za krokom, ale celý pohyb naraz
- v skutočnosti vieme už teraz oveľa viac, ako si hneď ukážeme
- budeme k tomu potrebovať nasledovné tvrdenie: derivácia súčtu je súčet derivácií $\dfrac{d(x(t)+y(t))}{dt} = \dfrac{dx(t)}{dt} + \dfrac{dy(t)}{dt}$. Dokážte, že je to naozaj tak.

aký je pohyb, ak je zrýchlenie hocijaké?

- myslíme tým hocijakú funkciu času *a(t)* (k zrýchleniam závisiacim nielen od času, ale napríklad aj od polohy alebo od rýchlosti sa dostaneme neskôr)
- začnime s takýmto zrýchlením: $a(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + \cdots$
- aký je pohyb *x(t)* vieme z toho, čo sme sa práve naučili, ľahko vypočítať
- urobte to, t.j. vypočítajte príslušné *v(t)* a *x(t)*
- správny výsledok: $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} c_0 t^2 + \frac{1}{2.3} c_1 t^3 + \frac{1}{3.4} c_2 t^4 + \frac{1}{4.5} c_3 t^5 + \frac{1}{5.6} c_4 t^6 + \cdots$

bomba na záver

- každá slušná funkcia *f(t)* sa dá zapísať v tvare, akým sme pred chvíľou začali, t.j. v tvare $f(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + \cdots$
- hovorí sa tomu Taylorov (mocninný) rad
- celá budúca prednáška bude o tom, ako zapísať funkciu v takomto tvare (t.j. ako nájsť pre zadanú funkciu koeficienty $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, \cdots$)
- pre nás je v tomto momente dôležité (bombové), že ak budeme vedieť slušnú funkciu zapísať v tvare Taylorovho radu, tak ju budeme vedieť derivovať aj integrovať (lebo ten rad derivovať a integrovať vieme)