Mimoriadne užitočný nástroj

Taylorov rad, čiže kladivo matematikovo

mechanika 11

užitočná prešmyčka

v tejto časti sa dozvieme, ako jednoduchým prepísaním definície okamžitej rýchlosti (derivácie) dostaneme do rúk prekvapujúco účinný nástroj, pomocou ktorého rýchlo a ľahko dokážeme niekoľko veľmi užitočných tvrdení

užitočný prepis definície derivácie

- nech je nejaké teleso v čase t v mieste $x(t)$ a pohybuje sa rýchlosťou $v(t)$ (nepoznáme celé funkcie, len ich hodnoty v jednom konkrétnom čase t) kde bude teleso o krátky čas Δt ?

- z definície okamžitej rýchlosti okamžite dostaneme (toto je tá prešmyčka)

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t)\,.\,\Delta t + \cdots$$

  kde tie tri bodky sú za členy, ktoré pre Δt klesajúce k nule klesajú k nule ešte rýchlejšie ako to Δt (bodky sme zdedili z limity, ktorá je prítomná v slovách o "ešte rýchlejšom poklese" – premyslite si, že je to naozaj tak)

- tento triviálny prepis sa ukáže byť prekvapujúco silnou zbraňou

prvý príklad užitočnosti
naša stará dobrá metóda "krok za krokom"

- je založená na predpoklade, že na tie tri bodky môžeme pri dostatočne malom kroku Δt pokojne zabudnúť, a teda písať $x(t + \Delta t) = x(t) + v(t) \,.\, \Delta t$

- v našej metóde "krok za krokom" v mechanike sme to doplnili rovnakou úvahou pre rýchlosť a zrýchlenie, čo nám dalo $v(t + \Delta t) = v(t) + a(t) \,.\, \Delta t$

- pri akom Δt si už môžeme dovoliť úplne zabudnúť na tri bodky?
  pri žiadnom, ale čím menšie Δt, tým menšie tri bodky a teda menšia chyba a presnejší výsledok (presný výsledok dostaneme v limite $\Delta t \to 0$)

druhý príklad užitočnosti
súvis určitého a neurčitého integrálu

- určitý integrál (od t_0 do t) z rýchlosti $v(t)$ je definovaný ako limita našej metódy "krok za krokom" pre dĺžku kroku idúcu k nule ($\Delta t \to 0$).

  označenie: $\displaystyle\int_{t_0}^{t} dt' \; v(t')$ (dt' hovorí podľa čoho integrujeme, $v(t')$ čo integrujeme)

- neurčitý integrál z rýchlosti $v(t)$ je definovaný ako opak derivácie, čiže ako taká funkcia, ktorej rýchlosťou (deriváciou podľa času) je práve $v(t)$

  označenie: $\displaystyle\int dt \; v(t)$

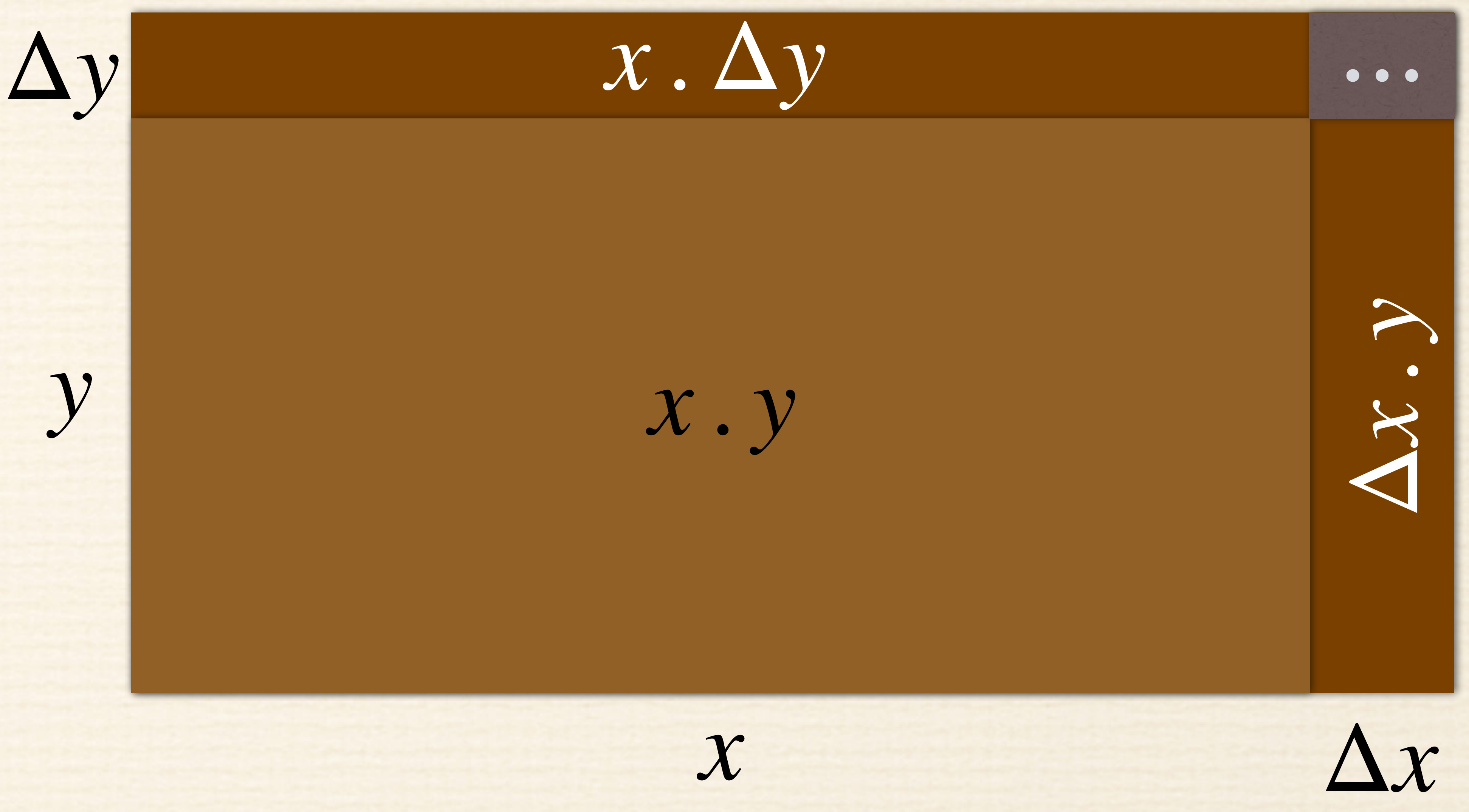
- jedno aj druhé je $x(t)$, čiže $\boxed{\displaystyle\int dt \; v(t) = \int_{t_0}^{t} dt' \; v(t')}$ (Newton-Leibnizova veta)

tretí príklad užitočnosti

rýchlosť zmeny súčinu (derivácia súčinu)

- $\frac{d}{dt}x(t)y(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t)y(t+\Delta t) - x(t)y(t)}{\Delta t}$
- teraz: $x(t+\Delta t)\,.\,y(t+\Delta t) =$
  $= (x(t) + \dot{x}(t)\Delta t + \cdots)\,.\,(y(t) + \dot{y}(t)\Delta t + \cdots)$
  $= x(t)\,.\,y(t) + x(t)\,.\,\dot{y}(t)\Delta t + \dot{x}(t)\,.\,y(t)\Delta t + \cdots$
- čiže: $\boxed{\frac{d}{dt}x(t)\,.\,y(t) = x(t)\,.\,\dot{y}(t) + \dot{x}(t)\,.\,y(t)}$

Leibnizovo pravidlo



$x = x(t)$ $\qquad \Delta x = \dot{x}(t)\Delta t$

$y = y(t)$ $\qquad \Delta y = \dot{y}(t)\Delta t$

štvrtý príklad užitočnosti

rýchlosť (derivácia) zloženej funkcie

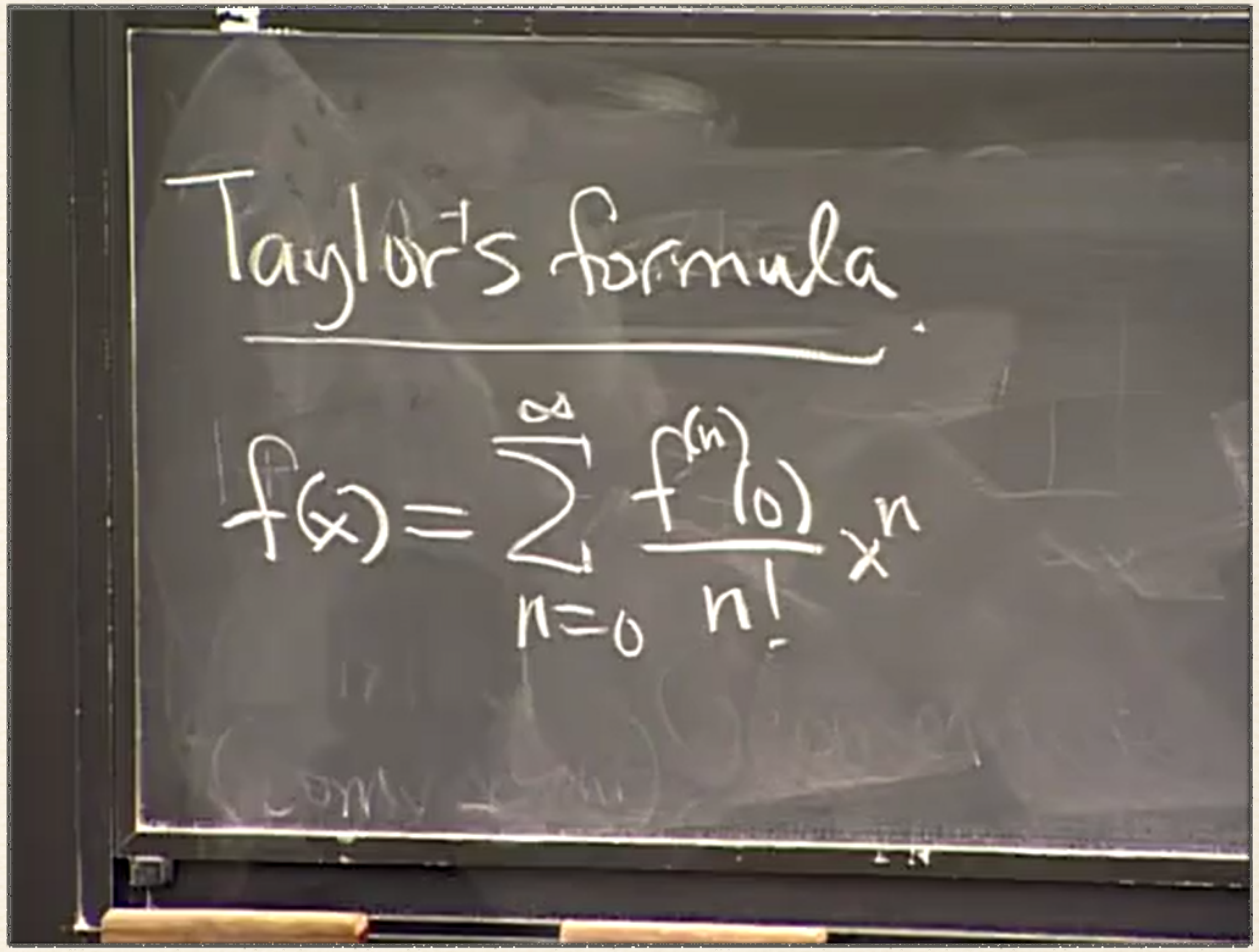
- zložená funkcia: funkcia premennej y, ktorá je funkciou premennej t
- $\frac{d}{dt} f\left(y(t)\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f\left(y(t+\Delta t)\right) - f\left(y(t)\right)}{\Delta t}$
- teraz: $f\left(y(t+\Delta t)\right) = f\left(y(t) + \dot{y}(t) \,.\, \Delta t + \cdots\right)$

  $= f\left(y(t)\right) + f'\left(y(t)\right) . \left(\dot{y}(t)\Delta t + \cdots\right) + \cdots$
- čiže: $\boxed{\frac{d}{dt} f\left(y(t)\right) = f'\left(y(t)\right) . \dot{y}(t)}$ (čiarka = derivácia podľa y

  bodka = derivácia podľa t)

od troch bodiek
k Taylorovmu radu

v tejto časti si povieme, ako sa dá spresňovaním približného vzťahu získaného prešmyčkou získať presný vzťah, ktorý bude ešte užitočnejší



čo skrývajú tri bodky

- vo všetkých príkladoch užitočnosti vzťahu $x(t + \Delta t) = x(t) + v(t)\,.\,\Delta t + \cdots$ sme tri bodky v limite $\Delta t \to 0$ zanedbali (lebo boli zanedbateľné)

- ďalšiu mimoriadne užitočnú vec dostaneme, keď Δt nepošleme do nuly a pokúsime sa zistiť, čo sa skrýva v troch bodkách

- zistíme to tak, že opakovane použijeme náš vzťah s tromi bodkami, v ktorom tri bodky zanedbáme (keď budú zanedbateľné)

- to, čo dostaneme, považoval Newton za svoj najväčší matematický objav (aj keď sa to volá podľa Newtonho mladšieho kolegu Brooka Taylora)

čo skrývajú tri bodky – začiatok

- začnime s tým, že pre nejaké teleso poznáme v čase t (a len v tomto čase) polohu $x(t)$, rýchlosť $v(t)$ aj zrýchlenie $a(t)$. Kde bude teleso v čase $t + \Delta t$?

- akú bude mať v čase $t + \Delta t$ rýchlosť, to už vieme (keďže rýchlosť sa má k zrýchleniu rovnako ako poloha k rýchlosti) $v(t + \Delta t) = v(t) + a(t) \,.\, \Delta t + \cdots$

- akú bude mať v čase $t + \Delta t$ polohu, to vieme tiež (keďže až na tri bodky sa rýchlosť mení ako pri rovnomerne zrýchlenom pohybe, aj poloha sa bude meniť ako pri rovnomerne zrýchlenom pohybe)

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t) \,.\, \Delta t + \frac{1}{2} a(t) \,.\, (\Delta t)^2 + \cdots$$

- poznámka: $x(t)$, $v(t)$ a $a(t)$ sú konštanty (hodnoty v konkrétnom čase t)

drobná zmena označenia

- v ďalšom bude užitočné zmeniť označenie nasledovným spôsobom: čas budeme merať od momentu t (to znamená, že náš počiatočný čas bude 0) a namiesto Δt môžeme písať t (lebo toto písmeno sa nám práve uvoľnilo)
- prechod medzi pôvodným a novým označením: $t \leftrightarrow 0 \qquad \Delta t \leftrightarrow t$
- v novom označení máme zadané $x(0), v(0), a(0)$ a hľadáme $x(t)$
- celý postup bude teraz založený na tom, že poznáme okamžitú rýchlosť (deriváciu) pre mocninovú funkciu: $\frac{d}{dt}t^n = n\,.\,t^{n-1}$ (pozri minulú prednášku)

starý výsledok v novom označení

- môžeme len triválne prepísať, ale môžeme aj znova a trochu inak odvodiť
- ak by sme náhodou nepoznali vzťahy pre rovnomerne zrýchlený pohyb, mohli by sme postupovať nasledovne:
- zrýchlenie je $\ddot{x}(t) = a(t) = a(0) + \cdots$
(tieto tri bodky sú za prípadné zmeny zrýchlenia, ktoré nepoznáme)
- rýchlosť je $\dot{x}(t) = v(0) + a(0)\,.\,t + \cdots$ (pretože $\frac{d}{dt}t^n = n\,.\,t^{n-1}$)
- a poloha je $x(t) = x(0) + v(0)\,.\,t + \frac{1}{2}a(0)\,.\,t^2 + \cdots$ (pretože $\frac{d}{dt}t^n = n\,.\,t^{n-1}$)

čo skrývajú tri bodky – pokračovanie

- pokračujme teraz ďalej s tým, že pre nejaké teleso poznáme v čase 0 (a len v tomto čase) polohu $x(0)$, rýchlosť $v(0)$, zrýchlenie $a(0)$ a ešte aj rýchlosť zmeny zrýchlenia $b(0)$. Kde bude teleso v čase t ?

- rýchlosť zmeny zrýchlenia je $\dddot{x}(t) = b(t) = b(0) + \cdots$

- zrýchlenie je $\ddot{x}(t) = a(0) + b(0)\,.\,t + \cdots$ $\left(\frac{d}{dt}t^n = n\,.\,t^{n-1}\right)$

- rýchlosť je $\dot{x}(t) = v(0) + a(0)\,.\,t + \frac{1}{2}\,b(0)\,.\,t^2 + \cdots$ $\left(\frac{d}{dt}t^n = n\,.\,t^{n-1}\right)$

- a poloha je $x(t) = x(0) + v(0)\,.\,t + \frac{1}{2}\,a(0)\,.\,t^2 + \frac{1}{2.3}\,b(0)\,.\,t^3 + \cdots$ $\left(\frac{d}{dt}t^n = n\,.\,t^{n-1}\right)$

kde sa zobrala tá trojka v menovateli?

- malo by to byť jasné, ale pre istotu si to povedzme úplne po lopate
- z toho, že $\frac{d}{dt}t^n = nt^{n-1}$ vyplýva, že funkcia $\frac{1}{n}t^n + c$ je tou funkciou, ktorej derivácia je t^{n-1} (zapísané pomocou integrálu: $\int dt\ t^{n-1} = \frac{1}{n}t^n + c$)
- čiže $\int dt\ t = \frac{1}{2}t^2 + c \qquad \int dt\ \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{3}t^3 + c \qquad \int dt\ \frac{1}{2}\frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}t^4 + c$
- vo všeobecnosti: $\int dt\ \frac{1}{1.2.\cdots.(n-1)}t^{n-1} = \frac{1}{n!}t^n + c$

čo skrývajú tri bodky – úloha

- nech pre nejaké teleso poznáme v čase 0 (a len v tomto čase) $x(0)$, $\dot{x}(0)$, $\ddot{x}(0)$, $\dddot{x}(0)$, $\ddddot{x}(0)$. Kde bude teleso v čase t ?

- správna odpoveď:
$x(t) = x(0) + \dot{x}(0)\,.\,t + \frac{1}{2}\,\ddot{x}(0)\,.\,t^2 + \frac{1}{2.3}\,\dddot{x}(0)\,.\,t^3 + \frac{1}{2.3.4}\,\ddddot{x}(0)\,.\,t^4 + \cdots$

- ako by vyzeral pohyb v prípade, že by sme v čase 0 poznali polohu a ďalších 256 derivácií?

- správna odpoveď:
$x(t) = x(0) + \dot{x}(0)\,.\,t + \frac{\ddot{x}(0)}{2!}\,.\,t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\,x^{(n)}(0)\,.\,t^n + \cdots + \frac{1}{256!}\,x^{(256)}(0)\,.\,t^{256} + \cdots$
pričom $n! = 1.2.3.\cdots.n$ (číta sa n-faktoriál) a $x^{(n)}(t)$ znamená n-tú deriváciu

čo skrývajú tri bodky – dokončenie

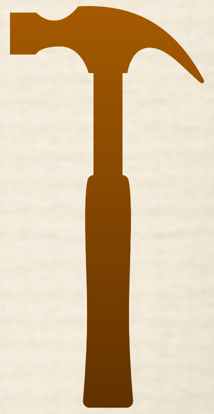
- nech pre nejaké teleso poznáme v čase 0 (a len v tomto čase) všetky derivácie
  Kde bude teleso v čase t ?

- z predchádzajúceho by malo byť jasné, že správna odpoveď má tvar

$$x(t) = x(0) + \frac{x^{(1)}(0)}{1!}t + \frac{x^{(2)}(0)}{2!}t^2 + \frac{x^{(3)}(0)}{3!}t^3 + \cdots$$

  kde tri bodky už nestoja za nejaké nešpecifikované zanedbateľné členy,
  ale znamenajú opakovanie rovnakej štruktúry $+\frac{x^{(n)}(0)}{n!}t^n$ až donekonečna

- tento súčet sa volá Taylorov rad a je to veľmi užitočný matematický nástroj



učený zápis Taylorovho radu

- ak definujeme pre nulu symboly $x^{(0)}(t) = x(t)$, $0! = 1$ a $t^0 = 1$, potom môžeme Taylorov rad zapísať ako

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(n)}(0)}{n!} \, . \, t^n}$$

- ak sa vrátime k pôvodnému označeniu ($t \leftrightarrow 0$, $\Delta t \leftrightarrow t$) Taylorov rad dostane tvar

$$\boxed{x(t + \Delta t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(n)}(t)}{n!} \, . \, (\Delta t)^n}$$

ako používal kladivo Newton

- akékoľvek rovnice obsahujúce nejaké funkcie (a prípadne aj ich derivácie) riešil Newton tak, že všetky funkcie rozložil do ich Taylorových radov (neznámu funkciu do radu s neznámymi koeficientami)

- potom porovnal koeficienty pri jednotlivých mocninách premennej, čím našiel neznáme koeficienty (Taylorovho radu neznámej funkcie)

- ak bol výsledný rad Taylorovým radom nejakej známej funkcie, tak práve ukázal, že tá funkcia je riešením rovnice

- ak výsledný rad nebol Taylorovým radom nejakej známej funkcie, tak mal riešenie v tvare nekonečného radu

príklad na záver

- nájdime funkciu $x(t)$, ktorá spĺňa rovnicu: $\dot{x}(t) = x(t)$
- nech $x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \cdots$ (Taylorov rad s neznámymi koeficientmi)
- dosadíme do rovnice: $c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + 4c_4 t^3 + \cdots = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \cdots$
- porovnaním koeficientov pri jednotlivých mocninách t dostaneme:
  $c_1 = c_0 \qquad 2c_2 = c_1 \qquad 3c_3 = c_2 \qquad 4c_4 = c_3 \qquad \cdots$
  $c_1 = c_0 \qquad c_2 = \frac{1}{2}c_0 \qquad c_3 = \frac{1}{2.3}c_0 \qquad c_4 = \frac{1}{2.3.4}c_0 \qquad \cdots$
- čiže $x(t) = c_0\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots\right)$
  ktorá funkcia má takýto Taylorov rad sa dozvieme na budúcej prednáške