

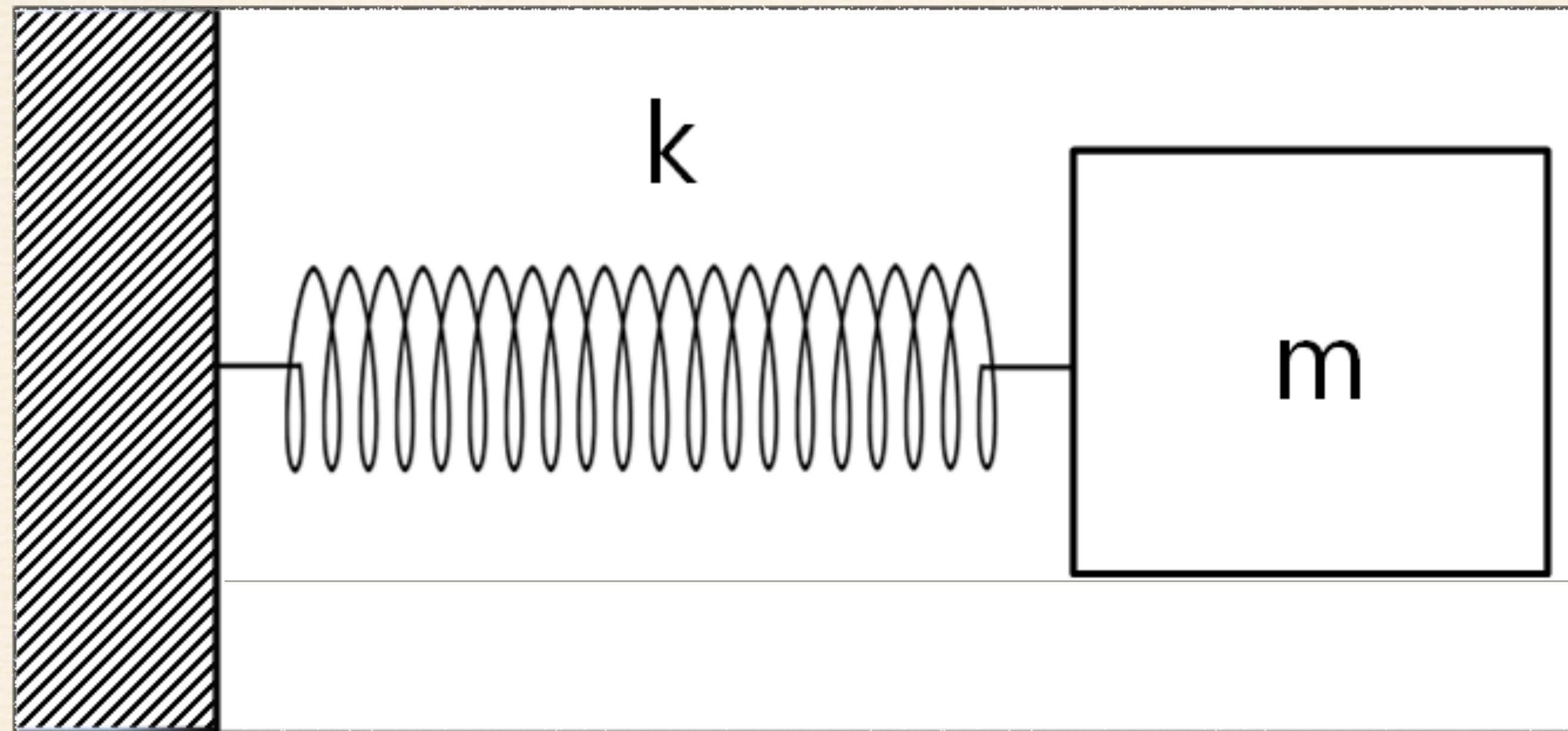
# Extrémne dôležitý fyzikálny systém



*lineárny harmonický oscilátor*

*mechanika 14*

# mimoriadne dôležitá vec



Čo je dôležité na tejto neprirodzenej blbosti?

To, že sa v niečom podobá na veľa prirodzených a často sa vyskytujúcich vecí.

# teleso na pružine



$$F = -k \cdot x$$

*prečo je to tak, povieme si o chvíľu*

*je to pomerne dôležité, pretože pružiny bývajú  
súčasťou niektorých významných zariadení,  
napríklad hodín*

# veľa iných vecí



$$F = -k \cdot x$$

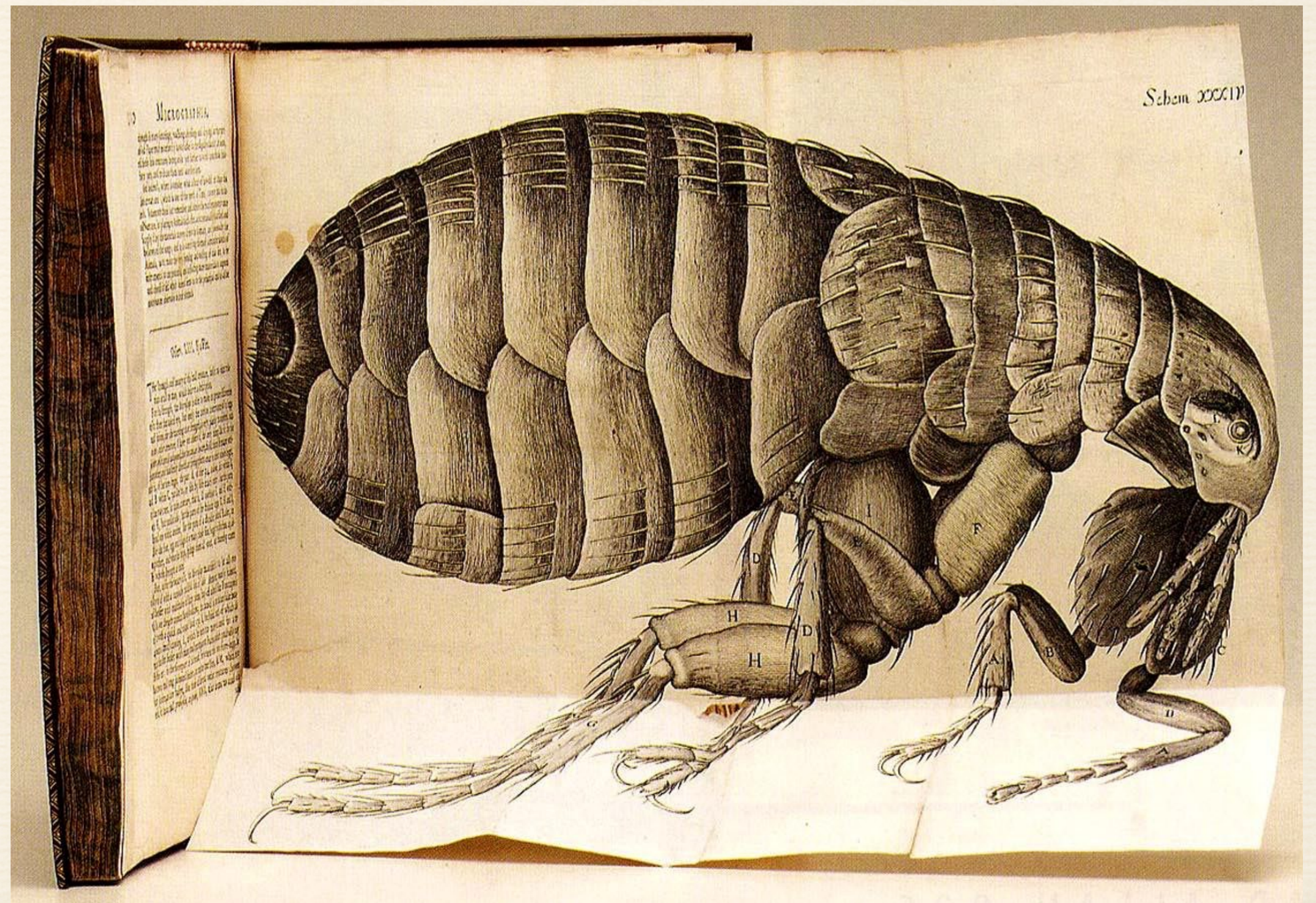
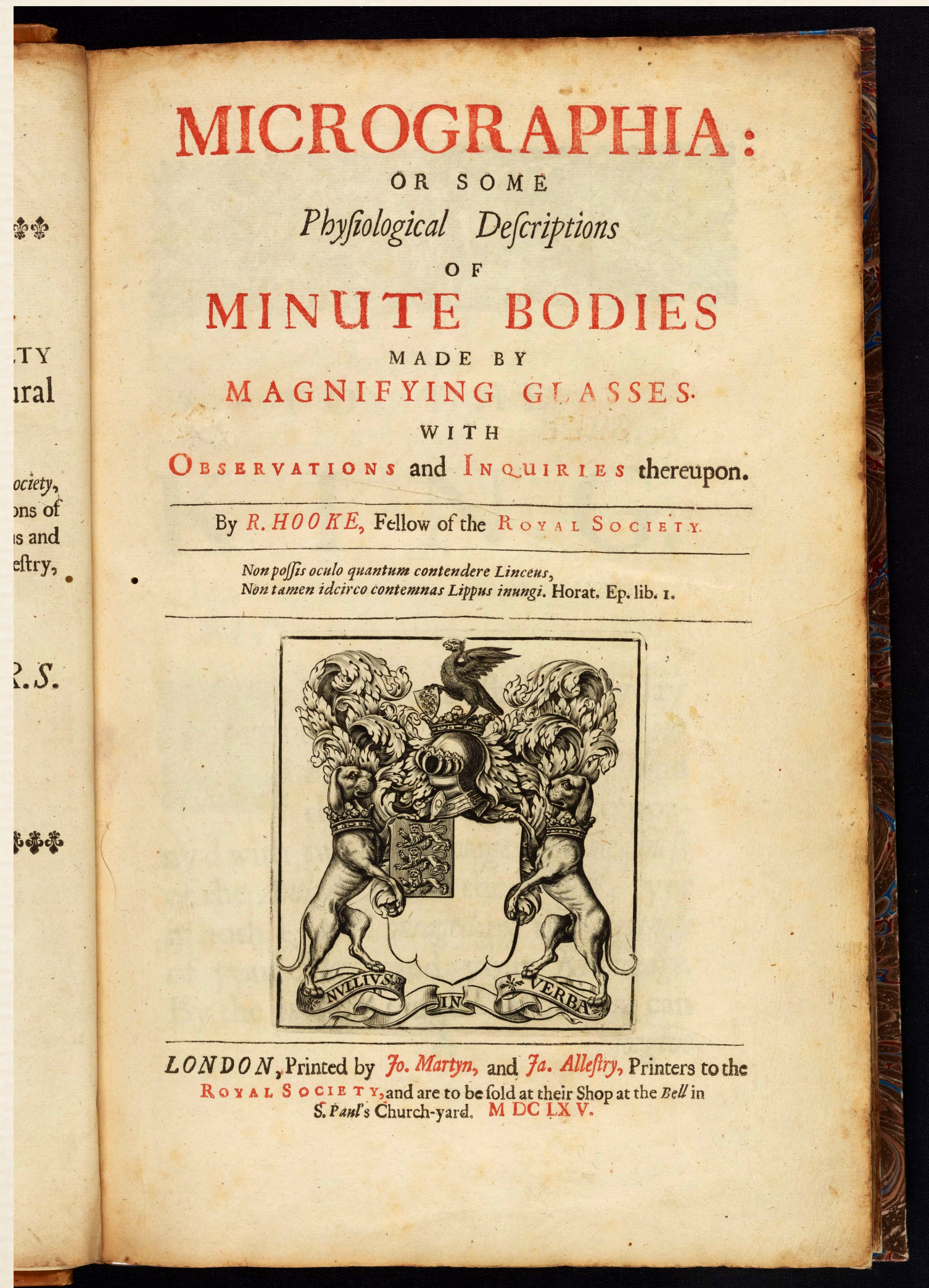
*prečo je to tak, povieme si hneď potom*

*je to extrémne dôležité, pretože také veci sa  
vyskytujú všade okolo nás – kamkoľvek sa  
pozrieme, uvidíme takú vec*

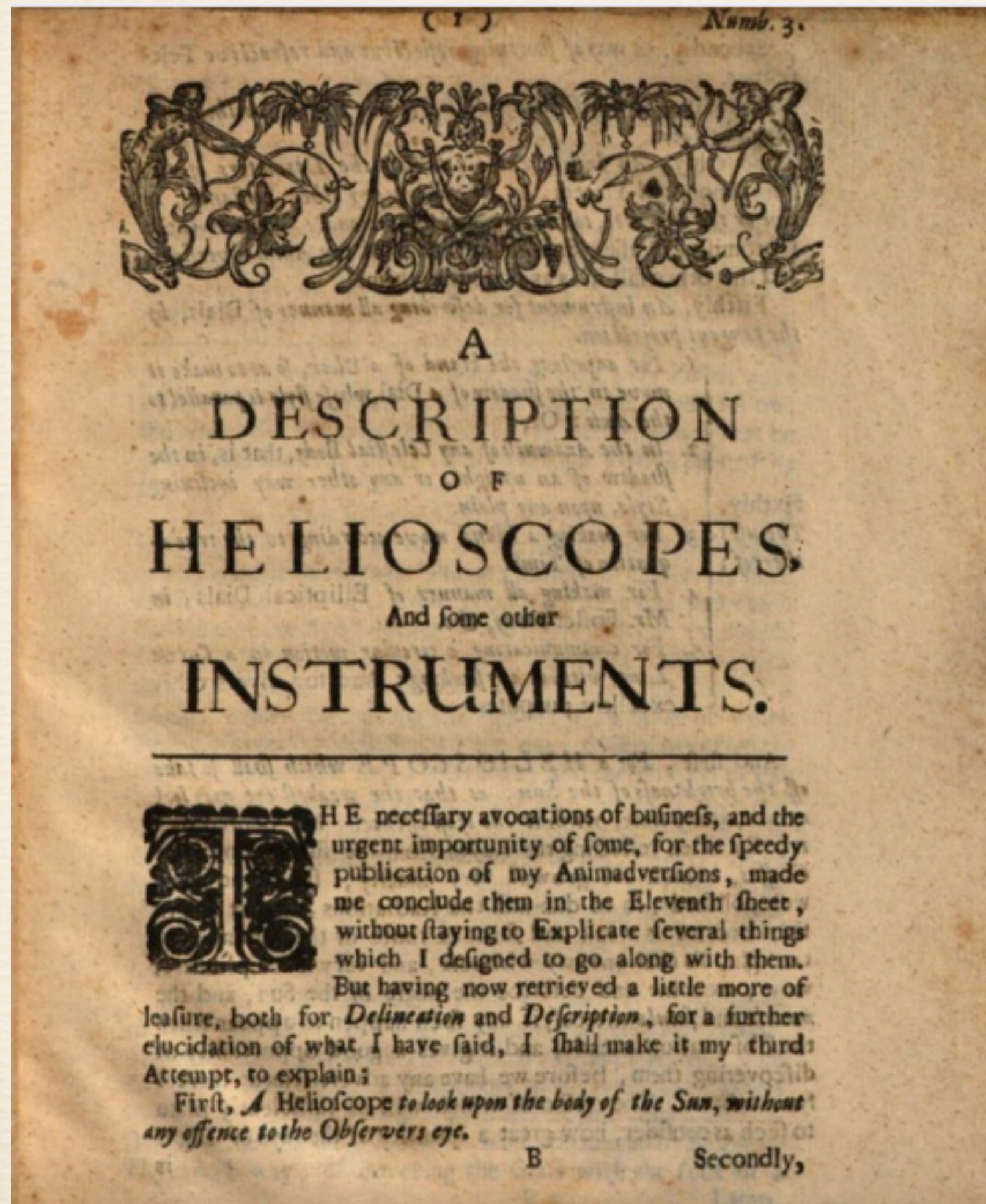
Robert Hooke (1635-1703)  
významne vylepšil množstvo  
fyzikálnych prístrojov, napríklad  
mikroskop, ďalekohľad a vákuovú  
pumpu. Potom pomocou týchto  
prístrojov objavil mikroskopické  
fosílie, bunkovú štruktúru rastlín,  
rotáciu Marsu a Jupitera a všeličo  
iné. Vo fyzike sú najvýznamnejšie  
jeho objavy týkajúce sa pružnosti.  
Jedným z nich je objav zákona  
pre silu, ktorou pôsobí na telesá  
natahnutá alebo stlačená pružina.

Nezachoval sa ani jeden jediný  
Hookov portrét. Prítom nie je  
veľmi pravdepodobné, že nijaký  
neexistoval. Skôr sa predpokladá,  
že prípadné Hookove portréty dal  
niekto zničiť a za hlavného  
podozrivého býva považovaný  
Issac Newton, ktorý Hooka  
neznášal (bolo to vzájomné).  
Hovorí sa, že na prednáškach  
je dobré predstavovať vedcov aj  
z ich ľudskej stránky. Takže toto  
bol príklad silného ľudského citu.

# Mikrografia (1665) a obrázok blchy v nej



# Opis slnkohľadov (1675) a anagram v ňom



Aby som vyplnil prázdne miesto na poslednej strane, pridám sem opisy desiatky z tisíciek vynálezov, ktoré mienim publikovať ...

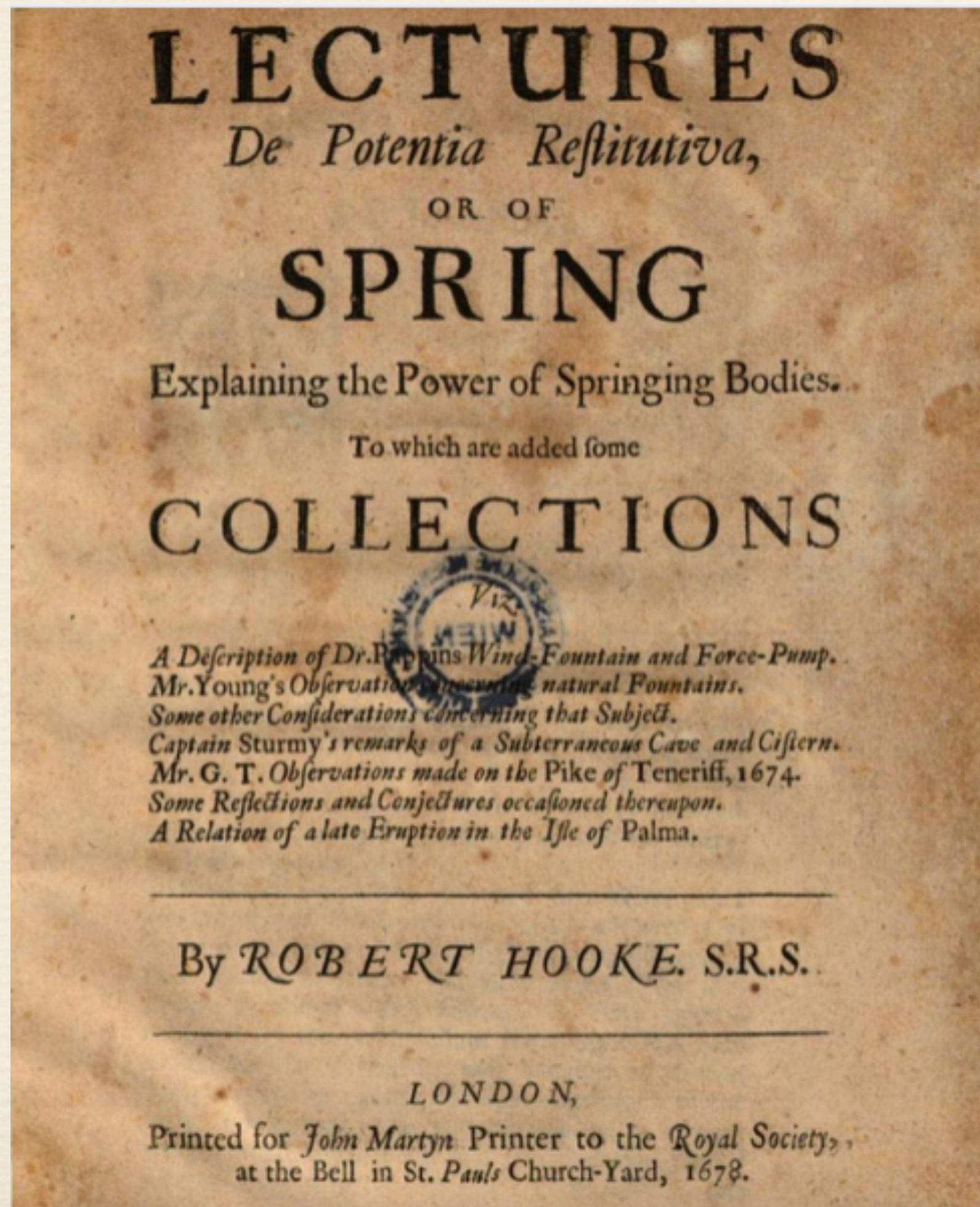
1. ...

2. ...

3. Správnu teóriu pružnosti a jej výklad v tých prípadoch, v ktorých hrá úlohu. A tiež spôsob výpočtu rýchlosti telies pod jej vplyvom.

ceiinosstuv

# Prednášky o pružine (1678) a riešenie anagramu



V tejto knihe vysvetlil, čo znamenal anagram *ceiinosstuv*. Zmyslom anagramu bolo mať dôkaz o tom, že to vedel už pred tromi rokmi (keby sa niekto hádal o prvenstvo objavu).

anagram znamenal toto: *ut tensio, sic vis*  
preklad: aké predĺženie, taká sila  
presná formulácia: sila je úmerná predĺženiu

V knihe boli opísané experimenty, na základe ktorých dospel Hooke k tomuto záveru (a ten dodnes ako jediný nesie jeho meno)

# Hookove experimenty

- ❖ Prednášky o pružine výborne to ilustruje jedna strana s obrázkami
- ❖ Fig. 1 závislosť predĺženia od váhy (bežná pružina)
- ❖ Fig. 2 závislosť predĺženia od váhy (hodinová pruž.)
- ❖ Fig. 1 predĺženie zataženého kovového lanka

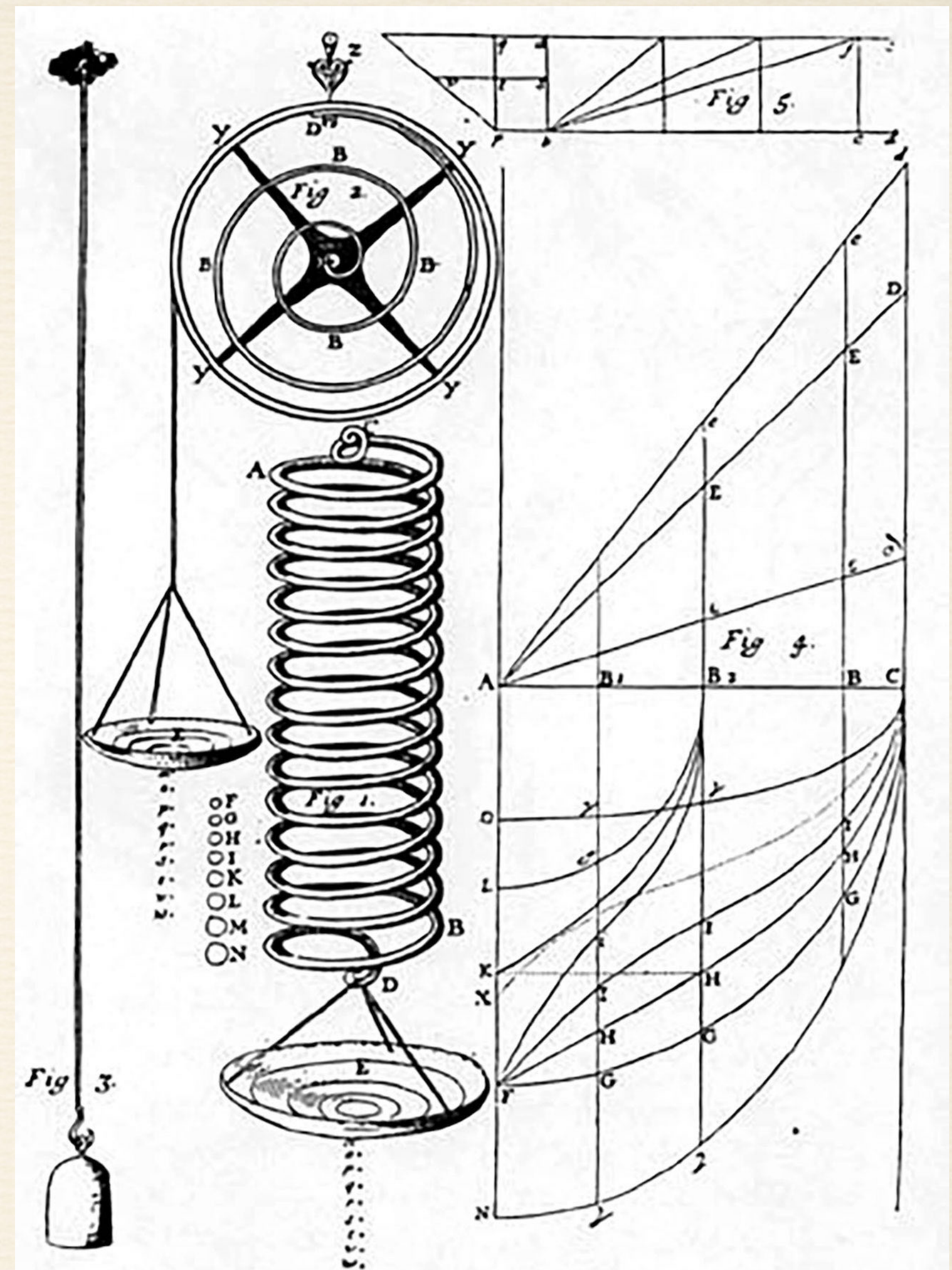


PLATE TO HOOKE'S LECTURE 'OF SPRING' 1678.

- FIG. 1. Wire helical spring stretched to points *s, p, q, r, s, t, v, w*, by weights *F, G, H, I, K, L, M, N*.
- FIG. 2. Watch spring similarly stretched by weights put in pan.
- FIG. 3. The 'Springing of a string of Brass Wire 36 ft. long'.
- FIG. 4. Diagram of velocities of springs.
- FIG. 5. Diagram of law of ascent and descent of heavy bodies.

# Tým sme vybavili pružiny. A čo iné veci?

Na každé teleso pôsobí v malom okolí jeho stabilnej rovnováhy sila úmerná výchylke z rovnovážnej polohy.

❖ nech je sila pôsobiaca na teleso ľubovoľná funkcia polohy  $F(x)$

❖ Taylorov rad:  $F(x) = F(0) + \underbrace{F'(0)}_{-k} \cdot x + \frac{1}{2}F''(0)x^2 + \dots$

❖ pre dostatočne malé  $x$  sú kvadratický a vyššie členy zanedbateľné (pre  $x = 0.001$  je  $x^2 = 0.000001$ ,  $x^3 = 0.000000001$ , ... a ak to nestačí, zoberiem ešte menšie  $x$ )

❖ rovnováha:  $F(0) = 0$  stabilná rovnováha:  $F'(0) < 0$  (premyslite si)

# systemy v okolí stabilnej rovnováhy ( $F = -kx$ )



*Pozoruhodná vlastnosť nášho sveta:  
Okolia dostatočne malé z matematického hľadiska  
sú často dostatočne veľké z fyzikálneho hľadiska.*

*Priblíženie  $F = -kx$  preto opisuje veľa dôležitých javov.*



*domy, stromy, listy, mosty, zem, vzduch, ...*

# pohyb telesa na ktoré pôsobí sila $F = -kx$

- ❖ pohybová rovnica:  $m \cdot \ddot{x}(t) = -k \cdot x(t)$  respektíve  $m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0$
- ❖ je to lineárna dif. rovnica s konšt. koef. a s nulovou pravou stranou
- ❖ recept na riešenie týchto rovníc poznáme: riešenie hľadáme v tvare  $e^{\alpha t}$
- ❖ dosadením do rovnice dostaneme:  $m\alpha^2 + k = 0$
- ❖ riešenie:  $\alpha = \sqrt{-\frac{k}{m}}$  odmocnina zo záporného čísla, čo s tým?
- ❖ pripomienka :  $i^2 = -1$   $\alpha = \sqrt{-\frac{k}{m}} = \sqrt{-1} \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega$  kde  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

# pokračovanie riešenia rovnice $m\ddot{x}(t) = -kx(t)$

- ❖ všeobecné riešenie (z princípu superpozície):  $x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$
- ❖ ako tomu máme rozumieť? môže byť poloha telesa komplexné číslo?
- ❖  $x(t)$  nemusí byť komplexné, pretože súčet dvoch komplexných čísiel môže byť reálne číslo (napr.  $(a + ib) + (a - ib) = 2a$ , čo je reálne číslo)
- ❖ pripomienka:  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$
- ❖ čiže  $x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$  kde  $C_1 = c_1 + c_2$  a  $C_2 = i(c_1 - c_2)$
- ❖  $C_1$  a  $C_2$  budú reálne, ak bude  $c_1 + c_2$  reálne a  $c_1 - c_2$  imaginárne číslo (a v ďalšom uvidíme, že také naozaj budú)

# dokončenie riešenia rovnice $m\ddot{x}(t) = -kx(t)$

❖ všeobecné riešenie:  $x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$

❖ počiatkové podmienky:  $x(0) = C_1 = x_0$        $\dot{x}(0) = C_2\omega = v_0$

❖ hodnoty konštánt:  $C_1 = x_0$        $C_2 = \frac{v_0}{\omega}$

❖ jednoznačné riešenie:  $x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$

❖ poznámka: vidíme, že reálne počiatkové podmienky nám dali reálne konštanty  $C_1$  a  $C_2$  (tak, ako sme sľubovali)

# dve poznámky

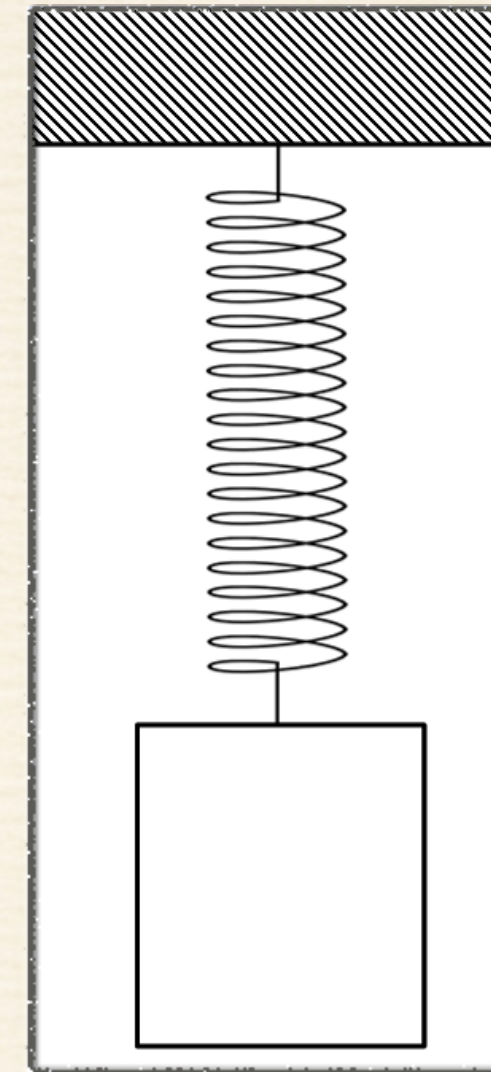
- ❖ Celý postup bol ilustráciou toho, že komplexné čísla sú niekedy jednoduchšie ako reálne čísla (tu sa to prejavilo v tom, že naša kvadratická rovnica nemala nijaké reálne riešenie, a pritom mala dve komplexné riešenia). Je preto celkom rozumné a vtipné riešiť celú rovnicu pre komplexnú polohu a dovoliť aj komplexné  $c_1, c_2$ . A keď do tohto komplexného riešenia dosadíme reálne počiatkové podmienky, dostaneme riešenie s nulovou imaginárnou časťou. Pomocou komplexných čísiel tak dostávame reálne riešenie.
- ❖ Naš systém sa volá lineárny harmonický oscilátor (LHO). Lineárne závisí sila od polohy ( $F = -kx$ ), harmonickými sa nazývajú sínusové a cosínusové oscilácie (riešenia pohybovej rovnice  $m \cdot \ddot{x}(t) = -k \cdot x(t)$  )

# nepovinná, ale užitočná domáca úloha

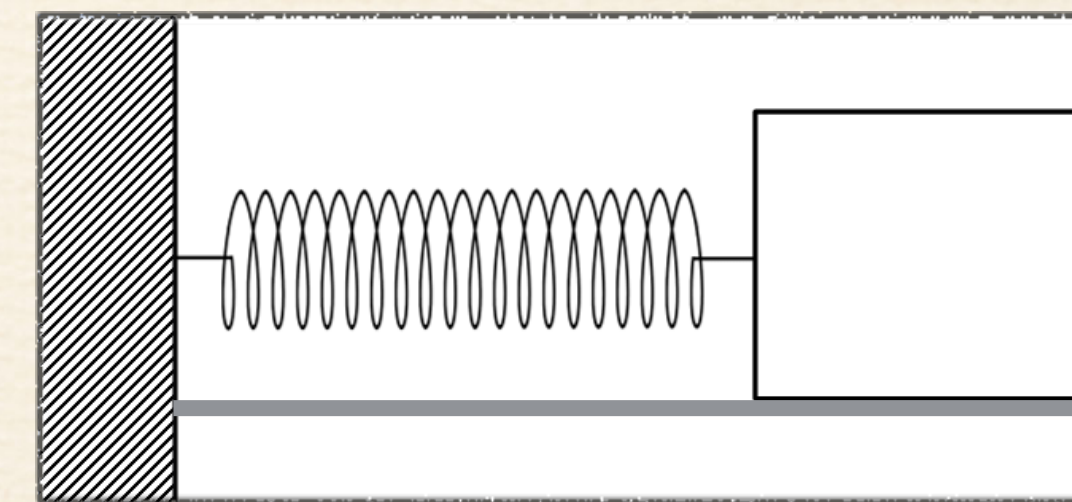
- ❖ ukážte, že naše riešenie sa dá napísať aj v tvare  $x(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$
- ❖ vyjadrite konštanty  $a, \varphi$  zo zadaných počiatočných podmienok
- ❖ pomocou pythonu alebo iného programu nakreslite pre rôzne hodnoty parametrov  $m, k, x_0, v_0$  grafy závislostí polohy a rýchlosti od času
- ❖ napíšte a vyriešte pohybovú rovnicu pre lineárny harmonický oscilátor, ktorého rovnovážna poloha nie je v bode  $x = 0$ , ale v bode  $x = l$

# dve užitočné variácie na našu tému

- ❖ napíšte pohybovú rovnicu a zistite ako vyzerá pohyb vertikálneho LHO v gravitačnom poli



- ❖ napíšte pohybovú rovnicu a zistite ako vyzerá pohyb horizontálneho LHO so započítaním trenia



# užitočná zmienka na záver

- ❖ z diferenciálnej rovnice sa dá veľa dozvedieť aj bez explicitného riešenia
- ❖ v nejakom zmysle dokonca platí, že “rozumieť” diferenciálnej rovnici znamená vedieť o jej riešeniach povedať všeličo zaujímavé aj bez toho, že by sme ju explicitne vyriešili
- ❖ na ilustráciu si ukážeme, ako sa dajú bez vyriešenia diferenciálnej rovnice nahliadnuť dve dôležité veci týkajúce sa pohybu LHO, a síce:
  - ❖ periodičnosť pohybu
  - ❖ vlnkovosť grafu (závislosti polohy od času)

# pohyb LHO je periodický

- ❖ nech je počiatočná poloha  $x_0$  a počiatočná rýchlosť nulová
- ❖ zrýchlenie smeruje k počiatku ( $F = -kx$ ), takže oscilátor sa začne pohybovať smerom k počiatku, pričom veľkosť jeho rýchlosti stále narastá
- ❖ keď sa dostane do počiatku ( $x = 0$ ) má nejakú rýchlosť  $v$  a ňou pokračuje ďalej, pričom je spomaľovaný presne tak, ako bol predtým zrýchľovaný (pretože veľkosť jeho zrýchlenia závisí len od vzdialenosti od počiatku)
- ❖ keďže spomalenie je “zrkadlovým obrazom” predchádzajúceho zrýchlenia, dostane sa až do bodu  $-x_0$ , kde sa všetko začne odznova opačným smerom
- ❖ výsledkom je periodický pohyb medzi  $x_0, -x_0, x_0, -x_0, \dots$

# grafom periodického pohybu LHO je vlnovka

- ❖ tentoraz začnime v počiatku, kde sa oscilátor pohybuje nejakou rýchlosťou  $v$
- ❖ zrýchlenie je nulové resp. zo začiatku veľmi malé, takže grafom je chvíľku takmer rovná čiara, ktorej sklon je daný práve rýchlosťou  $v$
- ❖ s narastajúcou výchylkou narastá spomalenie, takže rýchlosť klesá, a to čoraz rýchlejšie (graf funkcie  $x(t)$  sa zakrivuje smerom doprava, a to čoraz viac)
- ❖ keď oscilátor dosiahne maximálnu výchylku a nulovú rýchlosť, graf vyzerá ako polovica kopčeka sínusu podobnej vlnovky
- ❖ druhú polovicu kopčeka aj druhý (opačný) kopček dostaneme zrkadlovým doplnením (úvahy rovnaké ako pri periodičnosti) a potom sa to celé opakuje