Tlmené a vynútené kmity

lineárny harmonický oscilátor - pokračovanie

mechanika 15

Once Upon a Time in America

- Tacoma Narrows Bridge, Seattle, 1940
- 7. november (4 mesiace po otvorení)
- kľúčové slová bežného vysvetlenia: tlmenie, rezonancia, vlastné frekvencie
- cieľom dnešnej prednášky je pochopenie prvých dvoch z týchto kľúčových slov
- a všetko, čo k tomu budeme potrebovať, sme sa už naučili (takže to len použijeme)

LHO s ďalšími silami

- cieľom tejto prednášky je zistiť, ako vyzerá pohyb LHO, na ktorý pôsobí ešte nejaká ďalšia sila (jedna z dvoch konkrétnych síl, alebo obidve naraz)
- v prípade jednej z týchto síl (odpor prostredia) si hneď teraz vysvetlíme, prečo vyzerá práve tak, ako vyzerá
- v prípade druhej sily (sínusová alebo cosínusová vynucujúca sila) necháme vysvetlenie až na nasledujúcu prednášku
- v obidvoch prípadoch (aj v ich kombinácii) sú výsledné pohybové rovnice lineárne diferenciálne rovnice s konštatnými koeficientami, takže ich budeme vedieť riešiť technikami, ktoré už poznáme (a ktoré si teraz znovu precvičíme)

odpor prostredia pri malých rýchlostiach

- sila odporu prostredia je vo všeobecnosti komplikovaná funkcia rýchlosti
- rozvoj do Taylorovho radu: $F(v) = \cancel{F(0)} + \underbrace{F'(0)}_{-\gamma}\, v + \cancel{\tfrac{1}{2}F''(0)\, v^2} + \cdots$
- dostatočne malé rýchlosti, nulový odpor v pokoji, smer proti smeru pohybu
- toto je ten dôkaz, ktorý sme sľubovali, keď sme skúmali pohyb a voľný pád s odporom prostredia pri malých rýchlostiach
- opäť ako pri LHO nám Taylorov rad dal zo všeobecnej závislosti lineárnu (platí len pre malé rýchlosti a presne rovnaká argumentácia je za mnohými lineárnymi závislosťami vo fyzike aj v mnohých iných vedách)

tlmený LHO

- LHO s nezanedbateľným odporom prostredia (čo je vlastne každý LHO)
- výchylky LHO bývajú malé (ak nie sú dostatočne malé, už to nie je LHO)
- pri malých výchylkách bývajú malé aj rýchlosti, čiže sila odporu prostredia bude rovná $-\gamma\, v$ (lineárna závislosť sily od rýchlosti pri malých rýchlostiach)
- pohybová rovnica: $m\ddot{x}(t) = -\,kx(t) - \gamma\dot{x}(t)$ resp. $m\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + kx(t) = 0$
- lineárna diferenciálna rovnica s konšt. koef. a nulovou pravou stranou

riešenie pohybovej rovnice

- starý dobrý recept pre tento typ rovníc: riešenie hľadáme opäť v tvare $e^{\alpha t}$
  dosadením do pohybovej rovnice: $m\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + kx(t) = 0$
  dostaneme rovnicu pre α: $m\alpha^2 + \gamma\alpha + k = 0$
- riešenie kvadratickej rovnice: $$\alpha_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m}$$
- všeobecné riešenie: $x(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t}$

príliš veľký odpor $\gamma^2 > 4mk$

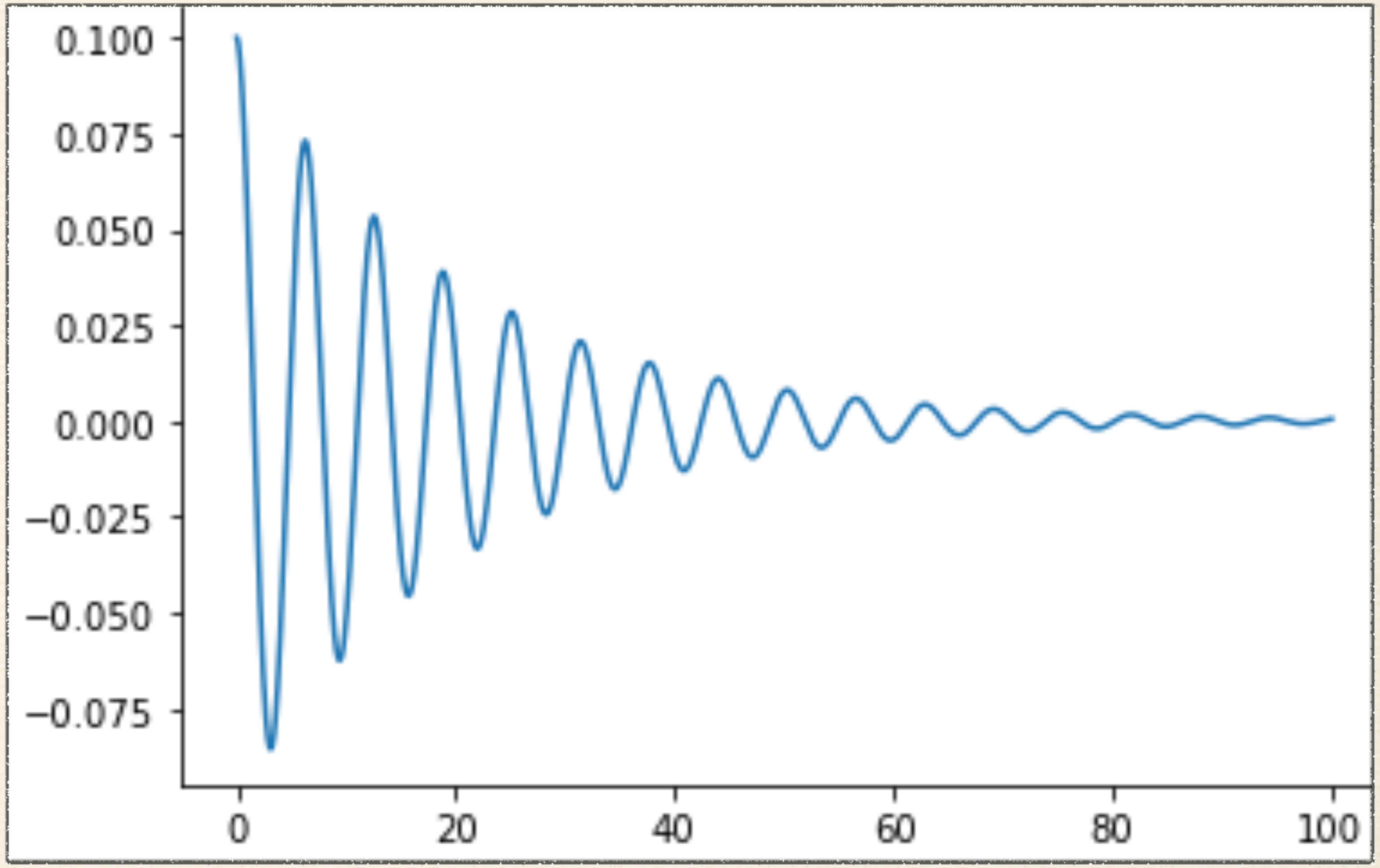
- riešenia veľmi výrazne závisia od znamienka výrazu $\gamma^2 - 4mk$
  najprv preskúmame riešenia v prípade, že je tento výraz kladný
- obidve $\alpha_{1,2}$ sú reálne čísla $\gamma^2 - 4mk > 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\gamma^2 - 4mk}$ je reálne číslo
- obidve $\alpha_{1,2}$ sú záporné $\gamma^2 - 4mk < \gamma^2 \quad \Rightarrow \quad -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4mk} < 0$
- všeobecné riešenie: superpozícia dvoch klesajúcich exponenciál
  (nijaké kmitanie resp. maximálne jeden prekmit,
  inak len doplazenie sa do nuly)
  prečo je to tak? ukážte na grafe alebo inak

nepríliš veľký odpor $\gamma^2 < 4mk$

- $\alpha_{1,2}$ sú komplexné čísla $\quad \alpha_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm i\frac{\sqrt{4mk-\gamma^2}}{2m} = -\frac{\gamma}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2}$
- rozumné označenia $\quad \beta = \frac{\gamma}{2m} \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$
- pričom $\quad \omega_0 = \sqrt{k/m}$ je uhlová frekvencia netlmeného LHO
- všeobecné riešenie: $\quad x(t) = c_1 e^{-\beta t} e^{i\omega t} + c_2 e^{-\beta t} e^{-i\omega t}$
- a tak ako minule: $\quad x(t) = e^{-\beta t}\left(C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t\right) = a\, e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$

tlmené kmity: $x(t) = a\, e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$

- sú pomalšie (majú nižšiu frekvenciu) ako príslušné netlmené kmity
- amplitúda kmitov s rastúcim časom exponenciálne klesá
- konštanty C_1, C_2 respektíve a, φ sa určia z počiatočných podmienok (urobte to)
- nepovinná užitočná domáca úloha: nakresliť graf závislosti $x(t)$ a $v(t)$



$m = 1 \quad k = 1 \quad \gamma = 0.1 \quad x_0 = 1 \quad v_0 = 0$

čo vieme nahliadnuť aj bez riešenia rovnice

- pri LHO sme aj bez explicitného riešenia pohybovej rovnice vedeli nahliadnuť, že riešenie bude periodické a grafom bude nejaký typ vlnovky
- teraz podobne nahliadneme kmitanie s klesajúcou amplitúdou
- znova nech je počiatočná poloha x_0 a počiatočná rýchlosť nulová (takže pri nulovom odpore prostredia by sa oscilátor dostal až do polohy $-x_0$)
- odpor pôsobí stále proti rýchlosti, takže rýchlosť je celý čas menšia ako bez odporu, čiže oscilátor prejde kratšiu dráhu, čiže sa nedostane až do bodu $-x_0$
- po jednej perióde (ak vôbec prekmitne) sa oscilátor nevráti späť do polohy x_0 (jeho výchylka je menšia) a takto to pokračuje aj ďalej – amplitúda kmitov klesá

LHO s (co)sínusovou vynucujúcou silou

- ako druhé významné rozšírenie jednoduchého LHO budeme uvažovať LHO bez odporu prostredia, ale s ďalšou pôsobiacou silou $F\cos\Omega t$ (F je amplitúda, Ω uhlová frekvencia tej sily) (nepovinná užitočná DÚ: to isté pre silu $F\sin\Omega t$)
- prečo sú takéto sily dôležité, to si povieme v nasledujúcej prednáške
- pohybová rovnica: $m\ddot{x}(t) = -kx(t) + F\cos\Omega t$ resp. $m\ddot{x}(t) + kx(t) = F\cos\Omega t$
- lineárna dif. rovnica s konštantnými koeficientami, s nenulovou pravou stranou
- všeobecné riešenie rovnice s nulovou pravou stranou poznáme (LHO z minulej prednášky), takže nám stačí nájsť už len hocijaké jedno partikulárne riešenie rovnice s nenulovou pravou stranou

pokračovanie riešenia

- skúsme uhádnuť nejaké riešenie rovnice $m\ddot{x}(t) + kx(t) = F\cos\Omega t$
- zjavne dobrý nápad je nejaký násobok funkcie $\cos\Omega t$, čiže: $x_p(t) = A\cos\Omega t$
  (ak ste ten nápad nemali, nevadí – aj tak ho poďme preskúmať, oplatí sa)
- dosadíme: $-m\,A\,\Omega^2\cos\Omega t + k\,A\cos\Omega t = F\cos\Omega t$
  dostávame: $\left(-m\,A\,\Omega^2 + k\,A - F\right)\cos\Omega t = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \dfrac{F}{k - m\Omega^2} = \dfrac{F}{m}\,\dfrac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2}$
- partikulárne riešenie: $x_p(t) = \dfrac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2}\,\dfrac{F}{m}\,\cos\Omega t$
- všeobecné riešenie: $x(t) = \dfrac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2}\,\dfrac{F}{m}\,\cos\Omega t \;+\; a\cos(\omega_0 t + \varphi)$

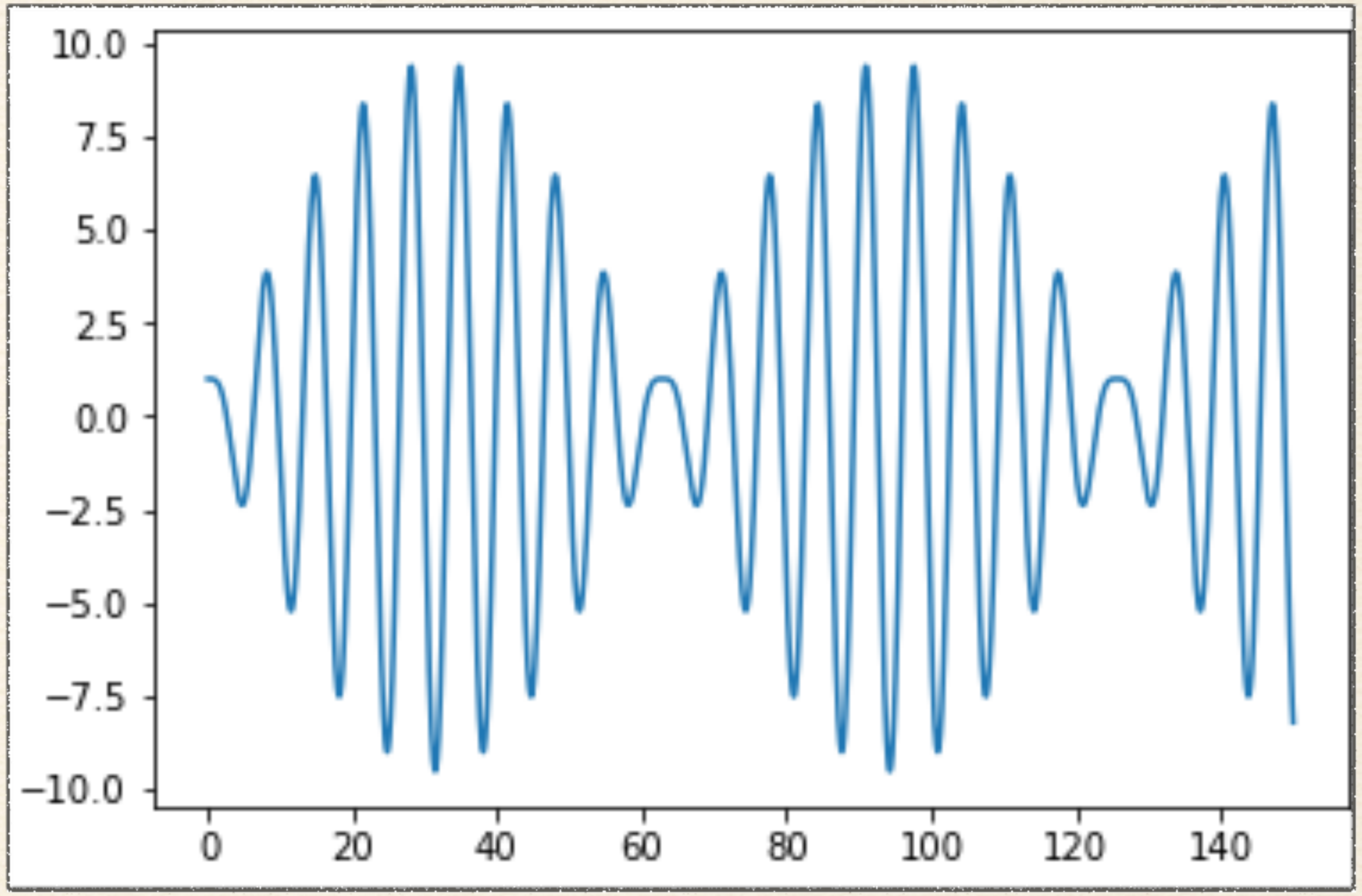
vynútené kmity: $x(t) = A\cos\Omega t \ + \ a\cos(\omega_0 t + \varphi)$

- pohyb je súčtom dvoch kmitaní

- jedno s frekvenciou ω_0 a amplitúdou a danou počiatočnými podmienkami (tomuto hovoríme vlastné kmity)

- druhé s frekvenciou Ω a amplitúdou $A = \frac{F}{m}\,\frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2}$ (tzv. vynútené kmity)

- nepovinná užitočná domáca úloha: nakresliť graf závislosti $x(t)$ a $v(t)$ pre rôzne hodnoty parametrov



$m = 1 \quad k = 1 \quad F = 1 \quad \Omega = 0.9 \quad x_0 = 1 \quad v_0 = 0$

rezonancia

- pre $\Omega \to \omega_0$ rastie amplitúda kmitov $\frac{F}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2}$ nad všetky medze
- prudkému rozkmitaniu oscilátora pre $\Omega \to \omega_0$ sa hovorí <u>rezonancia</u>
- rezonanciu dosiahneme aj malou amplitúdou F s vhodnou frekvenciou Ω
- riešenie sa nedá brať vážne pre príliš veľké kmity (až nekonečné pre $\Omega = \omega_0$) pre príliš veľké výchylky totiž prestane platiť priblíženie $F(x) \approx -kx$ a teda prestane platiť rovnica, ktorú riešime
- <u>realistickejší opis rezonancie</u>: tlmené kmity s (co)sínusovou vynucujúcou silou

kvalitatívne porozumenie rezonancii

- znova nech je počiatočná poloha x_0 a počiatočná rýchlosť nulová
- vynucujúca sila nech je $F\cos\Omega t$, pričom F nech má opačné znamienko ako x_0 a Ω nech je rovnaká ako perióda vlastných kmitov oscilátora
- počas prvej polovice periódy pôsobí sila v tom istom smere ako rýchlosť, čiže oscilátor prejde väčšiu vzdialenosť ako by prešiel bez vynucujúcej sily (dostane sa ďalej ako po $-x_0$)
- potom sa to otočí (smer pohybu aj rýchlosti) a znova pôsobí sila v smere rýchlosti, znova ide o pohyb vyššími rýchlosťami ako bez vynucujúcej sily (dostane sa ďalej ako po x_0 a amplitúda postupne stále viac a viac narastá)

tlmený LHO s (co)sínusovou vynucujúcou silou

- pohybová rovnica: $m\ddot{x}(t) = -kx(t) - \gamma\dot{x}(t) + F\cos\Omega t$
  respektíve $m\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + kx(t) = F\cos\Omega t$

- opäť lineárna diferenciálna rovnica s konštantnými koeficientami a s nenulovou pravou stranou

- všeobecné riešenie rovnice s nulovou pravou stranou opäť už poznáme (tlmený LHO), takže nám stačí nájsť už len jedno (hocijaké) partikulárne riešenie rovnice s nenulovou pravou stranou

- skúste uhádnuť nejaké partikulárne riešenie

pokračovanie riešenia

- máme uhádnuť nejaké riešenie rovnice $m\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + kx(t) = F\cos\Omega t$
- nápad $A\cos\Omega t$ celkom nefunguje (pretože z neho vznikne aj $-A\gamma\Omega\sin\Omega t$)
- tak skúsme $A'\cos\Omega t + B'\sin\Omega t$
- dosadením dostaneme na ľavej strane (písmen je veľa, ale postup je jasný):
  $-m\,\Omega^2\,(A'\cos\Omega t + B'\sin\Omega t) - \gamma\,\Omega(A'\sin\Omega t - B'\cos\Omega t) + k\,(A'\cos\Omega t + B'\sin\Omega t)$
- čiže naša rovnica vyzerá takto:
  $\left(-m\,\Omega^2 A' + \gamma\,\Omega\,B' + k\,A' - F\right)\cos\Omega t + \left(-m\,\Omega^2 B' - \gamma\,\Omega\,A' + k\,B'\right)\sin\Omega t = 0$

dokončenie riešenia

- superpozícia sínusu a cosínusu je nulová len ak sú nulové koeficienty, takže

$$-m\,\Omega^2 A' + \gamma\,\Omega\,B' + k\,A' = F$$

$$-m\,\Omega^2 B' - \gamma\,\Omega\,A' + k\,B' = 0$$

- 2 rovnice o 2 neznámych – vyriešime, aj keď sa nám nechce (priveľa písmen):

$$A' = \frac{F}{m}\;\frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\,\Omega/m)^2} \qquad B' = \frac{F}{m}\;\frac{\gamma\,\Omega/m}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\,\Omega/m)^2}$$

prehľadnejší zápis

- $A' \cos \Omega t + B' \sin \Omega t = A \cos(\Omega t + \Phi)$ kde $A = \sqrt{A'^2 + B'^2}$ $\tan \Phi = -B'/A'$

- partikulárne riešenie:

  $x_p(t) = A \cos(\Omega t + \Phi)$ $\boxed{A = \dfrac{F/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\,\Omega/m)^2}}}$ $\Phi = \arctan \dfrac{-\gamma\,\Omega/m}{\omega_0^2 - \Omega^2}$

- všeobecné riešenie: $x(t) = A \cos(\Omega t + \Phi) + a\,e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$
  pričom konštanty a a φ sa určia z počiatočných podmienok

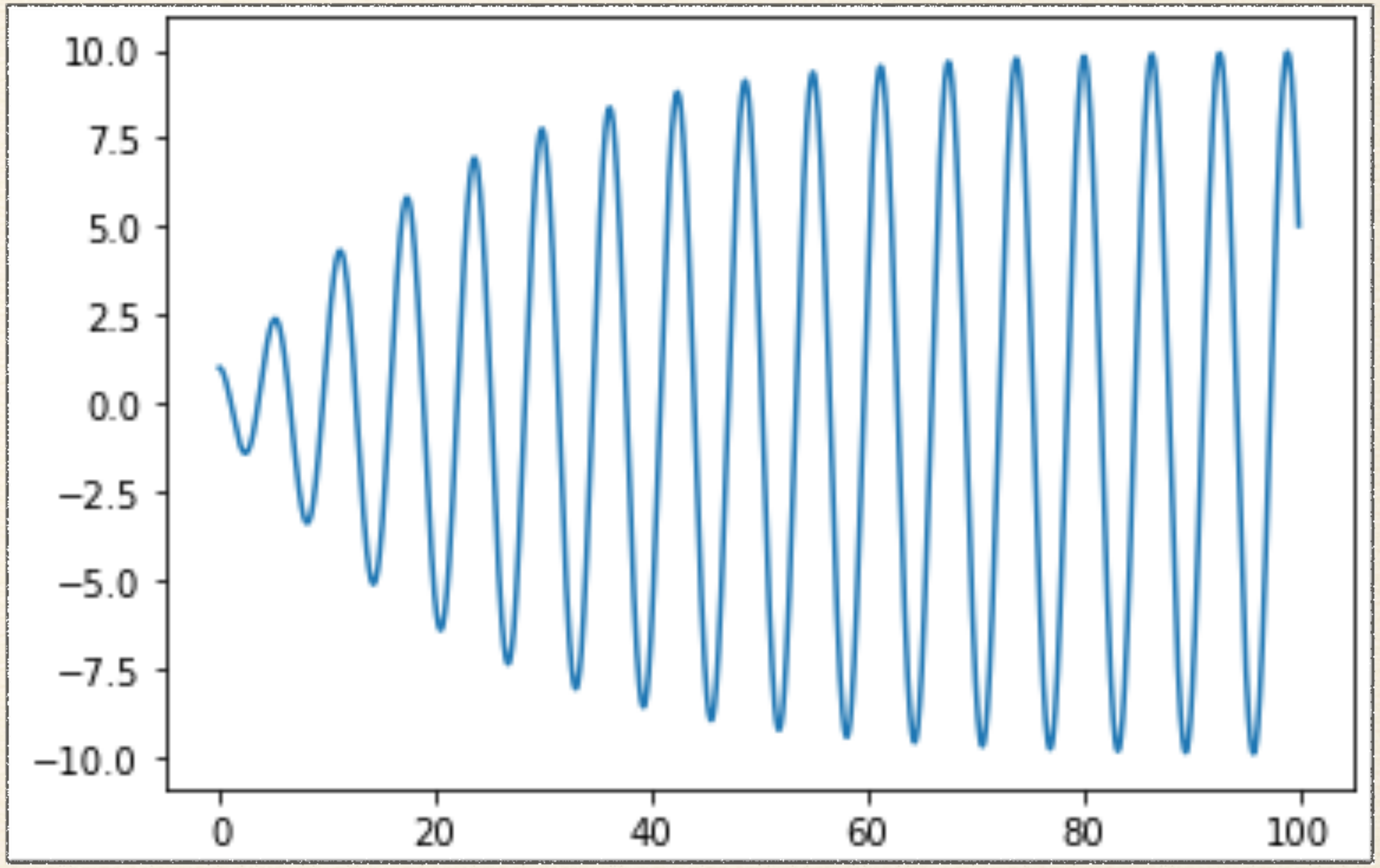
- vlastné kmity s rastúcim časom exponenciálne zanikajú, vynútené zostávajú

- rezonancia: veľké (ale nie nekonečné) kmity pre určitý interval frekvencií Ω

rezonancia v prípade tlmených kmitov

- nepovinná užitočná domáca úloha: zistite, pre aké Ω je A maximálne (ak ste sa to už niekde učili, urobte to celé poriadne pomocou derivácie funkcie $A(\Omega)$; ak to ešte nepoznáte, tak aspoň odhadnite toto maximum voľným okom z grafu funkcie $A(\Omega)$)

- nepovinná užitočná domáca úloha: nakresliť graf závislosti $x(t)$ a $v(t)$ pre rôzne hodnoty parametrov



$m = 1 \quad k = 1 \quad \gamma = 0.1 \quad F = 1 \quad \Omega = 1 \quad x_0 = 1 \quad v_0 = 0$

dobrá rezonancia

Pomocou rezonancie môžeme dosiahnuť výrazné výchylky aj pôsobením pomerne malej sily, čo vie byť niekedy užitočné (napríklad pri hojdačke alebo pri rozozvučaní hudobných nástrojov).

Rovnice opisujúce LHO sa vyskytujú nielen v mechanike, ale aj v iných oblastiach fyziky (napríklad v elektronike). Rovnaké rovnice majú rovnaké riešenia, vrátane rezonancie, ktorú môžeme využiť napríklad na zosilňovanie slabých signálov.

zlá rezonancia

Väčšinou nechceme pomocou rezonancie príliš rozkmitať budovu alebo most, ale môže sa to stať (napríklad ak by vojenská jednotka pochodovala cez most – práve preto je to zakázané).

No dobre, ale čo má spoločné jeden jednoduchý oscilátor s mostom a kto kedy videl vojakov pochodovať sínusovým alebo cosínusovým krokom? Týmto otázkam bude venovaná nasledujúca prednáška (ktorou oscilátory uzavrieme).

pár slov ku komplexným číslam

- podobne ako mnoho iných vecí, aj partikulárne riešenie pre tlmený LHO s (co)sínusovou vynucujúcou silou sa ľahšie hľadá v komplexných číslach, t.j. pre rovnicu s vynucujúcou silou $Fe^{i\Omega t}$ (a naraz tým vybavíme sínus aj cosínus, ktoré predstavujú reálnu a imaginárnu časť)
- partikulárne riešenie rovnice $m\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + kx(t) = Fe^{i\Omega t}$ sa uhádne ľahko
- skúsme $x_p(t) = \mathscr{A}e^{i\Omega t}$, dosaďme a dostaneme $\mathscr{A} = \dfrac{F}{k - m\Omega^2 + i\gamma\Omega}$
- reálne riešenia dostaneme z tohto komplexného riešenia celkom jednoducho, stačí vynásobiť čitateľa aj menovateľa výrazom $k - m\Omega^2 - i\gamma\Omega$

nelineárny oscilátor na záver

- teliesko na špagátiku nie je LHO (hoci pri malých kmitoch sa naň podobá)
- pohybová rovnica takého telieska vyzerá nasledovne: $l\ddot{\varphi} = -g \sin \varphi$ (kde φ je uhol) a túto nelineárnu dif. rovnicu nevieme exaktne vyriešiť
- napriek tomu vieme o jej riešení povedať veľa dôležitých vecí: napríklad, že je periodické, že grafom závislosti výchylky od času je vlnovka, že pri odpore prostredia amplitúda kmitov postupne klesá a že za vhodných podmienok dochádza k rezonancii (toto sme vedeli povedať aj o LHO, a to aj bez riešenia pohybových rovníc)
- argumenty sú presne rovnaké ako boli v prípade LHO ale v tomto prípade sú cennejšie (práve preto, že presné riešenie nepoznáme)