Trojrozmerný svet

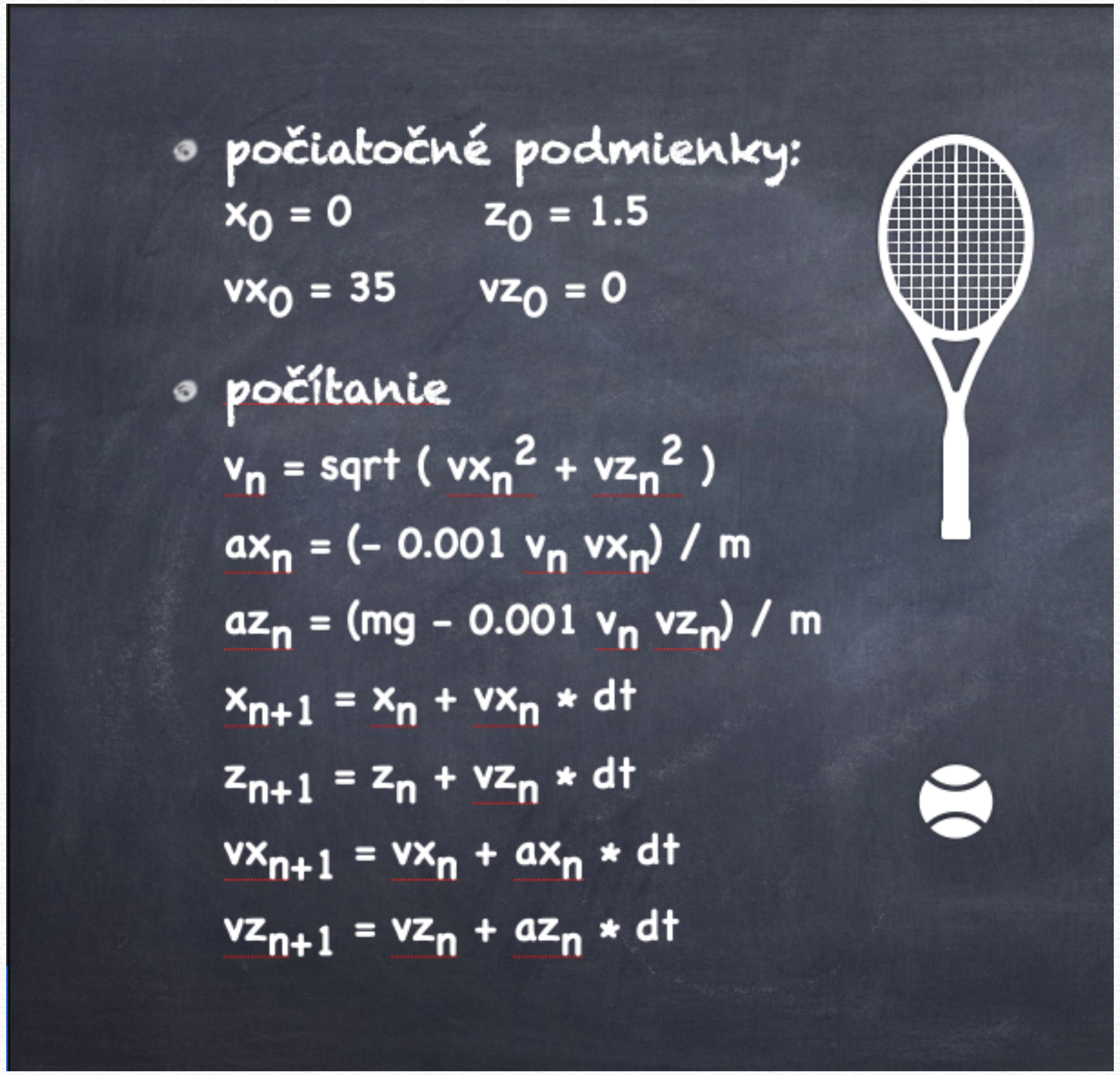
pohybová rovnica a jej riešenie v 3D

mechanika 17

čo sme sa naučili doteraz I

v prvej časti sme sa naučili najmä toto:

- chápať zákon sily $\vec{F} = m\vec{a}$ ako pohybovú rovnicu, ktorej riešením vieme zistiť, ako vyzerá pohyb telesa (ak poznáme sily)
- poznať sily, ktoré na telesá pôsobia v bežných situáciách – gravitačnú, elektromagnetickú a jej prejavy (trenie, odpor prostredia, pružnosť)
- riešiť pohybovú rovnicu v 1, 2 či 3D univerzálnou (aj keď len približnou) metódou “krok za krokom”



čo sme sa naučili doteraz II

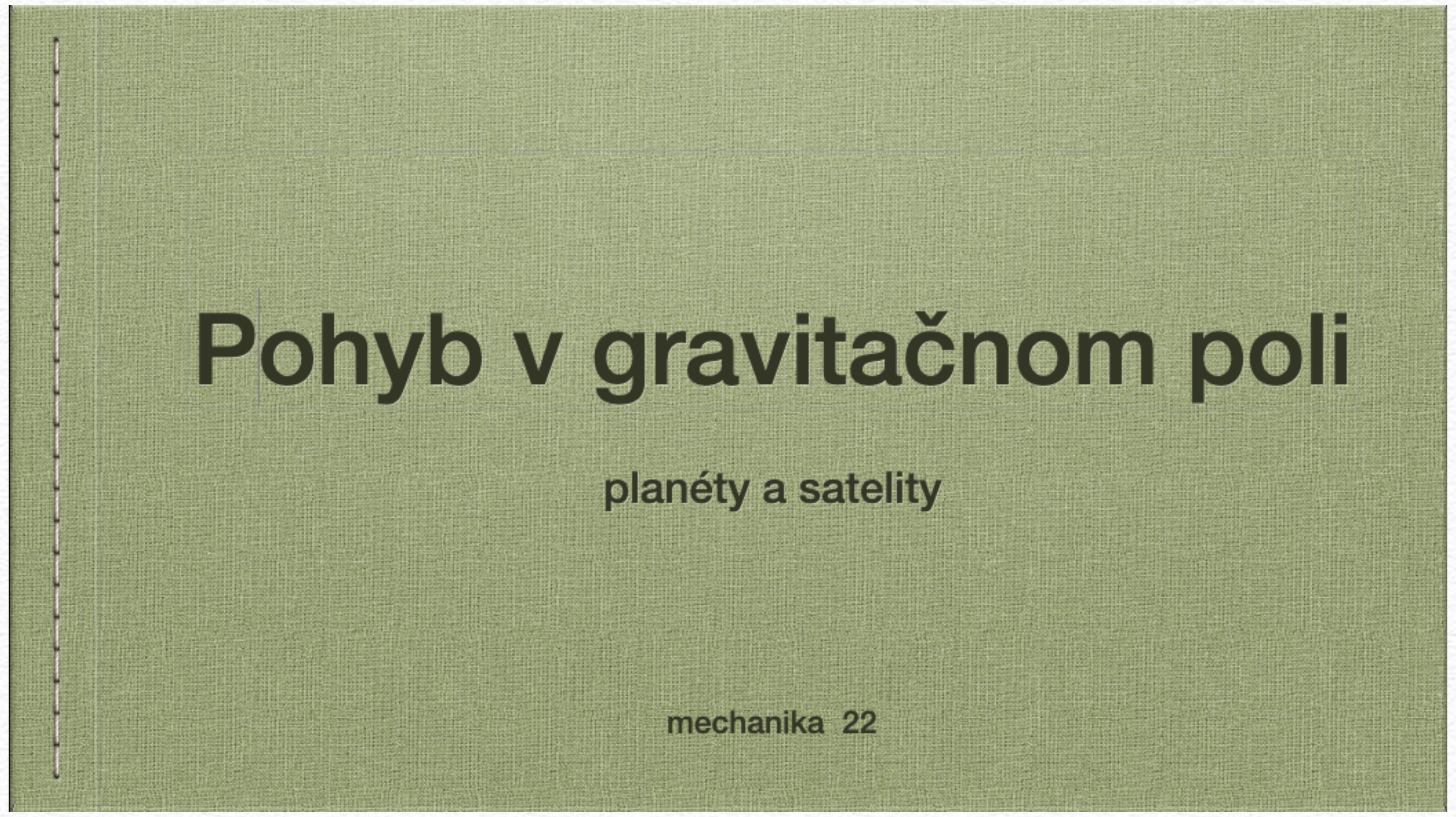
v druhej časti najmä toto:

- chápať pohybovú rovnicu v jednom rozmere ako diferenciálnu rovnicu $m\ddot{x}(t) = F(x(t), \dot{x}(t), t)$
- riešiť (aj keď niekedy len uhádnutím a overením) jeden veľmi dôležitý typ diferenciálnych rovníc (lineárne s konštantnými koeficientami)
- riešiť a rozumieť riešeniam pohybovej rovnice v jednom mimoriadne dôležitom konkrétnom prípade (lineárny harmonický oscilátor, a to aj s tlmením a nejakou vynucujúcou silou)

čo sa chceme naučiť teraz

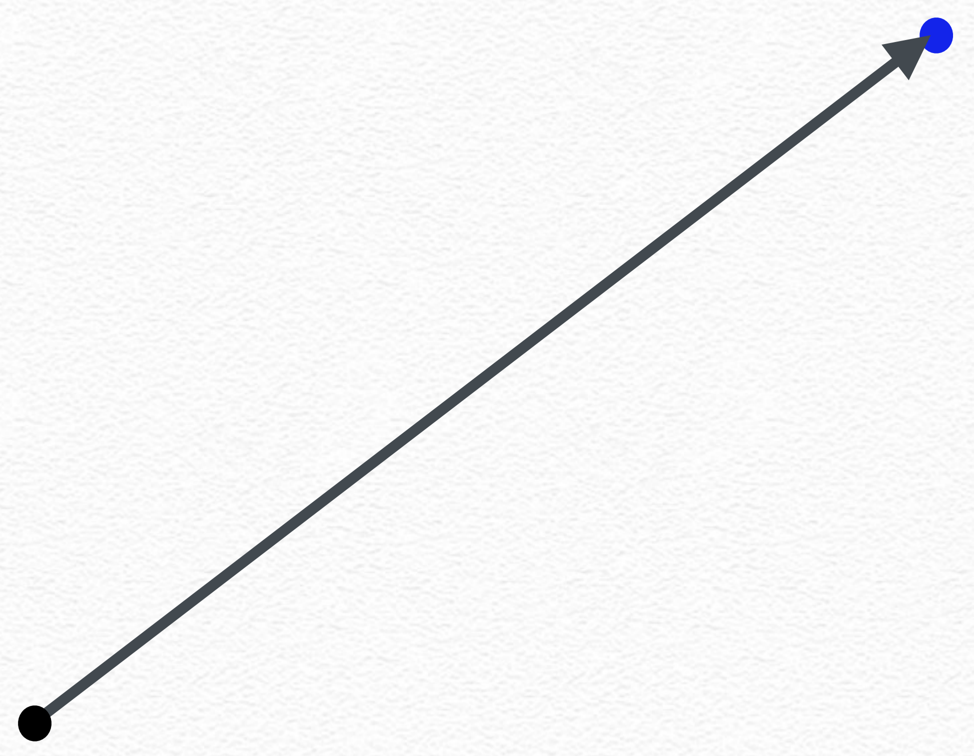
v tretej časti najmä toto:

- diferenciálne rovnice vieme zatiaľ riešiť
  a) všetky v ľubovoľnom počte rozmerov približne
  b) niektoré v jednom rozmere presne
- teraz sa chceme naučiť riešiť aspoň niektoré rovnice presne aj vo vyššom počte rozmerov
- okrem toho sa naučíme niektoré užitočné triky, pomocou ktorých sa dá dozvedieť veľa vecí aj bez explicitného riešenia rovníc (tieto triky potom použijeme na porozumenie planetárnemu pohybu)



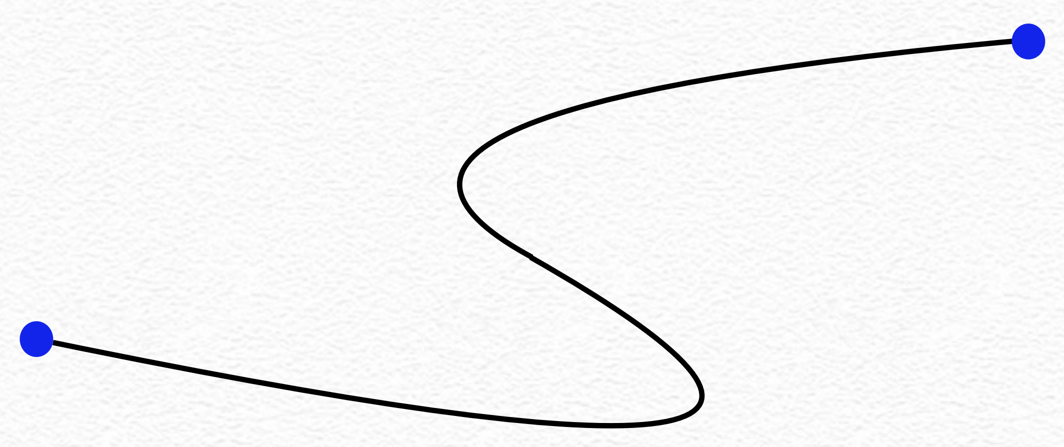
poloha bodu v troch rozmeroch

- ak mám na mysli nejaký bod v 3D priestore, jeho polohu oznámim ostatným tak, že naň ukážem: “tu” (toto je ten bod)

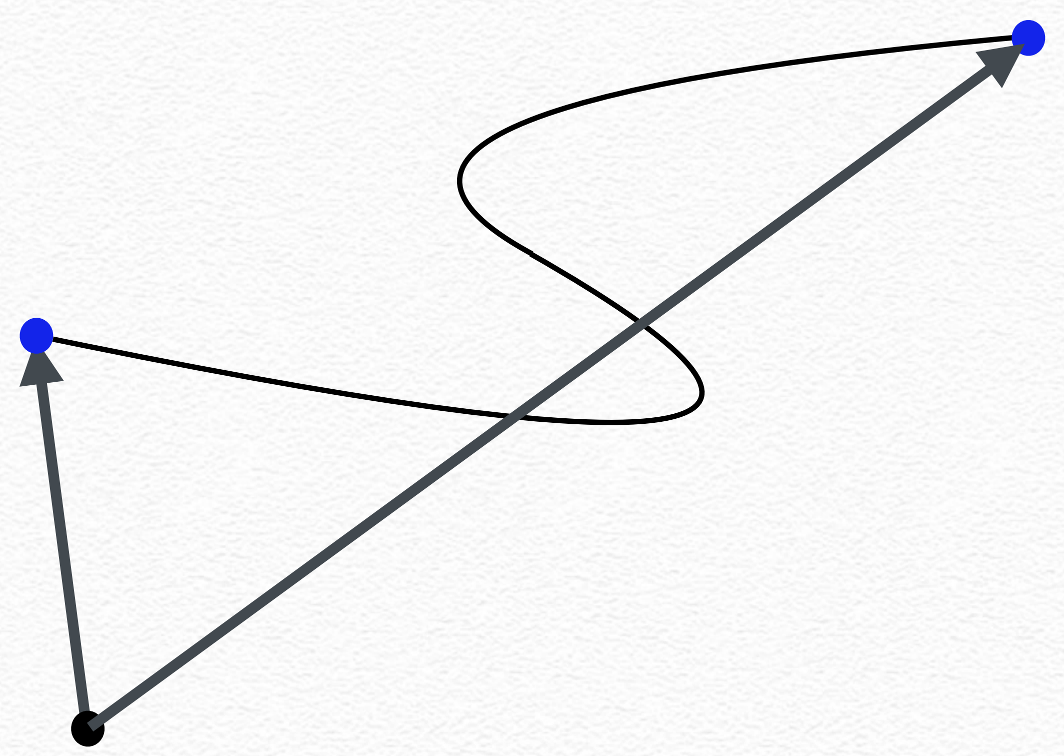


- ak je to ďaleko, tak ukážem: je to “týmto smerom” a k tomu ešte musím povedať “ako ďaleko” (šípka tým smerom a s tou veľkosťou sa volá <u>polohový vektor</u> daného bodu)

pohyb bodu v troch rozmeroch

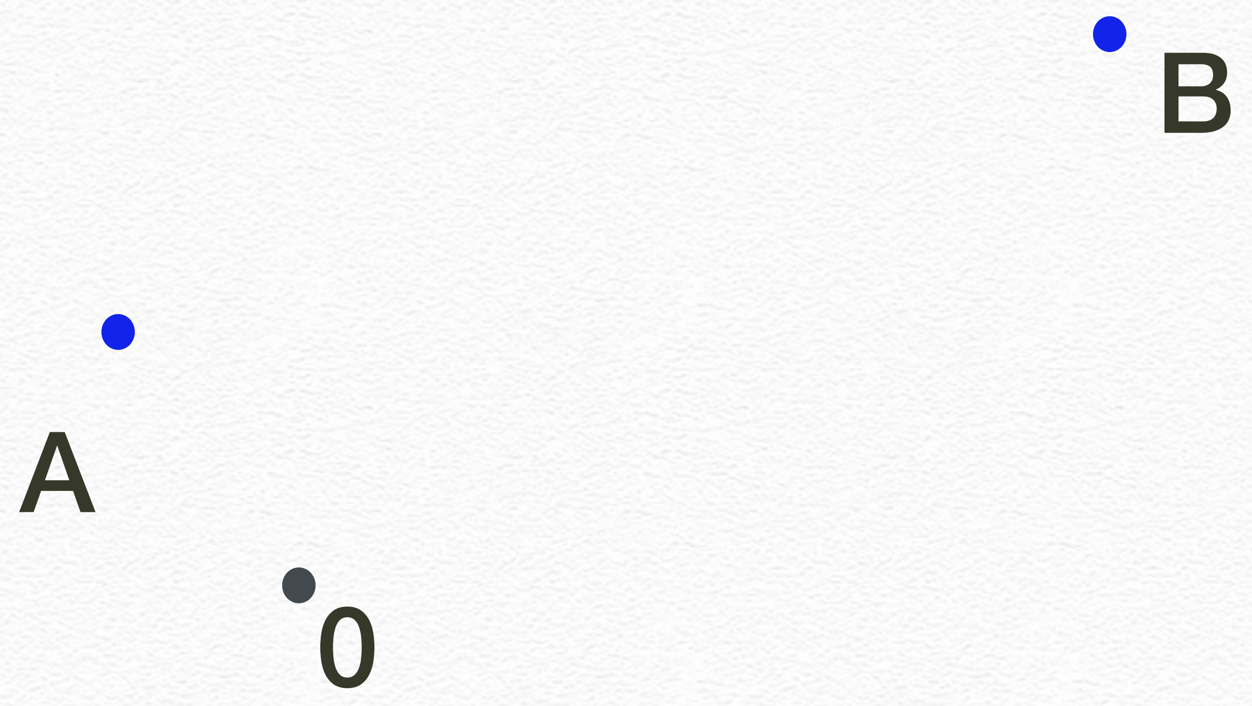


- pohyb bodu je opísaný jeho polohou v rôznych časoch, čiže funkciou $B(t)$ (pod tým B rozumieme v čase sa meniace "tu" pohybujúceho sa bodu)

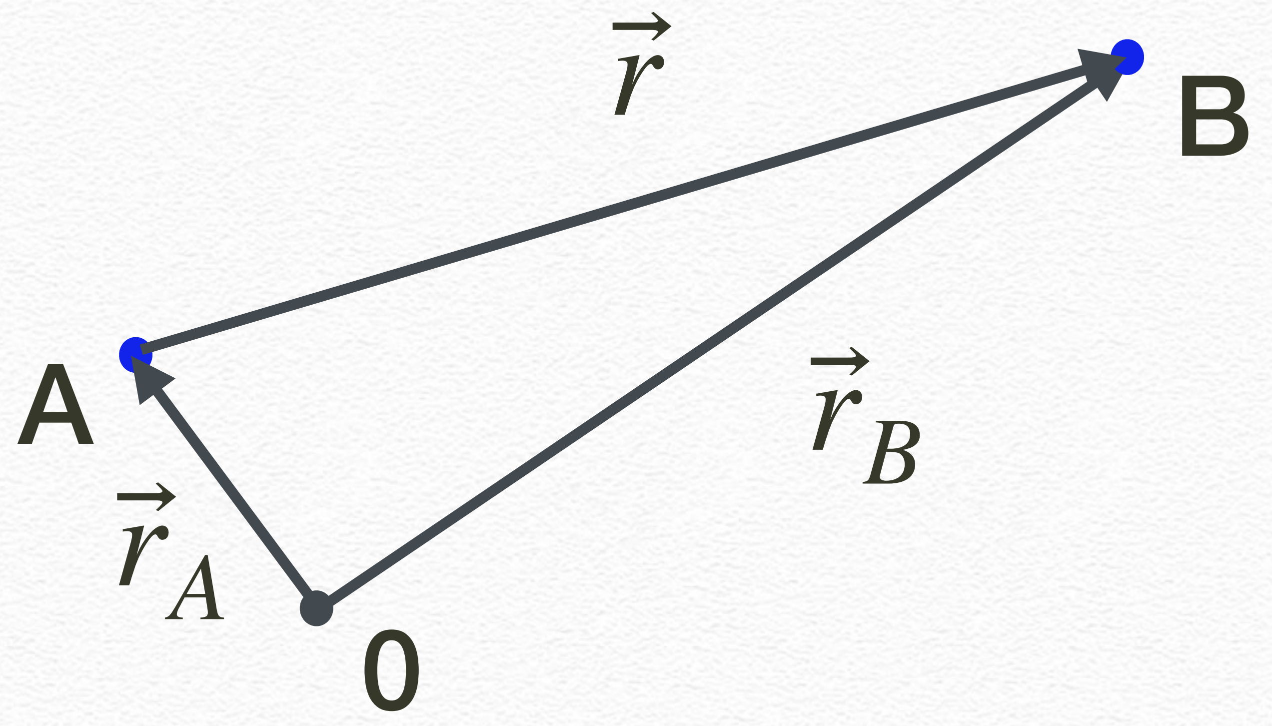


- iný možný opis toho istého pohybu nám dáva závislosť polohového vektora daného bodu od času $\vec{r}(t)$ (my budeme používať tento opis)

súčet a rozdiel polohových vektorov

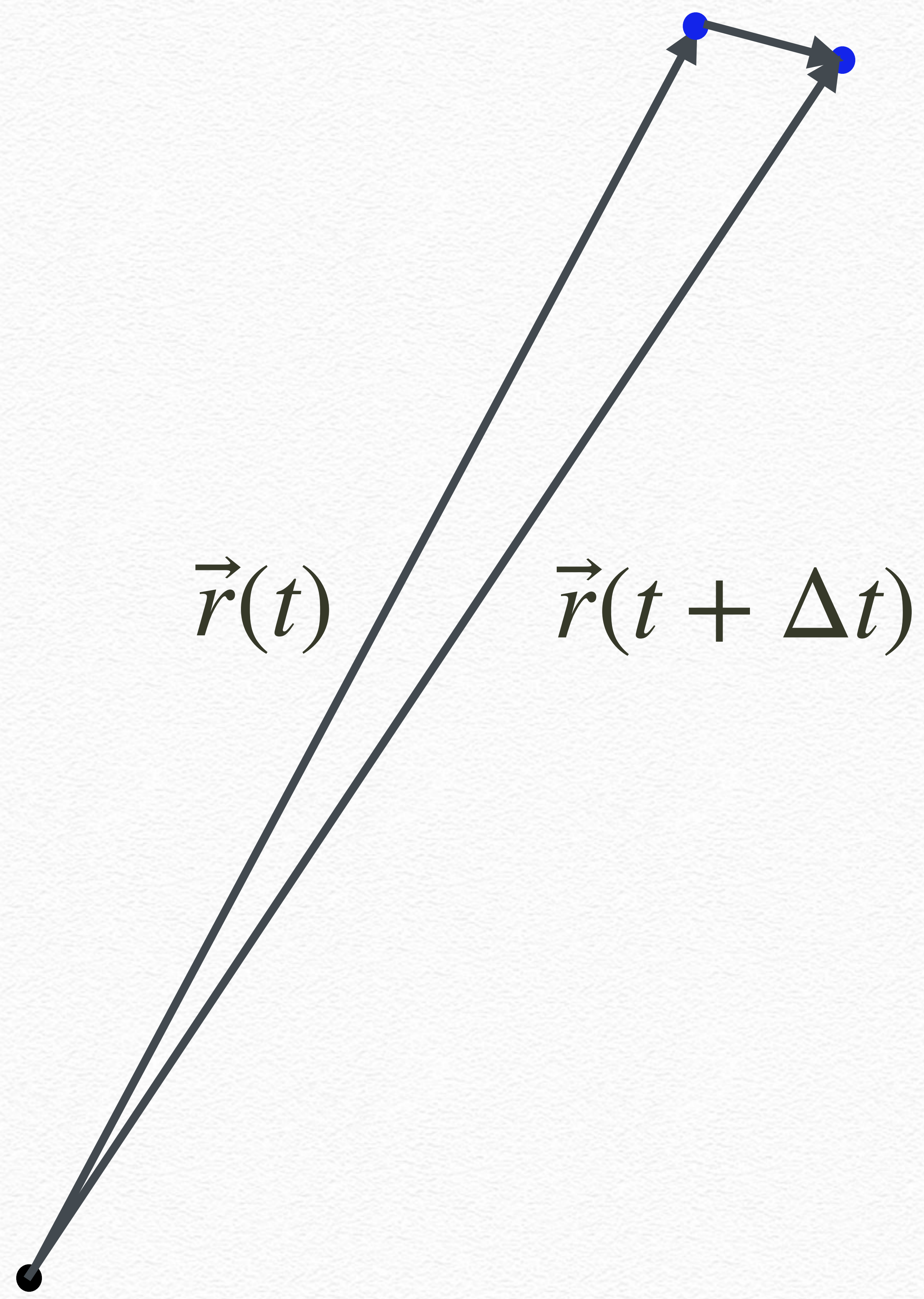


- body v priestore nevieme sčítavať, nemáme nijakú prirodzenú definíciu súčtu bodov v priestore: $A + B = ?$



- vektory (šípky) vieme sčítavať, t. j. existuje celkom prirodzená definícia súčtu (a teda aj rozdielu) vektorov $\vec{r}_A + \vec{r} = \vec{r}_B$ resp. $\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

rýchlosť v troch rozmeroch

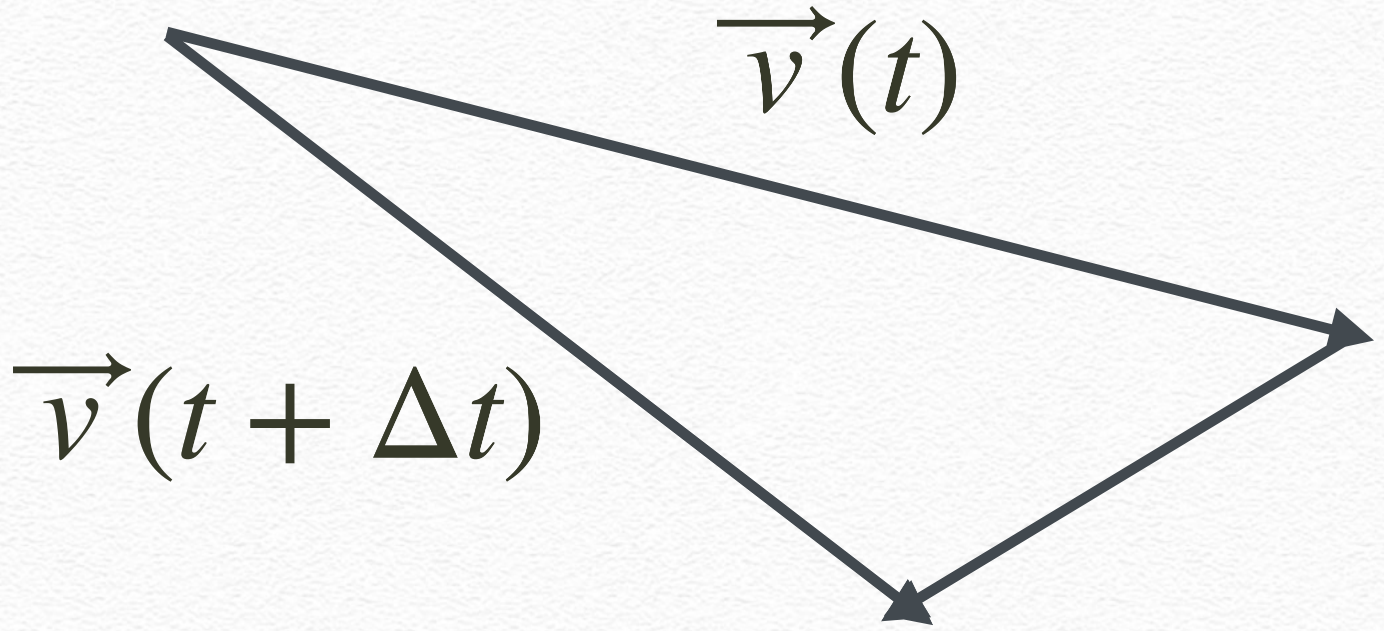


- priamočiare zovšeobecnenie jednorozmerného prípadu:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

- smer rýchlosti môže byť zjavne úplne iný, ako smer polohového vektora

zrýchlenie v troch rozmeroch



- rýchlosť zmeny rýchlosti
(tak, ako v jednom rozmere)

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

- zrýchlenie je nenulové aj vtedy, keď sa veľkosť rýchlosti nemení, ale mení sa jej smer

Newtonova pohybová rovnica v 3D

$$m\,.\,\ddot{\vec{r}}(t) = \overrightarrow{F}\left(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t\right)$$

- je to vektorová rovnica, v ktorej je neznámou šípka (vektor), ktorá je funkciou času
- pre praktické riešenie je často najvýhodnejšie napísať túto rovnicu v súradniciach, ako tri rovnice pre tri súradnice
- pritom je ale dobré si uvedomiť, že rovnica samotná platí ako rovnica pre šípky, nielen pre ich súradnice

elementárny príklad: šikmý vrh

- pôsobiaca sila:
  $\overrightarrow{F} = m\,.\,\overrightarrow{g}$
- pohybová rovnica:
  $m\,.\,\ddot{\vec{r}}(t) = m\,.\,\overrightarrow{g}$
- riešenie:
  $\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\overrightarrow{g}\,t^2 + \overrightarrow{v}_0\,t + \vec{r}_0$
  dôkaz: výpočet druhej deriv.

- v súradniciach:
  $F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = -mg$
- pohybová rovnica:
  $\ddot{x}(t) = 0, \; \ddot{y}(t) = 0, \; \ddot{z}(t) = -g$
- riešenie:
  vyšla nám sústava nezávislých a ľahkých rovníc, ktorú musí každý vedieť vyriešiť samostatne

nevýhoda elementárneho príkladu

- utvrdzuje začiatočníkov v jednej prirodzenej a bežnej chybe

- no schválne, či ju urobíte: prepíšte pohybovú rovnicu $m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)$ do kartézskych súradníc

- x-ová zložka $m\ddot{x}(t) = F_x(x(t), \dot{x}(t), t)$ a ostatné podobne

TOTO JE ZLE

správny prepis do súradníc

ak niečo závisí od vektora, tak to vo všeobecnosti závisí
od všetkých jeho zložiek, nie len od jednej z nich

$$m\ddot{x}(t) = F_x\left(x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t), t\right)$$

$$m\ddot{y}(t) = F_y\left(x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t), t\right)$$

$$m\ddot{z}(t) = F_z\left(x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t), t\right)$$

vo všeobecnosti ide o sústavu navzájom previazaných rovníc

príklad: vrh s odporom prostredia

- pri rýchlostiach bežných pri vrhoch $\vec{F} = m\,\vec{g} - \gamma\, v\, \vec{v}$
- čiže $F_x = -\gamma \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\; v_x$ a podobne pre F_y a F_z
- pohybová rovnica v kartézskych súradniciach:

$$m\ddot{x}(t) = -\gamma \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\;\; \dot{x}(t)$$

$$m\ddot{y}(t) = -\gamma \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\;\; \dot{y}(t)$$

$$m\ddot{z}(t) = -mg - \gamma \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\;\; \dot{z}(t)$$

didaktický povzdych

- vrh s odporom prostredia vedie na previazané rovnice, ktoré sú ale nelineárne, a také nevieme presne riešiť
- preto sa v základných kurzoch skoro vždy vynechávajú
- takže človek sa tam často vôbec nestretne s príkladom previazaných rovníc v kartézskych súradniciach
- čo je škoda (lebo si môže odniesť veľmi <u>nesprávny</u> pocit, že nezávislé rovnice v súradniciach sú pravidlo, a nie výnimka)

ešte jeden, ešte hlbší povzdych

- skutočnosť, že pohybové diferenciálne rovnice pre jednotlivé súradnice bývajú navzájom previazané, zostáva často skrytá ešte z iného dôvodu, a tým je pohyb po kružnici
- pohyb po kružnici sa totiž vyskytuje tak často, že je vcelku prirodzené chápať ho nie ako riešenie pohybových rovníc, ale ako čosi zadané a hľadať sily zo zadaného pohybu a nie pohyb zo zadaných síl
- pri takomto prístupe opäť nevidíme previazanosť pohybových rovníc, pretože vôbec nevidíme tie rovnice
my preskúmame pohyb po kružnici aj ako riešenie pohybových rovníc, ale k tomu sa ale musíme niečo naučiť o vektorovom súčine

matematická vsuvka
skalárny a vektorový súčin

dva dôležité súčiny vektorov

skalárny súčin

- každej dvojici vektorov priraďuje číslo rovné súčinu ich veľkostí a cosínusu uhla medzi nimi

$$\vec{a} \,.\, \vec{b} = a\, b\, \cos\theta$$

- skalárny súčin je vlastne súčinom veľkosti jedného vektora a priemetu veľkosti druhého vektora do smeru toho prvého (vidno okamžite, ak si človek nakreslí príslušný obrázok)

vektorový súčin

- každej dvojici vektorov priraďuje vektor kolmý na obidva vektory, ktorého veľkosť je

$$|\,\vec{a} \times \vec{b}\,| = a\, b\, \sin\theta$$

- orientácia vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ je daná takzvaným pravidlom pravej ruky: ak $\vec{a}$ vstupuje do dlane pravej ruky a prsty ukazujú smer $\vec{b}$, potom vztýčený palec ukazuje smer $\vec{a} \times \vec{b}$

prečo sú dôležité

skalárny súčin

- mnohé dôležité fyzikálne veličiny (napríklad práca, ale aj rôzne iné) sú definované skalárnymi súčinmi nejakých vektorov
- v rôznych abstraktnejších lineárnych priestoroch skalárny súčin definuje veľkosti vektorov a uhly medzi nimi:

$$b = \sqrt{\vec{b}\,.\,\vec{b}} \qquad \theta = \arccos \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{a\,b}$$

vektorový súčin

- mnohé dôležité fyzikálne veličiny (napríklad magnetická sila pôsobiaca na pohybujúci sa náboj, ale aj iné) sú vektorovými súčinmi iných vektorov
- v rôznych abstraktnejších lineárnych priestoroch vektorový súčin úzko súvisí s definíciou objemu, ktorá (podobne ako veľkosti a uhly) vôbec nemusí byť taká intuitívne zrejmá, ako je v Euklidovskom priestore

dôležité vlastnosti dôležitých súčinov

skalárny súčin

- je symetrický
  $\overrightarrow{a} \,.\, \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \,.\, \overrightarrow{a}$
- je lineárny
  $\overrightarrow{a} \,.\, \lambda \overrightarrow{b} = \lambda\; \overrightarrow{a} \,.\, \overrightarrow{b}$
  $\overrightarrow{a} \,.\, (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \,.\, \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \,.\, \overrightarrow{c}$
- pre kolmé vektory
  $\overrightarrow{a} \,.\, \overrightarrow{b} = 0$

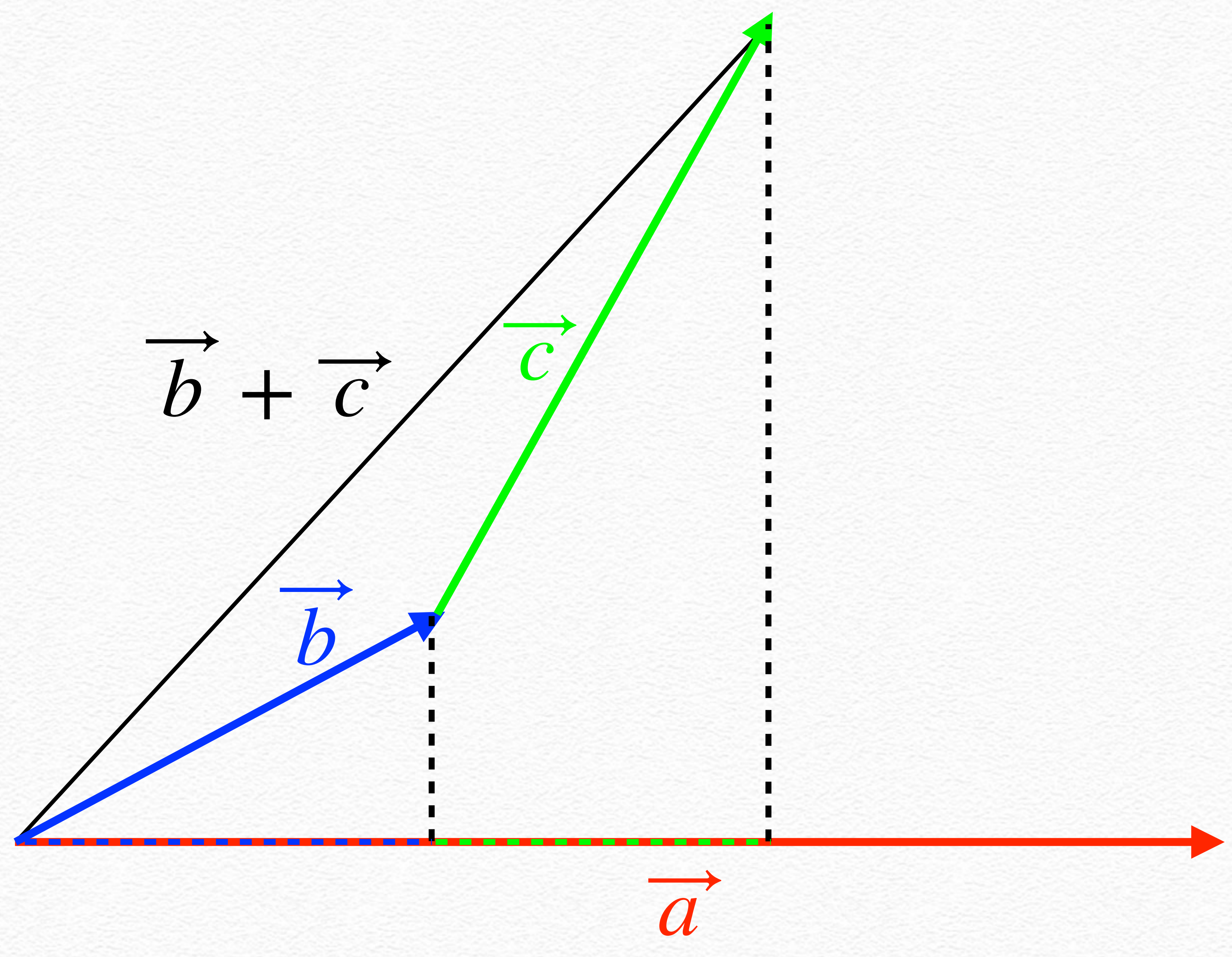
vektorový súčin

- je antisymetrický
  $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = - \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$
- je lineárny
  $\overrightarrow{a} \times \lambda \overrightarrow{b} = \lambda\; \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$
  $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$
- pre rovnobežné vektory
  $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = 0$

dôkaz lineárnosti

skalárny súčin

- multiplikatívna časť triviálna
- aditívna časť jasná z obrázku (obrázok je 2D, ale ide to aj v 3D)

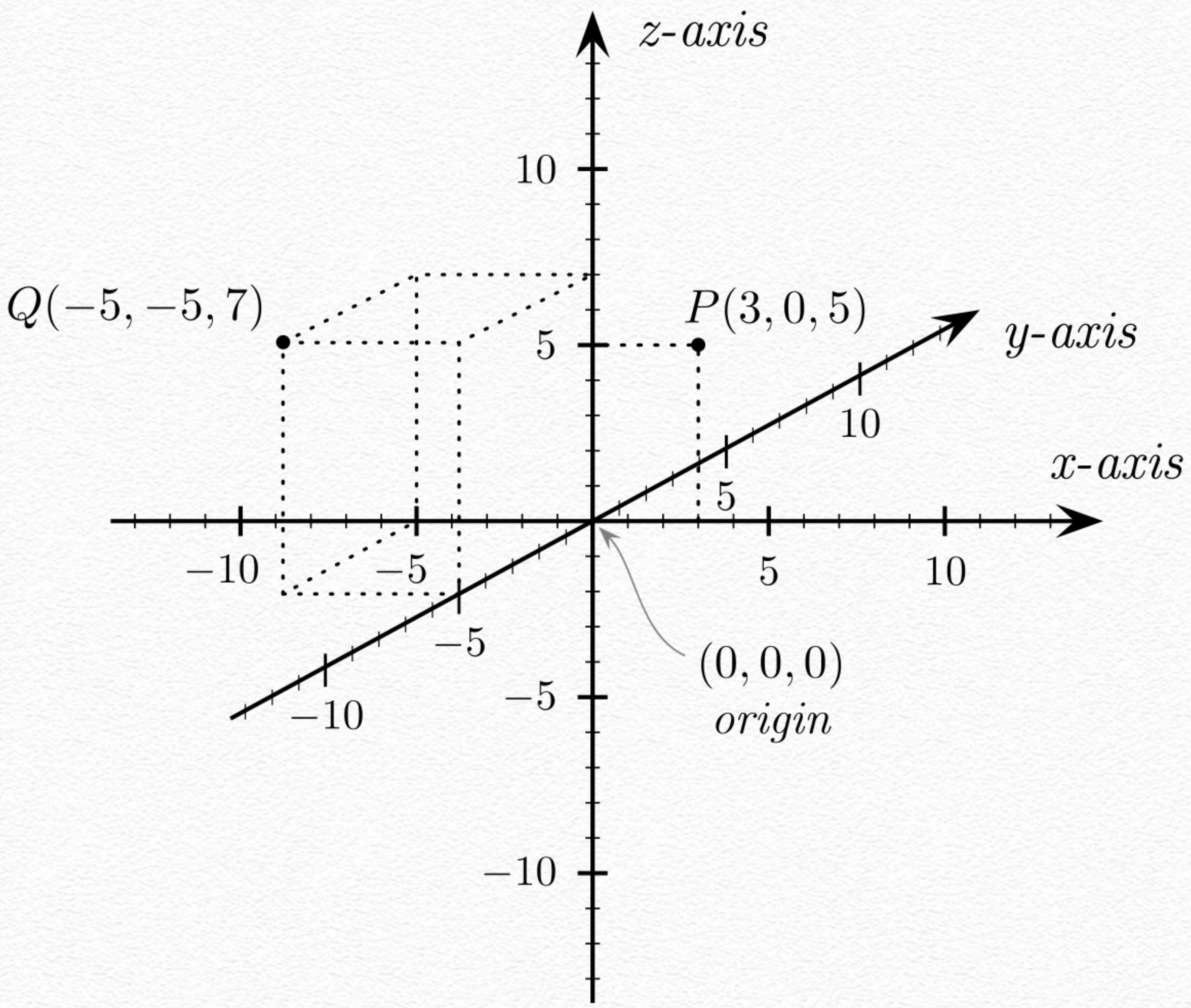


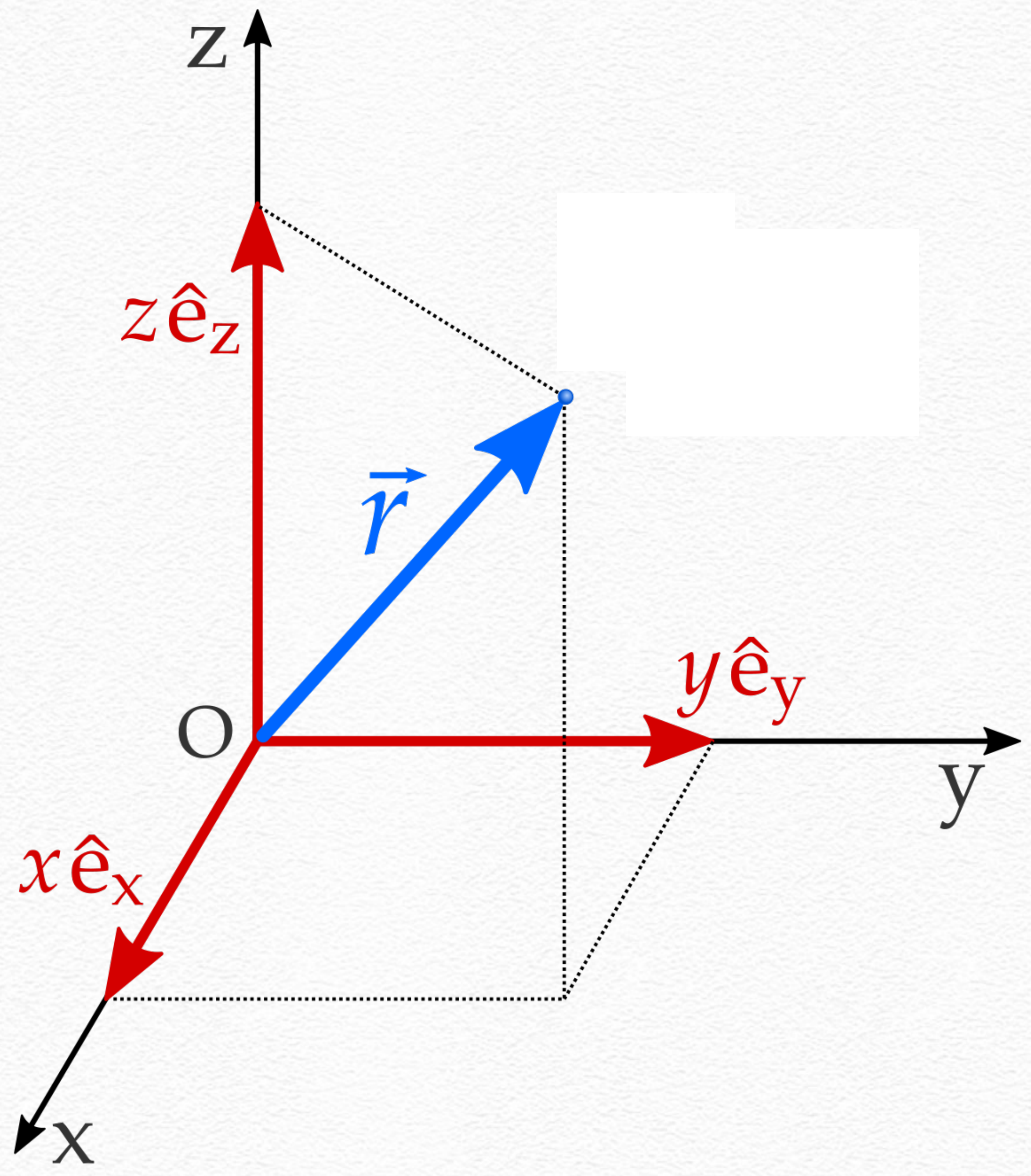
vektorový súčin

- multiplikatívna časť triviálna
- aditívna časť sa dá nahliadnuť takto: súčin $\vec{a} \times \vec{b}$ sa dá chápať ako
  1. premietnutie vektora $\vec{b}$ do roviny kolmej na vektor $\vec{a}$
  2. otočenie tohto priemetu okolo osi danej vektorom $\vec{a}$ o 90° proti smeru chodu hodinových ručičiek
  3. násobenie tohto otočeného priemetu veľkosťou vektora $\vec{a}$

všetky tri body sú (dosť zjavne) lineárne

kartézske súradnice bodu a vektora





súradnice sú dané dĺžkami hrán kvádra, ktorého hrany sú rovnobežné s osami (pre nás tu nebudú nijako dôležité)

súradnice sú dané koeficientmi rozkladu do troch kolmých jednotkových vektorov (takto budeme chápať kartézske súradnice)

skalárny súčin v kart. súradniciach

$$\boxed{\vec{a}\,.\,\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

dôkaz: $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$

$$\vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z$$

a teraz už len využijeme lineárnosť skalárneho súčinu
a ešte to, že vektory $\vec{e}$ sú jednotkové a navzájom kolmé
(na základe čoho si vieme vypočítať ich skalárne súčiny)

vektorový súčin v kart. súradniciach

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{e}_z}$$

dôkaz: $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$

$$\vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z$$

a teraz už len využijeme lineárnosť vektorového súčinu
a ešte to, že vektory $\vec{e}$ sú jednotkové a navzájom kolmé
(na základe čoho si vieme ľahko vypočítať ich vektorové súčiny)

reklama na záver

- nabudúce sa budeme venovať príkladom, ktoré budú jasne ilustrovať previazanosť rovníc v kartézskych súradniciach
- pôjde o pohyb nabitej častice jednak v homogénnom magnetickom poli a jednak súčasne v homogénnom elektrickom aj v homogénnom magnetickom poli
- poznámka: pohybu v nehomogénnych poliach sa nebudeme venovať, pretože ten vedie na rovnice jednak previazané a jednak nelineárne, ktorých matematická zložitosť presahuje úroveň nášho kurzu (ale vždy ich možno riešiť metódou “krok za krokom”)