Pohyb po kružnici

najmä v homogénnom magnetickom poli

mechanika 18

príklady pohybov v 3D

minulá prednáška

- prirodzený príklad pohybovej rovnice, ktorá sa po rozpísaní do kart. súradníc javila ako tri nezávislé 1D rovnice (išlo o šikmý vrh, riešenie sme poznali)
- nevýhodou tohto príkladu je, že mnoho začiatočníkov môže dosť ľahko utvrdiť v mylnej predstave, že nezávislé 1D rovnice dostaneme vždy

táto prednáška

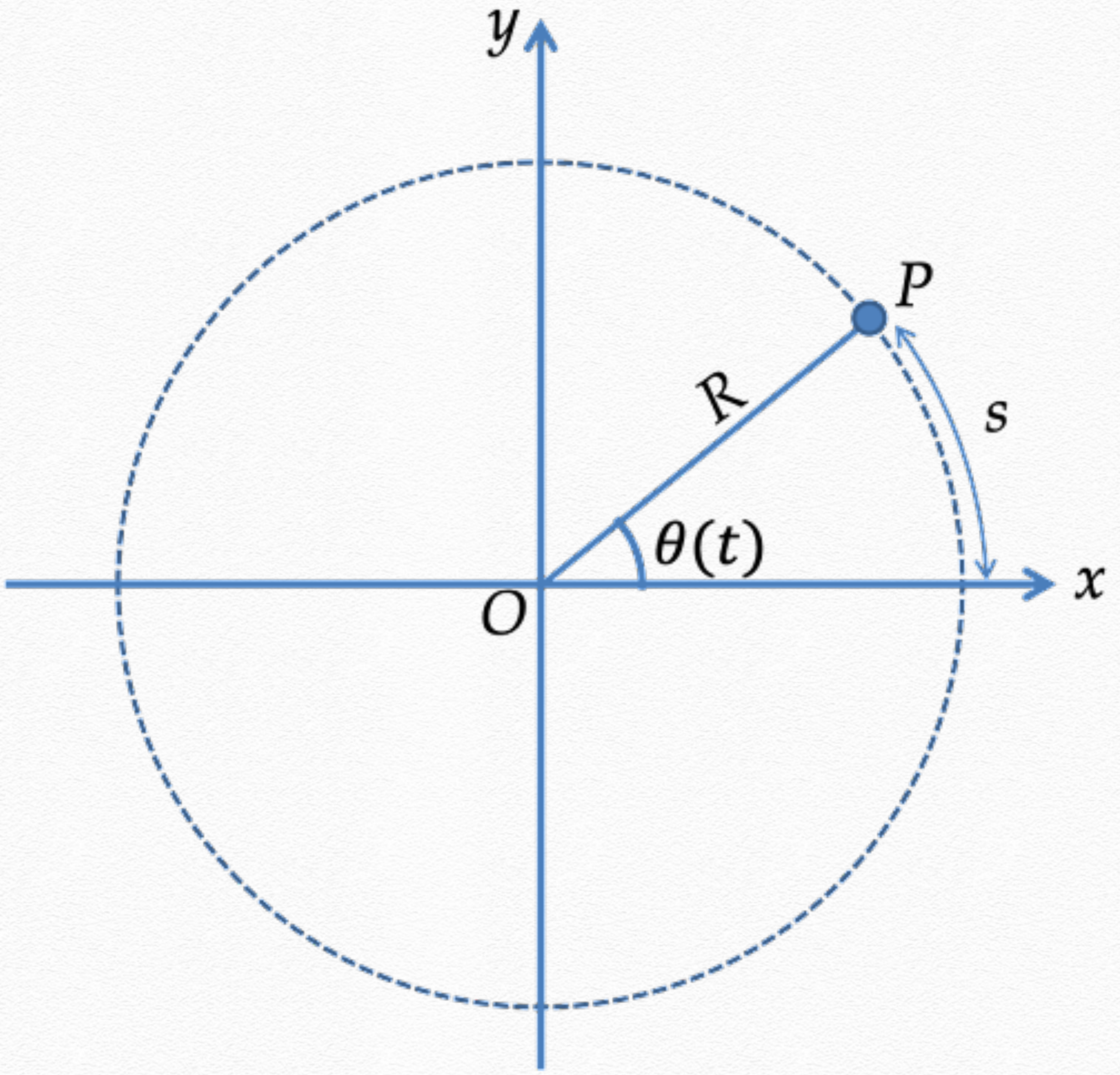
- dôležitý príklad pohybovej rovnice, ktorá sa po rozpísaní do súradníc nejaví ako tri nezávislé 1D rovnice (a jej riešením je pohyb po kružnici)
- prakticky dôležitý príklad pohybu v homogénnom magnetickom poli, v ktorom sú rovnice po prepísaní do súradníc netriviálne previazané

zahrievacie kolo (doslova)

- jeden pohyb, v ktorom sú rovnice po prepísaní do súradníc netriviálne previazané, je dobre známy už zo strednej školy
- reč je o rovnomernom pohybe po kružnici
- na strednej škole však nedostaneme tento pohyb riešením (diferenciálnej) pohybovej rovnice, postup je opačný: vychádza sa z toho, že ide o rovnomerný pohyb po kružnici a niečo sa z toho usúdi o pôsobiacej výslednej sile
(a to niečo bude pre nás užitočné v tejto prednáške)

rovnomerný pohyb po kružnici
(ak si náhodou nepamätáte zo strednej školy)

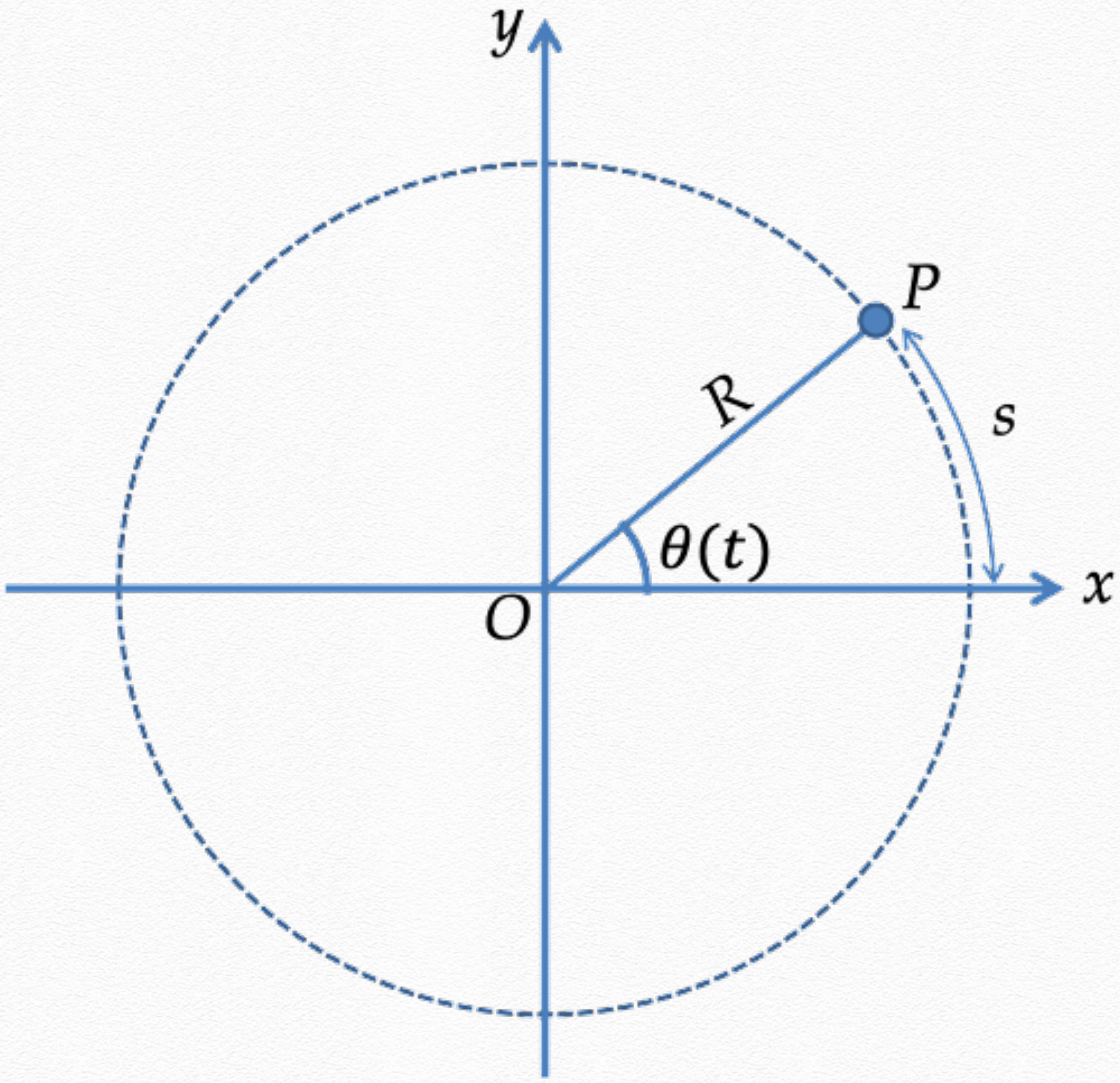
- rýchle odvodenie dôležitých vzťahov pre rovnomerný pohyb po kružnici: $\theta = \omega t$
- $x(t) = R\cos\omega t \qquad y(t) = R\sin\omega t$
- $\dot{x}(t) = -\omega R\sin\omega t \qquad \dot{y}(t) = \omega R\cos\omega t$
- $\ddot{x}(t) = -\omega^2 R\cos\omega t \qquad \ddot{y}(t) = -\omega^2 R\sin\omega t$
- $\vec{v}\,.\,\vec{r} = 0 \qquad v = \omega r \qquad (r = R)$
- $\vec{a}\,.\,\vec{v} = 0 \qquad a = \omega^2 r \qquad \vec{a} = -\omega^2\,\vec{r}$



rovnomerne zrýchlený pohyb po kružnici

(veľmi užitočná úloha, urobte hneď teraz)

- odvoďte vzťahy pre rýchlosť a pôsobiacu silu v prípade rovnomerne zrýchleného pohybu po kružnici: $\theta(t) = \frac{1}{2}\epsilon t^2$
- zistite, či je aj v tomto prípade rýchlosť kolmá na polohový vektor
- zistite, či je aj v tomto prípade sila kolmá na rýchlosť, respektíve aká veľká je jej zložka v smere kolmom na rýchlosť
- užitočné info: často to býva na skúške



v homogénnom magnetickom poli

- sila pôsobiaca na nabitú časticu: $\overrightarrow{F} = q\,\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}$
- pohybová rovnica: $m\ddot{\vec{r}} = q\,\dot{\vec{r}} \times \overrightarrow{B}$
- skúsme najprv čo najlepšie porozumieť riešeniu tejto rovnice bez toho, že by sme ju explicitne vyriešili (to urobíme neskôr)
- sila je kolmá na $\overrightarrow{B}$ $\Rightarrow$ v smere $\overrightarrow{B}$ je sila nulová
- čiže pohyb v smere poľa $\overrightarrow{B}$ je rovnomerný priamočiary

čo sa deje v rovine kolmej na $\overrightarrow{B}$

- označme priemet rýchlosti do tejto roviny symbolom $\overrightarrow{v}_\perp$ (kolmá na $\overrightarrow{B}$)
- sila $\overrightarrow{F}$ pôsobí v tejto rovine, je kolmá na $\overrightarrow{v}_\perp$ a jej veľkosť je $F = qv_\perp B$
- sila $\overrightarrow{F}$ je v smere $\overrightarrow{v}_\perp$ nulová $\Rightarrow$ $\overrightarrow{v}_\perp$ sa v tomto smere nemení, čiže veľkosť $v_\perp$ sa nemení (mení sa len smer $\overrightarrow{v}_\perp$, tým viac čím väčšia je F)
- $v_\perp$ ani homogénne B sa nemenia, čiže sila je stále rovnako veľká, čiže zakrivenie je stále rovnako veľké $\Rightarrow$ rovnomerný pohyb po kružnici

poznámka: velocity vs. speed

- slovom rýchlosť označujeme v slovenčine dve rôzne veci jednak $\overrightarrow{v}$ (velocity) a jednak $v = \sqrt{\overrightarrow{v} \, . \, \overrightarrow{v}}$ (speed)

- ak je $\overrightarrow{v} \, . \, \overrightarrow{a} = 0$, t. j. ak je zrýchlenie kolmé na rýchlosť, veľkosť rýchlosti sa nemení (meniť sa môže len smer)

- malo by to byť jasné priamo z definícií, ale ak nie je, tak:

$$\frac{d}{dt}v = \frac{d}{dt}\sqrt{\overrightarrow{v} \, . \, \overrightarrow{v}} = \frac{2 \, \overrightarrow{v} \, . \, \overrightarrow{a}}{2\sqrt{\overrightarrow{v} \, . \, \overrightarrow{v}}} = \frac{\overrightarrow{v} \, . \, \overrightarrow{a}}{v} \quad \text{čiže} \quad \overrightarrow{v} \, . \, \overrightarrow{a} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0$$

čo sa deje celkove

- v smere homog. poľa $\overrightarrow{B}$: rovnomerný priamočiary pohyb
- v rovine kolmej na $\overrightarrow{B}$: rovnomerný pohyb po kružnici
  (stále rovnako zakrivený pohyb
  stále rovnaká veľkosť rýchlosti)
- celkove teda dostávame: pohyb po špirále (závitnici)
- zatiaľ ale nevieme, aký je polomer kružnice

rýchlosť pohybu v hom. mag. poli

- zo vzťahu medzi rýchlosťou rovnomerného pohybu po kružnici a veľkosťou dostredivej sily ($F = m\omega^2 r = mv^2/r$), dostávame polomer kružnice pri pohybe v homogénnom magnetickom poli

$$\frac{mv_\perp^2}{r} = qv_\perp B \quad \Rightarrow \quad r = \frac{mv_\perp}{qB}$$

- ak poznáme r a $v_\perp$, poznáme aj periódu: $T = \frac{2\pi r}{v_\perp} = \frac{2\pi m}{qB}$

vtipná aplikácia (Nobelove ceny 1921-22)

- nabité častice sú magnetickým poľom zakrivované tak, že $\overrightarrow{a} = \frac{q}{m} \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}$
- rôzne zakrivenia pre častice s rovnakými rýchlosťami, rovnakým q a rôznymi m (typický príklad: ióny izotopov)
- izotopy boli objavené práve vďaka rôznym zakriveniam ich dráh v magnetickom poli
- Frederick Soddy, Oxford
  Nobelova cena za chémiu 1921

Francis Aston, Cambridge,
Nobelova cena za chémiu 1922

vtipná aplikácia (Nobelova cena 1939)

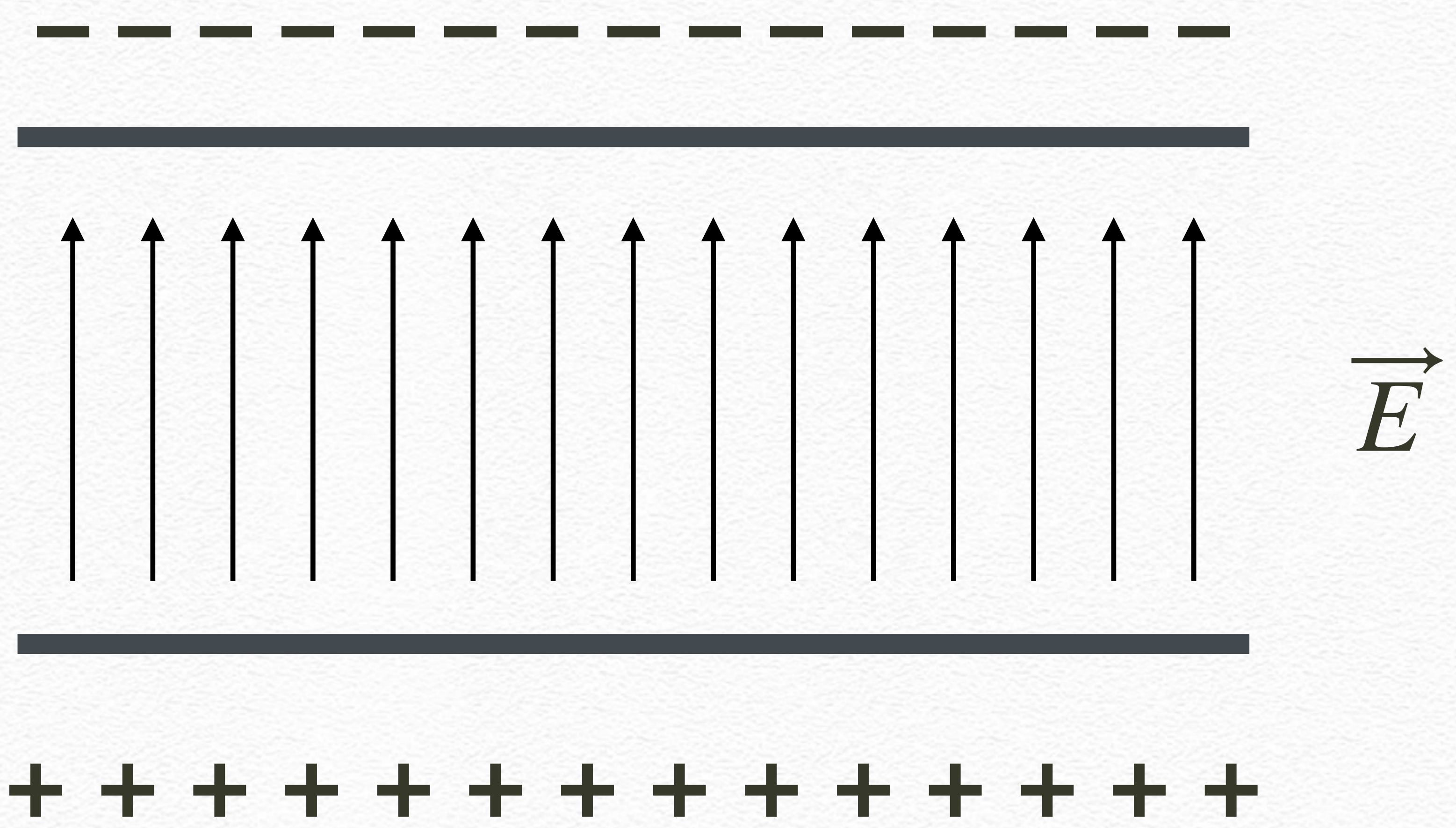
- najjednoduchší urýchľovač častíc: opačne nabité sieťky a medzi nimi dosť homogénne elektrické pole

- urýchľuje častice medzi mriežkami (sieťkami)

- idea: za mriežkou častice otočíme a mriežky prepólujeme, takže pri spiatočnej ceste medzi mriežkami sú opäť urýchľované

- návrat častíc v oblasti za mriežkami treba stihnúť za čas ich prepólovania (aby boli častice medzi mriežkami stále urýchľované)

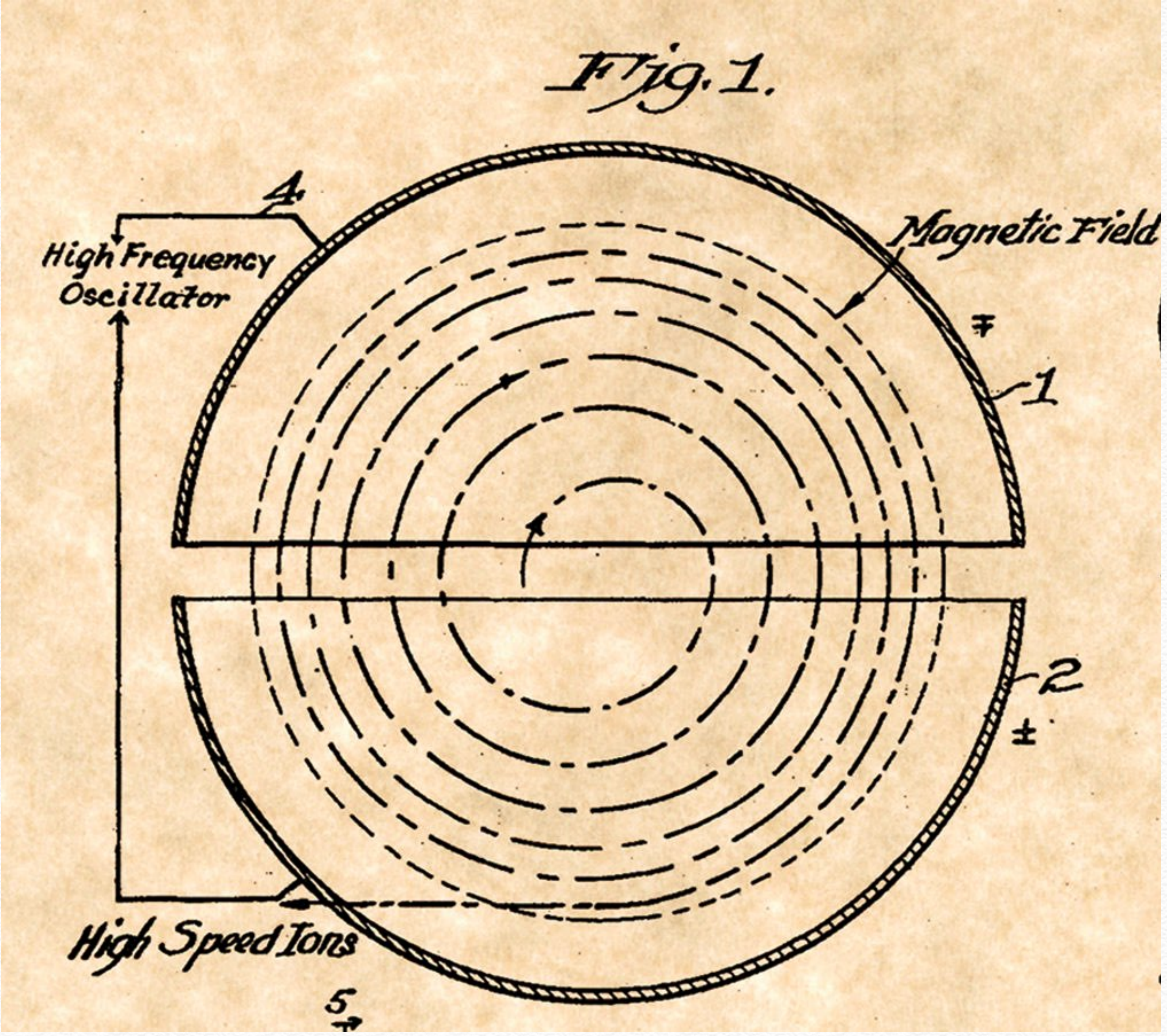
tu musíme častice otočiť



tu musíme častice otočiť

cyklotrón

- častice za sieťkami vraciame pomocou homogénneho magnetického poľa (kolmého na rovinu obrázku)
- doba návratu $T = \frac{\pi m}{qB}$
- T nezávisí od rýchlosti, je stále rovnaká
- ak meníme nabitie dosiek s frekvenciou zosúladenou s týmto T, potom sú častice opakovane urýchľované



Ernest Lawrence, Nobelova cena 1939

riešenie pohybových rovníc

- tak, a teraz poďme explicitne vyriešiť pohybovú rovnicu pre nabitú časticu v homogénnom magnetickom poli

- pre zjednodušenie zápisov vyberme os z v smere poľa $\overrightarrow{B}$

- najprv rovnicu $m\ddot{\vec{r}} = q\,\dot{\vec{r}} \times \overrightarrow{B}$ prepíšeme do súradníc:
  $m\,\ddot{x} = q\,\dot{y}\,B \qquad m\,\ddot{y} = -\,q\,\dot{x}\,B \qquad m\,\ddot{z} = 0$

- čo sa dá (a je užitočné) napísať aj ako
  $m\,\dot{v}_x = q\,v_y\,B \qquad m\,\dot{v}_y = -\,q\,v_x\,B \qquad m\,\dot{v}_z = 0$

pokračovanie riešenia

- dostali sme sústavu medzi sebou previazaných rovníc (v rovnici pre $\ddot{x}$ vystupuje $\dot{y}$ a naopak), ktorú prevedieme drobným trikom na sústavu nezávislých rovníc

- zderivujme prvú rovnicu a dosaďme do nej druhú

$$m\,\ddot{v}_x = q\,\dot{v}_y\,B = -\frac{q^2B^2}{m}\,v_x \qquad \text{čiže} \qquad \ddot{v}_x + \frac{q^2B^2}{m^2}v_x = 0$$

- to isté môžeme spraviť aj s druhou rovnicou,
ale nebudeme to potrebovať

pokračovanie riešenia

- dostali sme rovnicu, ktorej riešenie už poznáme
- je to rovnica zhodná s rovnicou pre LHO, riešenie je
  $v_x(t) = a\cos(\omega t + \varphi)$ kde $\omega = \dfrac{qB}{m}$
- z prvej rovnice pre rýchlosti teraz dostaneme $v_y(t)$
  $v_y(t) = \dfrac{m}{qB}\,\dot{v}_x = -\,a\sin(\omega t + \varphi)$

explicitné riešenie

- súradnice polohy dostaneme zo súradníc rýchlosti integrovaním
- $x(t) = R\sin(\omega t + \varphi) + c$ kde $a = R\omega$
- $y(t) = R\cos(\omega t + \varphi) + c'$
- $z(t) = bt + c''$
- konštanty $R, \varphi, b, c, c', c''$ sa určia z počiatočných podmienok

v homogénnom magnetickom poli a homogénnom elektrickom poli

- sila pôsobiaca na nabitú časticu: $\overrightarrow{F} = q\,\overrightarrow{E} + q\,\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}$
- pohybová rovnica: $m\ddot{\vec{r}} = q\,\overrightarrow{E} + q\,\dot{\vec{r}} \times \overrightarrow{B}$
- vyšetríme dva prípady, jednak $\overrightarrow{E} \parallel \overrightarrow{B}$ a jednak $\overrightarrow{E} \perp \overrightarrow{B}$
- všeobecný prípad je kombináciou týchto dvoch

rovnobežné polia $\overrightarrow{E}$ a $\overrightarrow{B}$

- pohybová rovnica prepísaná do súradníc (polia v smere osi z)

$$m\ddot{x} = q\dot{y}B \qquad m\ddot{y} = -q\dot{x}B \qquad m\ddot{z} = qE$$

- čo sa opäť dá (a je užitočné) napísať aj ako

$$m\dot{v}_x = q v_y B \qquad m\dot{v}_y = -q v_x B \qquad m\dot{v}_z = qE$$

- v súradniciach *x* a *y* dostaneme to isté čo bez poľa $\overrightarrow{E}$

pre súradnicu *z* dostaneme $z(t) = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2 + bt + c''$

skrížené (kolmé) polia $\overrightarrow{E}$ a $\overrightarrow{B}$

- toto je zaujímavý príklad, s pomerne prekvapujúcim riešením

- pohybová rovnica prepísaná do súradníc ($\overrightarrow{E}$ a $\overrightarrow{B}$ v smeroch y a z)
  $m\,\ddot{x} = q\,\dot{y}\,B \qquad m\,\ddot{y} = -\,q\,\dot{x}\,B + qE \qquad m\,\ddot{z} = 0$

- čo sa opäť dá (a je užitočné) napísať aj ako
  $m\,\dot{v}_x = q\,v_y\,B \qquad m\,\dot{v}_y = -\,q\,v_x\,B + qE \qquad m\,\dot{v}_z = 0$

- ďalej môžeme postupovať rovnako, ako v prípade bez $\overrightarrow{E}$

skrížené polia – pokračovanie

- rovnakým postupom ako predtým dostaneme pre *x*-ovú zložku

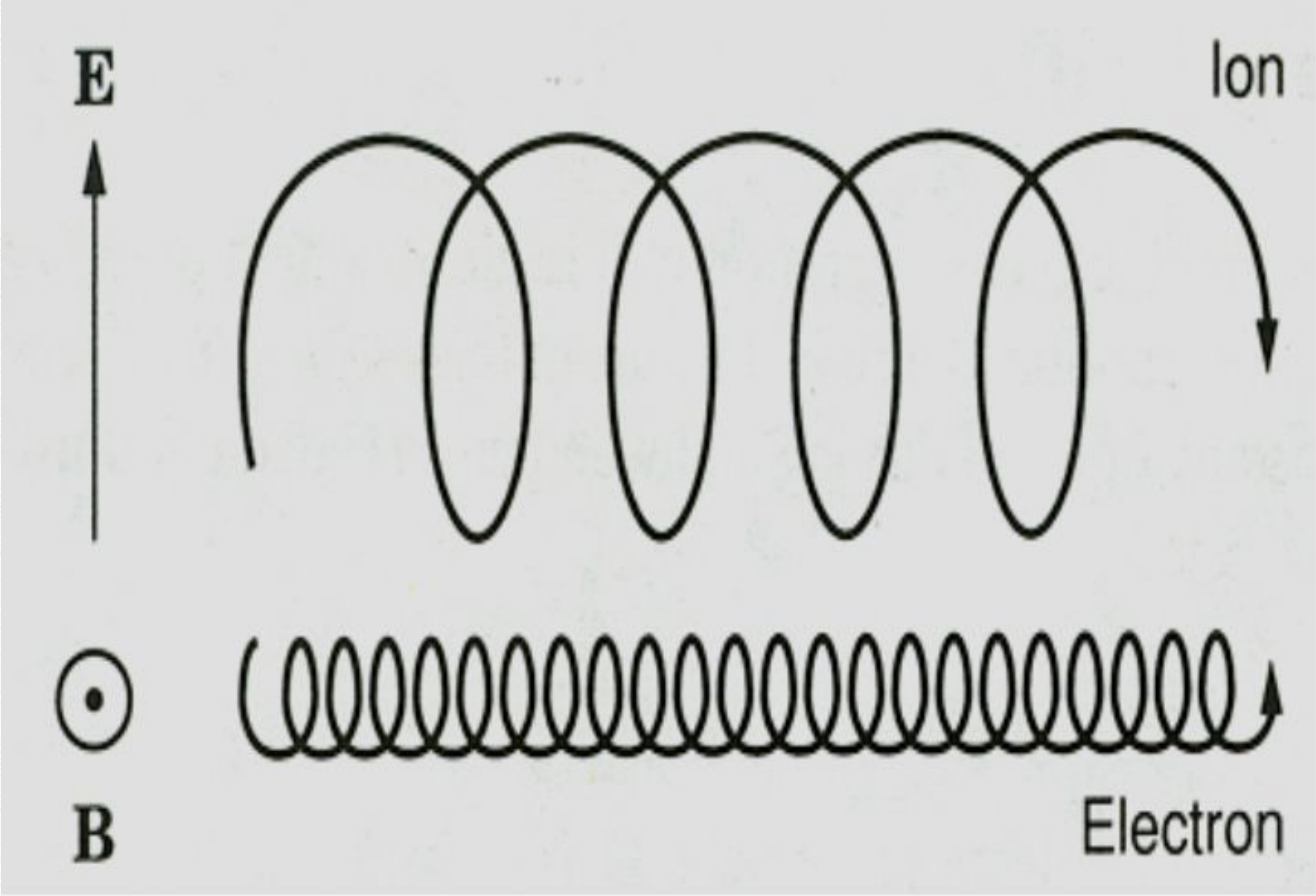
$$\ddot{v}_x + \frac{q^2B^2}{m^2} v_x = \frac{q^2EB}{m^2}$$

- všeobecné riešenie pre nulovú stranu poznáme, partikulárne riešenie pre túto pravú stranu uhádneme ľahko: $v_{x,p} = E/B$

- v porovnaní s riešením bez poľa $\vec{E}$ sme dostali navyše tzv. drift: rovnomernú rýchlosť v smere x (kolmo na $\vec{E}$ aj $\vec{B}$)

nepovinná domáca úloha

- ako vždy, aj teraz veľmi odporúčam nakresliť si (asi pythonom) v prípade skrížených polí výslednú trajektóriu
- mali by ste vidieť pohyb v smere kolmom na obe homogénne polia (pomerne nečakané, nie?)
- mali by ste vidieť kladné aj záporné náboje idúce rovnakým smerom (pomerne nečakané, nie?)



dôležitá poznámka na záver

- pohyb v nehomogénnych elmag poliach vedie vo všeobecnosti na nelineárnu diferenciálnu rovnicu

$$m\,\ddot{\vec{r}}(t) = q\,\overrightarrow{E}(\vec{r}(t), t) + q\,\dot{\vec{r}}(t) \times \overrightarrow{B}(\vec{r}(t), t)$$

- túto rovnicu vo všeobecnosti presne riešiť nevieme, napriek tomu, že sa vyskytuje v mnohých oblastiach fyziky (ale numericky “krok za krokom” ju riešiť vieme)