Zákony zachovania

najprv len v jednom rozmere

mechanika 19

pohyb v troch rozmeroch

čo sme sa už naučili

- riešiť pohybovú rovnicu v prípade homogénneho gravitačného, elektrického a magnetického poľa, a aj ich kombinácií
- v týchto prípadoch išlo o lineárne diferenciálne rovnice (prípadne o sústavy viazaných lineárnych diferenciálnych rovníc), ktoré sme sa naučili riešiť štandardným univerzálnym postupom
- rovnako by sme vedeli riešiť pohybovú rovnicu pre trojrozmerný lineárny harmonický oscilátor (a to aj v prípade tlmených či nútených kmitov)

čo sa ešte chceme naučiť

- zistiť čo najviac o pohybe v prípadoch síl vedúcich na nelineárne pohybové rovnice (príklad: newtonovská gravitačná sila)
- v prípade takýchto rovníc nemáme nijakú univerzálnu metódu riešenia, takže musíme využívať všelijaké špeciálne triky, medzi nimi napríklad zákony zachovania
- tým sa dostávame k veľmi dôležitej otázke, ktorá bude predmetom ďalších prednášok: <u>ako vyzerajú zákony zachovania v 1D a v 3D?</u>

ako dojíme pohybové rovnice

priamo

explicitne vyriešime diferenciálnu rovnicu
(ak vieme, tak presne, ak nie, tak približne)

presne sme sa zatiaľ naučili riešiť rovnice v dvoch fyzikálne dôležitých prípadoch:
1. voľný pád v homogénnom gravitačnom poli
2. lineárny harmonický oscilátor

kompletné riešenia rovníc obsahujú úplne všetky informácie o pohybe v danej situácii, takže ak ich vieme získať (čo bohužiaľ nevieme vždy), tak to určite stojí za námahu

nepriamo

bez explicitného riešenia diferenciálnej rovnice nahliadneme niektoré vlastnosti týchto riešení

rôznymi (rigoróznymi) úvahami sme dokázali nahliadnuť periodičnosť aj základný charakter pohybu LHO, pokles amplitúdy jeho kmitov pri odpore vzduchu aj podstatu javu rezonancie

<u>zákony zachovania</u> sú jedným zo systematických spôsobov dozvedania sa dôležitých informácií o riešeniach pohybových rovníc v prípadoch, keď je explicitné riešenie ťažké alebo nemožné

energia

čo vieme zo strednej školy

- energia sa zachováva
- kinetická energia = $\frac{1}{2}mv^2$
- potenciálna energia = mgh
- zachováva sa celková mech. energia
- teda vlastne nie, pretože existujú aj iné formy energie, takže vlastne mechanická energia sa nezachováva, či?

čo nevieme zo strednej školy

- prečo sa energia zachováva (je to nezávislý prírodný zákon, alebo je to dôsledok iných prírodných zákonov, napr. Newtonových?)
- prečo kinetická energia nie je $\frac{1}{3}mv^5$?
- prečo potenciálna energia nie je $\frac{mg}{h}$?
- načo je nám vlastne dobrý zákon zachovania energie v homogénnom gravitačnom poli, kde celý pohyb (voľný pád) explicitne poznáme?

hybnosť

čo vieme zo strednej školy

- hybnosť sa zachováva (pravda, ale len niekedy)
- hybnosť = mv (zrovna toto sa nezachováva)
- v trojrozmernom priestore je hybnosť vektor (podobne ako rýchlosť), ale v jednom rozmere vystačíme s hybnosťou ako s reálnym číslom
- hybnosť je mierou posuvného pohybu telesa (toto je úplne prázdny zhluk slov, ak ste sa s tým na strednej škole nestretli, buďte radi)

čo nevieme zo strednej školy

- prečo sa hybnosť zachováva (je to nezávislý prírodný zákon, alebo je to dôsledok iných prírodných zákonov, napr. Newtonových?)
- prečo hybnosť nie je $\frac{v}{m}$?
- prečo hybnosť nabitej častice nie je qv ?
- načo je nám vlastne dobrý zákon zachovania hybnosti pre jednu časticu, pre ktorú nehovorí vlastne nič iné ako zákon zotrvačnosti?

nezachovanie hybnosti a energie

hybnosť jednej častice

- definícia hybnosti: $p = mv$
  (zatiaľ nie je jasné, načo je to dobré)
- rýchlosť zmeny hybnosti:
  $\dot{p} = m\dot{v} = ma = F$
- ak na časticu pôsobí nenulová sila, hybnosť častice sa nezachováva
- v ďalšom uvidíme, ako prerobiť hybnosť na zachovávajúcu sa veličinu

kinetická energia jednej častice

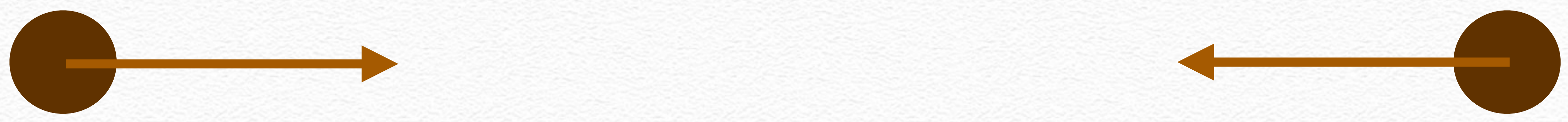
- definícia kinetickej energie: $E_k = \frac{1}{2}mv^2$
  (zatiaľ nie je jasné, načo je to dobré)
- rýchlosť zmeny kinetickej energie:
  $\dot{E}_k = mv\dot{v} = mav = Fv$
- ak na časticu pôsobí nenulová sila, kinetická energia častice sa nezachováva
- v ďalšom uvidíme, ako prerobiť kinetickú energiu na zachovávajúcu sa veličinu

zákon zachovania hybnosti

- uvažujme systém viacerých častíc s hybnosťami $p_i = m_i v_i \quad i = 1, \cdots, N$
- (celková) hybnosť je definovaná ako súčet jednotlivých hybností: $p = \sum_{i=1}^{N} p_i$
- rýchlosť zmeny hybnosti: $\dot{p} = \sum_{i=1}^{N} \dot{p}_i = \sum_{i=1}^{N} F_i$ (kde F_i je celková sila pôsobiaca na *i*-tu časticu)
- vzájomné sily medzi časticami sa v tejto sume vyrušia (vďaka zákonu akcie a reakcie)

  takže v súčte zostanú len vonkajšie sily pôsobiace na jednotlivé častice: $\dot{p} = \sum_{i=1}^{N} F_i^{vonk}$
- dostali sme zákon zachovania: ak je súčet vonkajších síl nulový, celková hybnosť sa zachováva

príklad užitočnosti zachovania hybnosti



- dve rovnaké častice (dva protóny, dve biliardové gule, alebo podobne) do seba vrazia rovnakými rýchlosťami; ako sa budú pohybovať potom?

- aj bez znalosti konkrétnych síl vieme povedať toto:
  pred zrážkou bola celková hybnosť nulová $p = mv - mv = 0$
  po zrážke musí byť tiež nulová (keďže sa zachováva)
  častice teda musia mať po zrážke opačné hybnosti
  a keďže majú rovnaké hmotnosti, musia mať opačné rýchlosti

niekoľko poznámok

- zo zákona zachovania hybnosti nevieme povedať, aké budú rýchlosti po zrážke – vieme povedať len to, že budú opačné
- to sa môže zdať málo, ale ak si uvedomíme, že sme vlastne nič nevedeli o silách pôsobiacich počas zrážky, tak je to v skutočnosti šokujúco veľa
- to, že sa nám z hybností častíc $p_i = m_i v_i$ podarilo vyrobiť zachovávajúcu sa veličinu p je vysoko netriviálny úspech (to sa len tak ľahko nepodarí)
- súčin mv je (na rozdiel od mnohých iných výrazov) dobrý práve preto, že sa z neho dá vyrobiť zachovávajúca sa veličina (to sa nedá vždy)

zmena kinetickej energie

- uvažujeme len jednu časticu a pýtajme sa, ako sa zmení počas pohybu jej kinetická energia (čo je celkom iný postup ako v prípade hybnosti)

- celková zmena = súčet postupných malých zmien   (pričom malá zmena = $\dot{E}_k \, dt$)

- $\Delta E_k = E_k(t_2) - E_k(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \dot{E}_k \, dt = \int_{t_1}^{t_2} F \, v \, dt$ (pričom $v \, dt = dx$)

- <u>ak sila závisí len od polohy</u> (nie od rýchlosti ani od času), potom

$\Delta E_k = \int_{x_1}^{x_2} F(x) \, dx$ (tomuto integrálu budeme hovoriť práca, tak ho fyzici volajú)

zákon zachovania mechanickej energie

- zatiaľ sme pre silu $F(x)$ dostali toto: zmena kinetickej energie = práca
- finta: umelo zavedieme inú veličinu (budeme ju volať poteniálna energia) tak, aby jej zmena bola mínus práca (ak sa nám to podarí, tak súčet týchto dvoch veličín sa nebude meniť, jeho zmena bude nulová, t.j. bude sa zachovávať)
- vtipné: potenciálnu energiu vyrábame tak, aby sa súčet $E_k + E_p$ zachovával
- výraz $\frac{1}{2}mv^2$ je (na rozdiel od iných výrazov) dobrý práve preto, že sa z neho takýmto spôsobom dá vyrobiť zachovávajúca sa veličina (to sa nedá vždy)

potenciálna energia

- zvoľme si referenčný bod x_R , od ktorého budeme merať potenciálnu energiu a nejakú referenčnú energiu E_R , ako hodnotu potenciálnej energie v bode x_R
- definujme novú veličinu (tzv. potenciálnu energiu) ako hodnotu v referenčnom bode mínus prácu uvažovanej sily pri presune z referenčného bodu do bodu x:

$$E_p(x) = E_R - \int_{x_R}^{x} F(x')\ dx'$$

- presvedčte sa, že $\Delta E_p(x) = E_p(x_2) - E_p(x_1) = -\int_{x_1}^{x_2} F(x')\ dx' = -\int_{x_1}^{x_2} F(x)\ dx$
- vybavené, súčet $E_k + E_p$ sa zachováva

príklad užitočnosti zachovania energie

- dve rovnaké častice (dva protóny, dve biliardové gule, alebo podobne) do seba vrazia rovnakými rýchlosťami; ako sa budú pohybovať potom?
- zo zákona zachovania hybnosti vieme, že musia mať opačné rýchlosti
- ak sa počas zrážky energia nemení na iné formy (alebo len zanedbateľne), potom musí byť po zrážke rovnaká ako pred ňou, čo vyžaduje rýchlosti rovnako veľké ako boli pred zrážkou

potenciálna energia v hom. grav. poli

- $F(x) = -\,mg$
- $E_p(x) = E_R - \int_{x_R}^{x} F(x')\ dx' = E_R + \int_{x_R}^{x} mg\ dx' = E_R + mgx - mgx_R$
- ak vyberieme konštanty E_R a x_R nulové (respektíve tak, aby platilo $E_R = mgx_R$)

$$\boxed{E_p(x) = m\,g\,x}$$

- toto je starý známy (aj keď nie bohvieako užitočný) výsledok zo strednej školy

potenciálna energia LHO

- $F(x) = -kx$
- $E_p(x) = E_R - \int_{x_R}^{x} F(x')\,dx' = E_R + \int_{x_R}^{x} kx'\,dx' = E_R + \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_R^2$
- ak vyberieme konštanty E_R a x_R nulové (respektíve tak, aby platilo $E_R = \frac{1}{2}kx_R^2$)

$$\boxed{E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2}$$

- toto je potenciálna energia lineárneho harmonického oscilátora

potenciálna energia v nehom. grav. poli

- $F(x) = -\frac{\kappa M m}{x^2}$
- $E_p(x) = E_R - \int_{x_R}^{x} F(x')\, dx' = E_R + \int_{x_R}^{x} \frac{\kappa M m}{x'^2} dx' = E_R - \frac{\kappa M m}{x} + \frac{\kappa M m}{x_R}$
- ak vyberieme konštanty $E_R = 0$, $x_R = \infty$ (respektíve tak, aby platilo $E_R = -\frac{\kappa M m}{x_R}$)

$$\boxed{E_p(x) = -\frac{\kappa M m}{x}}$$

- toto je potenciálna energia telesa v nehomogénnom gravitačnom poli (zatiaľ v 1D)

príklady na využitie zachovania energie

- nech teleso pod vplyvom sily $F(x)$ štartuje v polohe x_0 rýchlosťou v_0 kde zastane? (aká bude jeho poloha, keď bude jeho rýchlosť nulová?)

$$E_p(x_0) \; + \; \frac{1}{2}mv_0^2 \; = \; E_p(x) \; + \; \frac{1}{2}m\,0^2$$

- maximálna výška zvislého vrhu (homogénne pole) $\quad x_{max} = x_0 + \frac{v_0^2}{2g}$

- amplitúda kmitov LHO $\quad x_{max} = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k}v_0^2}$

- druhá kozmická rýchlosť (také v_0, aby $x_{max} = \infty$) $\quad v_0 = \sqrt{\frac{2\kappa M_Z}{R_Z}}$

nepovinné

nepovinné

zachovanie energie ako diferenciálna rovnica

- pohybová rovnica pre 1D pohyb v nehomogénnom gravitačnom poli vyzerá takto $m\ddot{x} = -\frac{\kappa M m}{x^2}$ (je to nelineárna diferenciálna rovnica druhého rádu)
- zákon zachovania energie v tomto poli vyzerá (ak označíme celkovú energiu symbolom E) takto $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{\kappa M m}{x} = E$ (čo je diferenciálna rovnica prvého rádu)
- túto nelineárnu rovnicu prvého rádu vieme riešiť: prepíšeme ju do tvaru $\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2\kappa M}{x}}$ a ako sa riešia rovnice takéhoto typu si hneď povieme (poriadnejšie sa to naučíte na prednáške z matematiky)
- zachovanie energie nám v tomto prípade umožňuje nájsť explicitné riešenie!!!

nepovinné

nepovinné

ako sa rieši rovnica

$$\dot{x}(t) = f(x)\, g(t)$$

- trik: v rovnici $\dfrac{dx}{dt} = f(x)\, g(t)$ chápeme deriváciu ako podiel diferenciálov (t.j. podiel $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ v limite $\Delta t \to 0$)
- rovnicu prepíšeme na tvar $\dfrac{dx}{f(x)} = g(t)\, dt$
- obidve strany zintegujeme $\displaystyle\int \frac{dx}{f(x)} = \int g(t)\, dt$
- ak integrály označíme $I(x)$ a $G(t)$, dostaneme rovnicu $I(x) = G(t)$
- z tejto rovnice nakoniec vyjadríme x ako funkciu t

zhrnutie

- kombinácie písmen mv a $\frac{1}{2}mv^2$ sú v mechanike užitočné preto, lebo sa na rozdiel od väčšiny iných výrazov dajú doplniť na výrazy, ktorých číselná hodnota sa počas pohybu nemení (zachovávajú sa)
- toto doplnenie na zachovávajúce sa výrazy vyzeralo v prípade energie a hybnosti veľmi odlišne (logika odvodenia aj podmienky platnosti boli výrazne odlišné pre energiu a pre hybnosť)
- táto odlišnosť je ale len zdanlivá, v skutočnosti sú zákony zachovania energie a hybnosti veľmi blízki príbuzní (ako si hneď povieme)

lahôdka na záver

Emmy Noether

- v roku 1915 Albert Einstein sformuloval všeobecnú teóriu relativity a nerozumel tam jednej veci týkajúcej sa energie
- konzultoval to s Davidom Hilbertom (jedným z najväčších matematikov 20. storočia), ktorý si s tým tiež nevedel rady a posunul ten problém svojej mladej 33-ročnej kolegyni
- Emmy Noether nielenže celý problém vyriešila, ale našla pritom úplne fundamentálnu súvislosť medzi symetriami fyzikálnych teórií a zákonmi zachovania (tento jej objav sa považuje za jeden z najhlbších výsledkov teoretickej fyziky)

teoréma Emmy Noether

- symetriou fyzikálnej teórie nazývame každú transformáciu (napríklad posunutia v čase, posunutia v priestore, otočenia v priestore a ďalšie), pri ktorých sa nemenia pohybové rovnice (zákony) tejto teórie
- teoréma: dôsledkom symetrií fyzikálnych teórií sú zákony zachovania
- teoréma aj jej dôkaz sú najprirodzenejšie v špecifických formuláciách mechaniky (v takzvanej lagrangeovskej a hamiltonovskej formulácii), s ktorými sa zoznámite na prednáške z teoretickej mechaniky (3. sem.)
- teoréma nielenže odhaľuje tento prekvapivý súvis, ale dáva pre každú symetriu explicitný výraz pre príslušnú zachovávajúcu sa veličinu

základné zákony zachovania

nezávislosť fyzikálnych zákonov	príslušná symetria fyzikálnej teórie	zákon zachovania
od času	posunutia v čase	energie
od polohy	posunutia v priestore	hybnosti
od orientácie	rotácie v priestore	momentu hybnosti