Energia a hybnosť v 3D

pre aké polia sa dá zaviesť potenciálna energia?

mechanika 20

od jedného rozmeru k trom

hybnosť

- v podstate triviálny prechod od 1D k 3D
- všade pribudnú šípky a to je vlastne celé, nič viac netreba
- toto pomerne rýchlo vybavíme na začiatku tejto prednášky

energia

- prekvapivo netriviálny prechod od 1D k 3D
- ukáže sa, že samotná definícia potenciálnej energie je pomerne sofistikovaná vec
- toto bude jadro tejto prednášky

moment hybnosti

- nová zachovávajúca sa veličina v 3D, ktorá nemá nijaký analóg v 1D
- z pohľadu Emmy Noether súvisí tento zákon zach. s rotačnou symetriou (a tá nie je v 1D prítomná)
- toto bude nabudúce

zákon (ne)zachovania hybnosti

- uvažujme systém viacerých častíc s hybnosťami $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i \qquad i = 1, \cdots, N$
- (celková) hybnosť je definovaná ako súčet jednotlivých hybností: $\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$
- rýchlosť zmeny: $\dot{\vec{p}} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ ($\vec{F}_i$ je celková sila pôsobiaca na i-tu časticu)
- vzájomné sily medzi časticami sa v tejto sume vyrušia (zákon akcie a reakcie)

  takže v súčte zostanú len vonkajšie sily pôsobiace na jednotlivé častice: $\dot{\vec{p}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{vonk}$
- zákon zachovania: ak je súčet vonkajších síl nulový, celková hybnosť sa zachováva

príklad užitočnosti zachovania hybnosti

- opäť zrážka dvoch rovnakých častíc
- ak bola hybnosť pred zrážkou nulová, aj po zrážke musí byť nulová (pozor: o uhle, pod ktorým sa častice odrazia, nám zákon zachovania hybnosti nehovorí vôbec nič)

zmena kinetickej energie

- kinetická energia: $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\overrightarrow{v}\,.\,\overrightarrow{v}$
- rýchlosť zmeny skalárneho súčinu: $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b}) = \dot{\overrightarrow{a}}\,.\,\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}\,.\,\dot{\overrightarrow{b}}$ (Leibnizovo pravidlo)
  dôkaz: najrýchlejšie v kartézskych súradniciach, t.j. využitím $\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$
- rýchlosť zmeny kinetickej energie: $\dot{E}_k = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}m\overrightarrow{v}\,.\,\overrightarrow{v} = m\dot{\overrightarrow{v}}\,.\,\overrightarrow{v} = m\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{F}\,.\,\overrightarrow{v}$
- zmena E_k pre silu závislú len od polohy:
  $$\Delta E_k = E_k(t_2) - E_k(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \dot{E}_k\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F}\,.\,\overrightarrow{v}\,dt = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \overrightarrow{F}(\vec{r})\,.\,d\vec{r}$$
- v 3D je práca definovaná cez skalárny súčin $\overrightarrow{F}\,.\,d\vec{r}$ (to je nevinná zmena oproti 1D)
  v 3D sú hranicami integrovania body $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ (toto je významná zmena oproti 1D)

pokus o definíciu potenciálnej energie

- potenciálnu energiu chceme zaviesť tak, aby jej zmena bola mínus práca (tak ako v 1D)
- podobne ako v 1D zvoľme referenčný bod $\vec{r}_R$, od ktorého budeme merať potenciálnu energiu a nejakú referenčnú energiu E_R , ako hodnotu potenciálnej energie v bode $\vec{r}_R$
- teraz by sme chceli definovať potenciálnu energiu ako hodnotu v referenčnom bode mínus prácu uvažovanej sily pri presune z referenčného bodu do bodu $\vec{r}$

$$E_p(\vec{r}) = E_R - \int_{\vec{r}_R}^{\vec{r}} F(\vec{r}\,') \,.\, d\vec{r}\,'$$

- táto definícia je však problematická (aj keď na prvý pohľad vyzerá úplne v poriadku)
- problém spočíva v tom, že integrál $\int_{\vec{r}_R}^{\vec{r}} \cdots$ nezávisí iba od hraníc, ale aj od ich spojnice

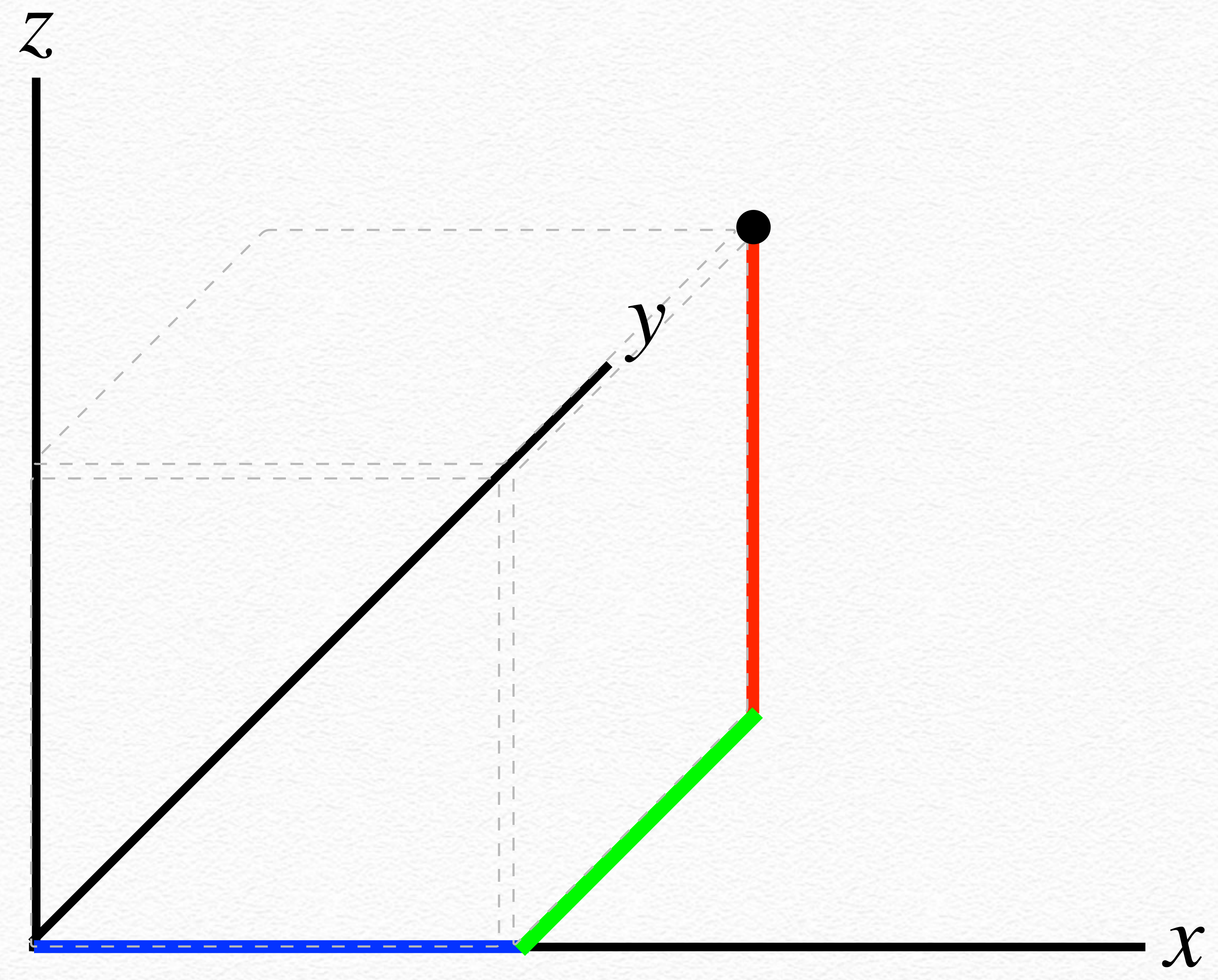
integrál po nejakej spojnici

uvažujme silu $\vec{F}(\vec{r})$ so zložkami $F_x(x,y,z) = x \quad F_y(x,y,z) = xy \quad F_z(x,y,z) = 0$

akú prácu vykoná $\vec{F}(\vec{r})$ pri presune z bodu $\vec{r}_R = (0,0,0)$ do bodu $\vec{r} = (1,1,1)$?

jedna možná spojnica bodov $\vec{r}_R$ a $\vec{r}$

$(0,0,0) \rightarrow (1,0,0) \rightarrow (1,1,0) \rightarrow (1,1,1)$



$$\text{práca} = \int_{(0,0,0)}^{(1,0,0)} \left(F_x\,dx + F_y \cancel{dy} + F_z \cancel{dz} \right) + \cdots + \cdots$$

$$= \int_0^1 F_x\,dx + \int_0^1 F_y\,dy + \int_0^1 F_z\,dz$$

$$= \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 1.y\,dy + \int_0^1 0\,dz$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = \mathbf{1}$$

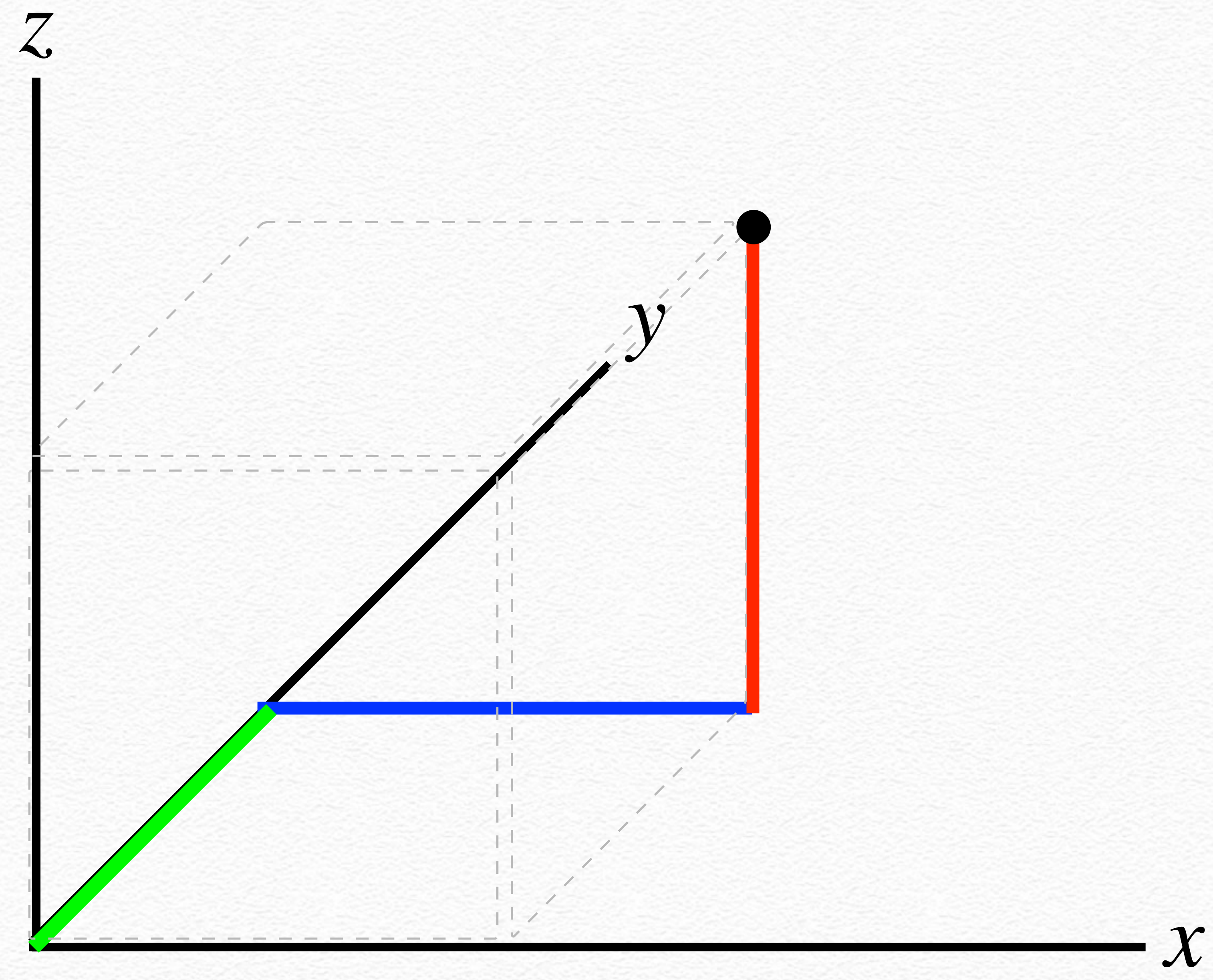
integrál po inej spojnici

stále sila $\vec{F}(\vec{r})$ so zložkami $F_x(x,y,z) = x \quad F_y(x,y,z) = xy \quad F_z(x,y,z) = 0$

akú prácu vykoná $\vec{F}(\vec{r})$ pri presune z bodu $\vec{r}_R = (0,0,0)$ do bodu $\vec{r} = (1,1,1)$?

iná možná spojnica bodov $\vec{r}_R$ a $\vec{r}$

$(0,0,0) \to (0,1,0) \to (1,1,0) \to (1,1,1)$



práca $= \int_{(0,0,0)}^{(0,1,0)} (F_x \cancel{dx} + F_y\, dy + F_z \cancel{dz}) + \cdots + \cdots$

$$= \int_0^1 F_y\, dy \;+\; \int_0^1 F_x\, dx + \int_0^1 F_z\, dz$$

$$= \int_0^1 0.y\, dy \;+\; \int_0^1 x\, dx + \int_0^1 0\, dz$$

$$= \;0 \;+\; \frac{1}{2} \;+\; 0 \;=\; \mathbf{\frac{1}{2}}$$

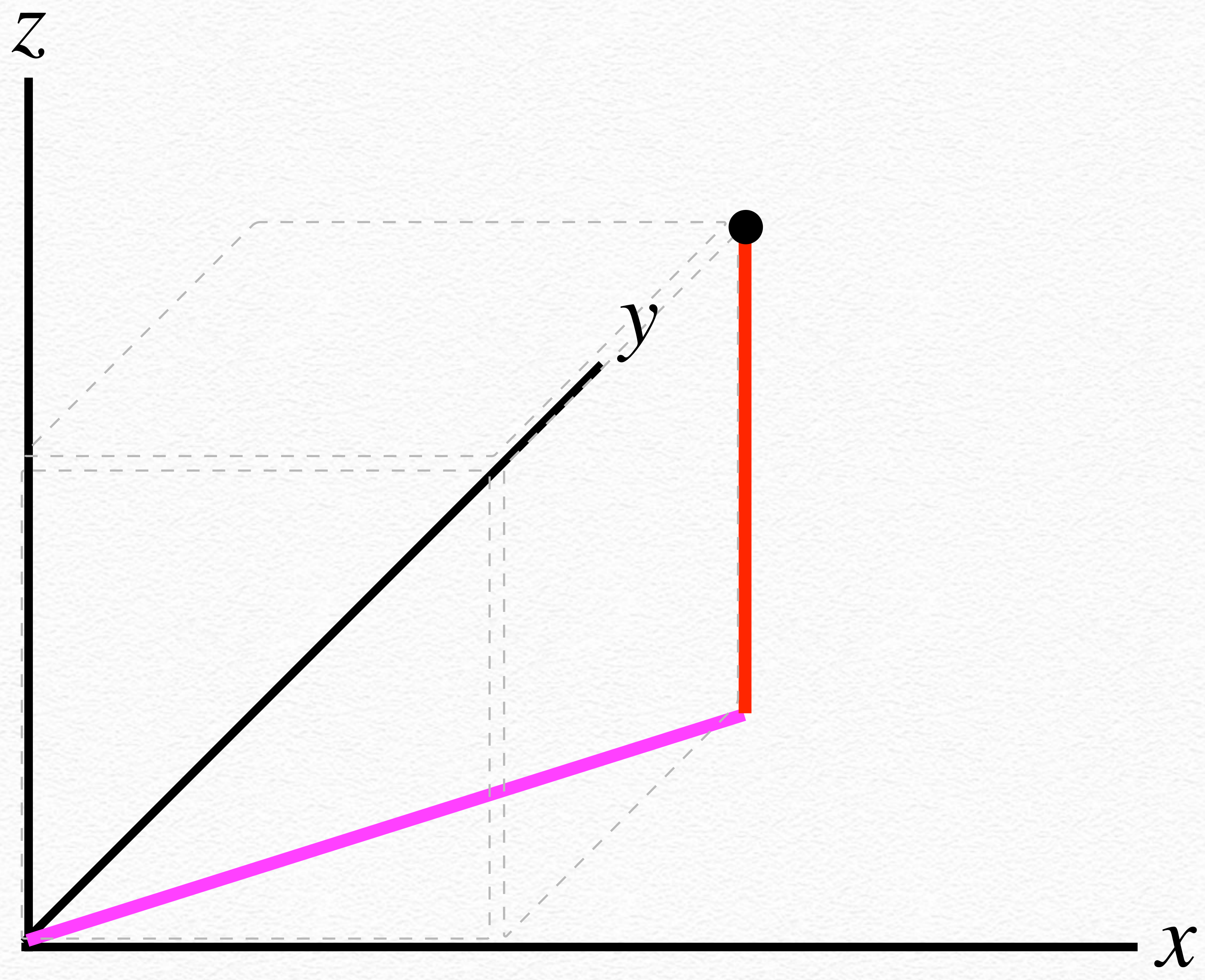
integrál po ešte inej spojnici

stále sila $\vec{F}(\vec{r})$ so zložkami $F_x(x,y,z) = x \quad F_y(x,y,z) = xy \quad F_z(x,y,z) = 0$

akú prácu vykoná $\vec{F}(\vec{r})$ pri presune z bodu $\vec{r}_R = (0,0,0)$ do bodu $\vec{r} = (1,1,1)$?

iná možná spojnica bodov $\vec{r}_R$ a $\vec{r}$

$(0,0,0) \rightarrow (1,1,0) \rightarrow (1,1,1)$



na prvej priamej spojnici $y = x$ a teda aj $dy = dx$

práca $\displaystyle = \int_{(0,0,0)}^{(1,1,0)} (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z \cancel{dz}) + \cdots$

$$= \int_0^1 (x\,dx + x\,.\,x\,dx) \quad + \int_0^1 0\,dz$$

$$= \quad \frac{5}{6} \quad + \quad 0 \quad = \quad \mathbf{\frac{5}{6}}$$

integrál po všeobecnej ceste

- všeobecne môžeme krivku v 3D zapísať pomocou nejakého parametra λ meniaceho sa pozdĺž tejto krivky od nejakej hodnoty (povedzme 0) po nejakú inú hodnotu (napr. Λ)

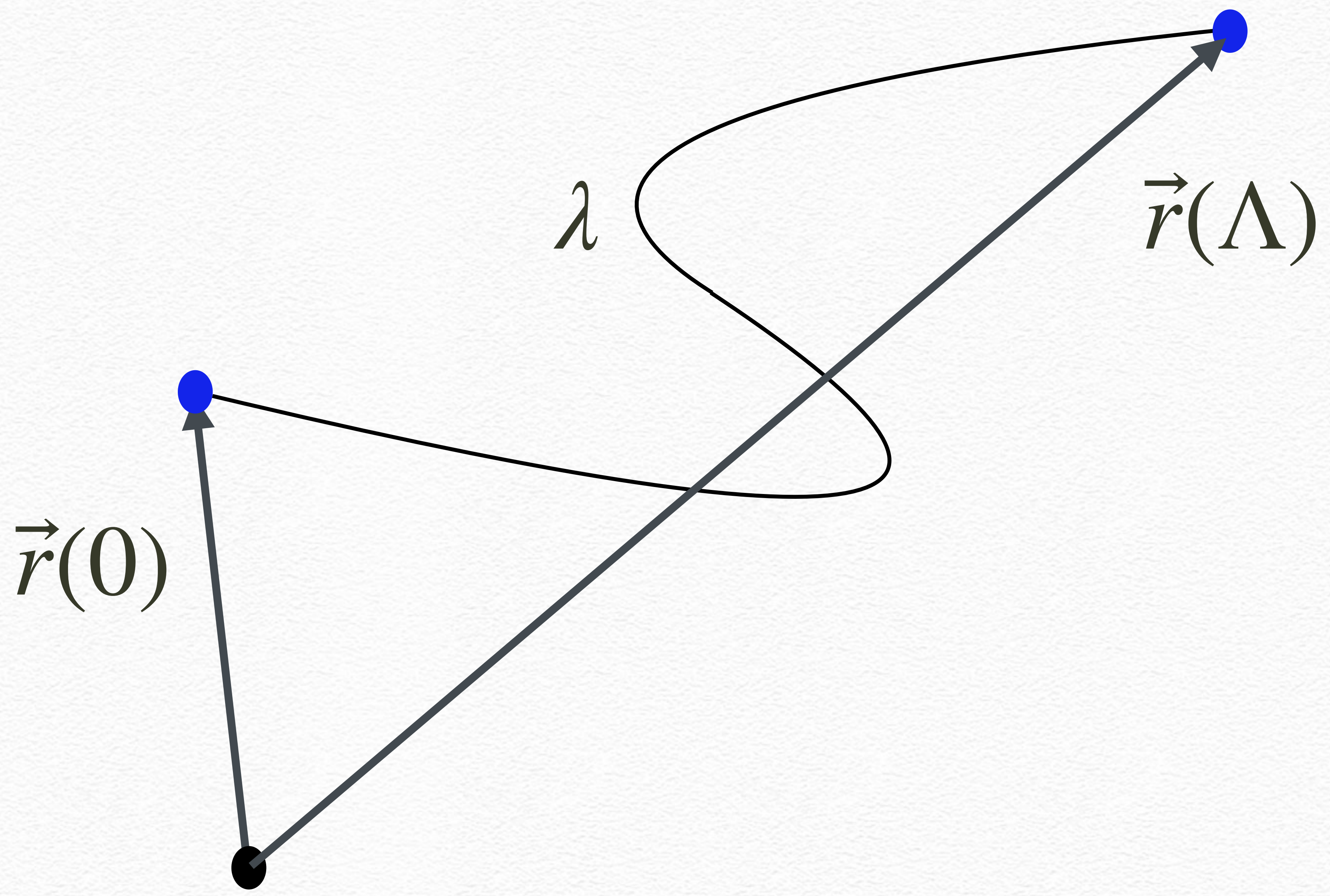
- súradnice bodu sa na tejto krivke menia ako tri funkcie $x(\lambda),\ y(\lambda),\ z(\lambda)$ a ich infinitezimálne zmeny vyzerajú takto:

$$dx = \frac{dx(\lambda)}{d\lambda}\,d\lambda \qquad dy = \frac{dy(\lambda)}{d\lambda}\,d\lambda \qquad dz = \frac{dz(\lambda)}{d\lambda}\,d\lambda$$

- práca ako integrál zo skalárneho súčinu prejde na integrál

$$\int_{\vec{r}_R}^{\vec{r}} F(\vec{r}\,')\,.\,d\vec{r}\,' = \int_0^{\Lambda} \left(F_x[x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)]\frac{dx(\lambda)}{d\lambda} \;+\; \cdots \right) d\lambda$$

kde tri bodky sú za analogické členy pre y a z



po ktorej ceste sa má definovať E_p ?

- ak sa má mechanická energia (t.j. súčet kinetickej a potenciálnej energie) zachovávať, treba potenciálnu energiu definovať po tej ceste, po ktorej sa bude teleso pohybovať
- lenže takto definovaná potenciálna energia je nám úplne nanič, pretože ak na jej definíciu potrebujeme poznať, ako sa bude teleso pod vplyvom danej sily pohybovať, tak už nijakú potenciálnu energiu nepotrebujeme (ak poznáme pohyb, vieme všetko)
- čiže asi jediná rozumná možnosť je definovať potenciálnu energiu len pre také silové polia, v ktorých práca pri prechode medzi ľubovoľnými dvomi bodmi nezávisí od ich spojnice, t.j. je pre všetky spojnice rovnaká – takým poliam sa hovorí konzervatívne (pretože iba v nich sa zachováva – po latinsky konzervuje – mechanická energia)
- no dobre, ale existujú také silové polia?   našťastie áno, ako si hneď teraz ukážeme

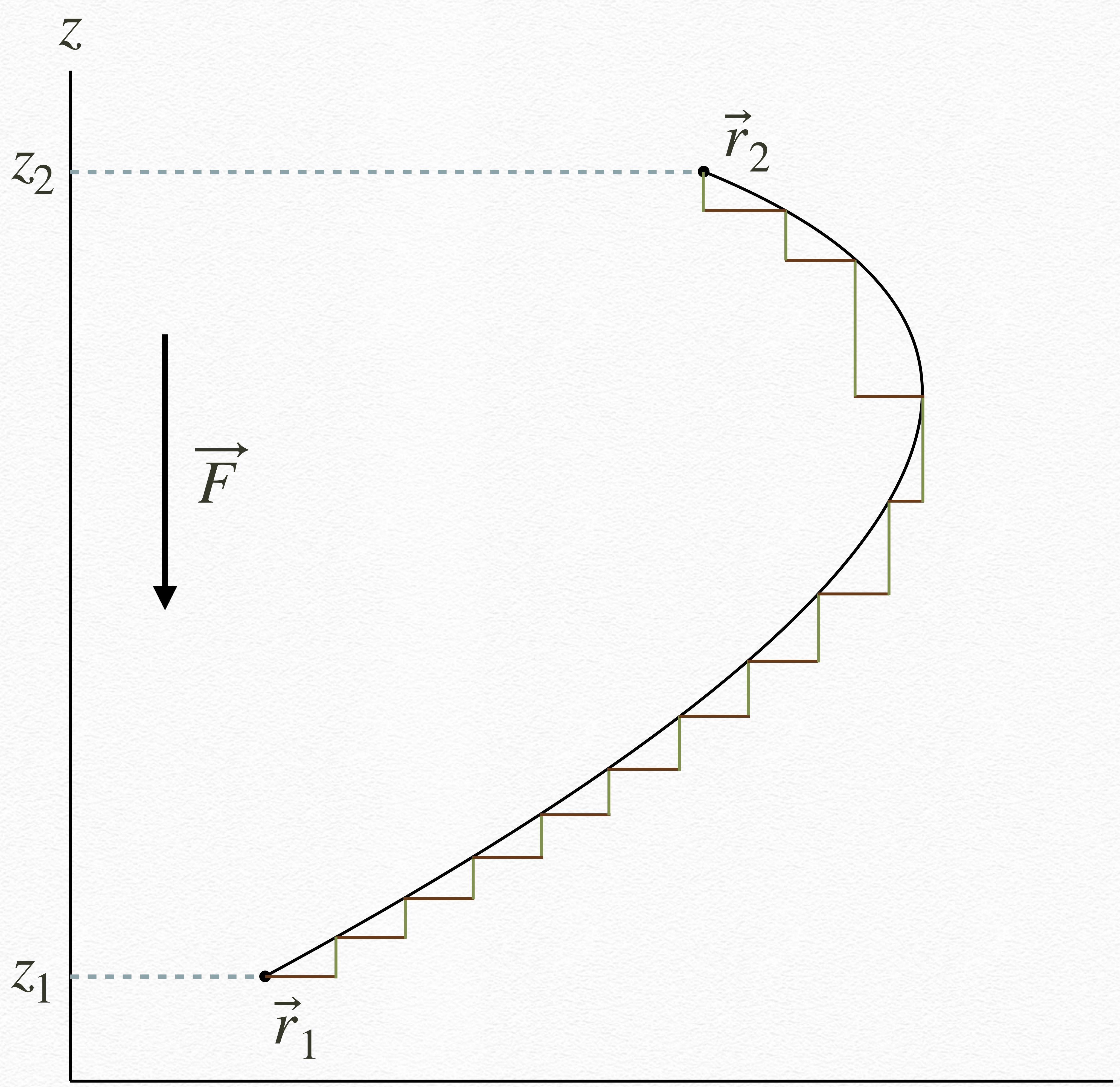
konzervatívnosť homogénneho poľa

- uvažujme homogénne silové pole orientované v smere osi z, t.j. pole s kartézskymi súradnicami $(0,0,F)$

- pre ľubovoľný vektor $d\vec{r}$ dostaneme
$$\vec{F}\,.\,d\vec{r} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = F\,dz$$

- pre prácu tohto poľa dostaneme pre ľubovoľnú spojnicu bodov $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$
$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\,.\,d\vec{r} = \int_{z_1}^{z_2} F\,dz = F\,\left(z_2 - z_1\right)$$

- rovnaký výsledok pre všetky spojnice



prispieva len výška, nie dĺžka schodov

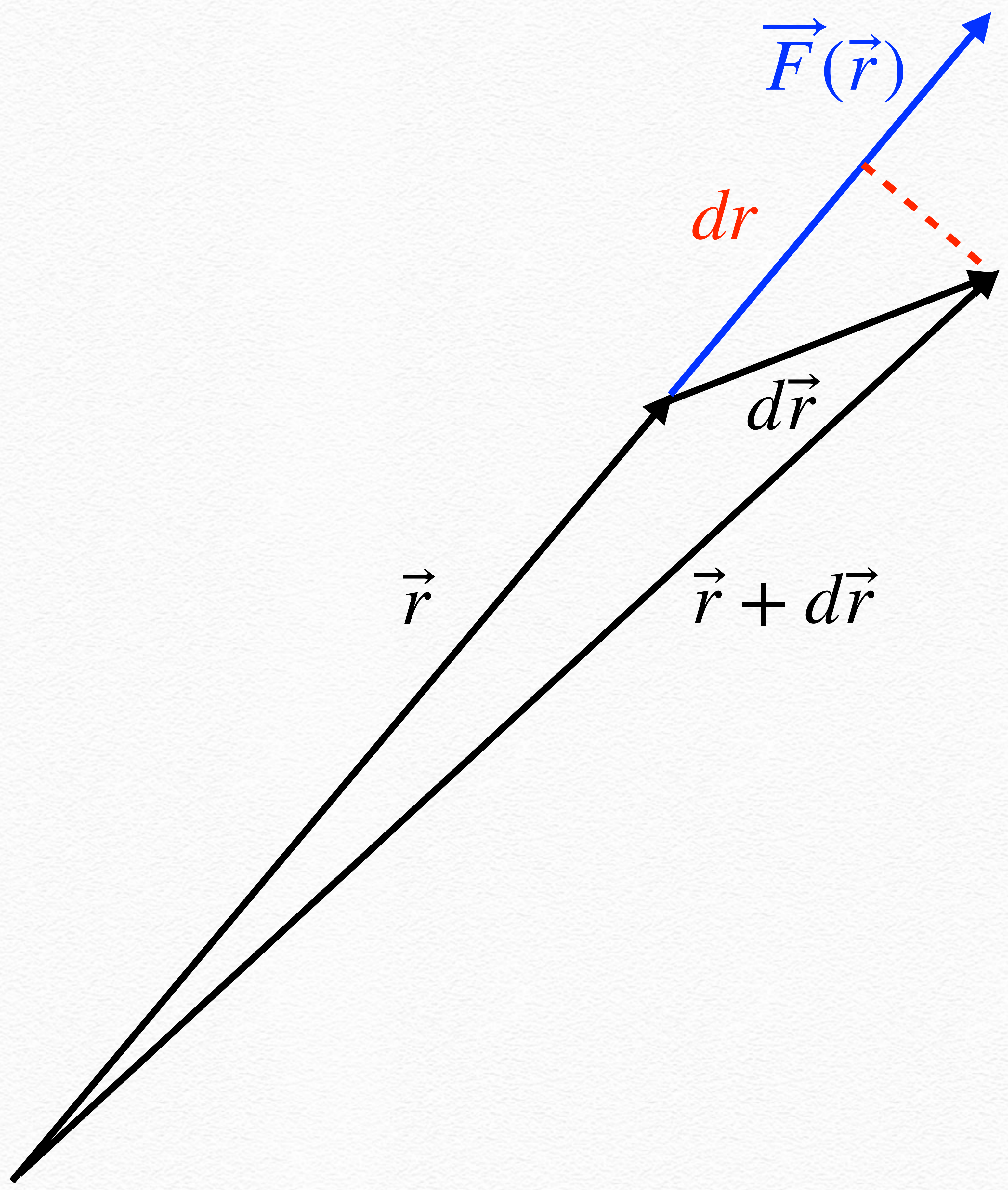
radiálne pole

- uvažujme silové pole orientované v smere polohového vektora, pričom jeho veľkosť závisí len od veľkosti polohového vektora

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\ \vec{r} \qquad \left(= \pm\, F(r)\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

- takéto pole budeme nazývať radiálne (napríklad gravitačné pole je radiálne)

- v radiálnom poli dostaneme pre prácu pri posunutí o ľubovoľný malý vektor $d\vec{r}$
$\vec{F} \,.\, d\vec{r} = f(r)\ \vec{r} \,.\, d\vec{r} = f(r)\ r\ dr$
kde dr je rozdiel vzdialeností od počiatku, nie je to veľkosť vektora $d\vec{r}$ ($dr \neq |d\vec{r}|$)

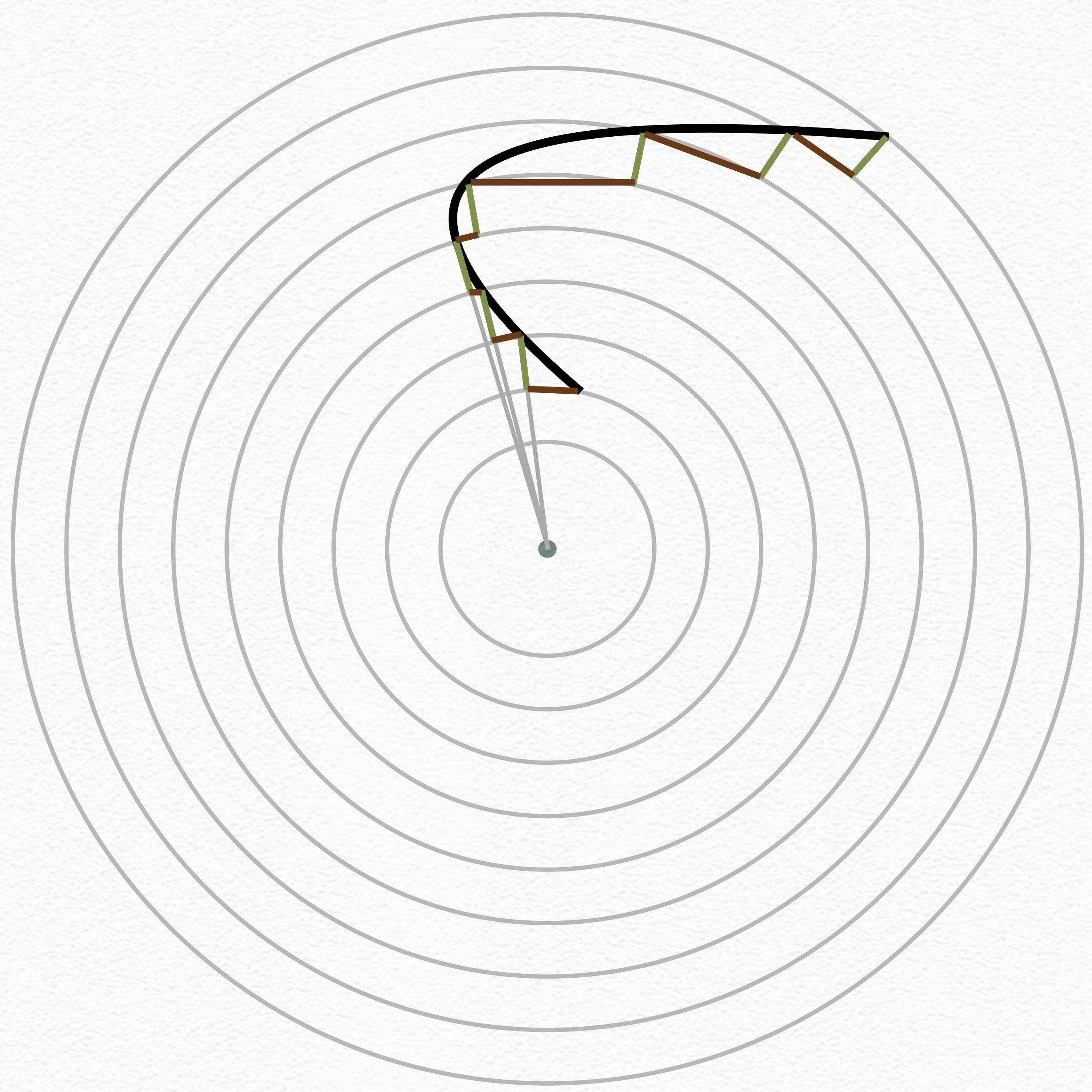


konzervatívnosť radiálneho poľa

- pre prácu radiálneho poľa dostaneme pre ľubovoľnú spojnicu bodov $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \overrightarrow{F} \, . \, d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} f(r)\, r\, dr$$

- to znamená, že výsledok je rovnaký pre všetky spojnice dvoch bodov (závisí od ich počiatočnej a konečnej vzdialenosti od počiatku, ale nezávisí od iných detailov integračnej cesty)



prispieva len posun v radiálnom smere nie pozdĺž kružníc

E_p pre trojrozmerný LHO

- sila pôsobiaca na izotropný (vo všetkých smeroch rovnaký) LHO:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -k\vec{r}$$

- potenciálna energia tohto radiálneho poľa:

$$E_p(\vec{r}) = E_R - \int_{\vec{r}_R}^{\vec{r}} -k\,\vec{r}\,'.\,d\vec{r}\,' = E_R + \int_{r_R}^{r} k\,r'\,dr' = E_R + \left[\frac{1}{2}kr'^2\right]_{r_R}^{r}$$

- vhodná voľba konštánt: $\vec{r}_R = \vec{0}$ a $E_R = 0$

$$\boxed{E_p(\vec{r}) = \frac{1}{2}kr^2}$$

E_p pre Newtonove grav. pole

- Newtonova gravitačná sila

$$\overrightarrow{F}(\vec{r}) = -\frac{\kappa Mm}{r^3}\,\vec{r}$$

- potenciálna energia tohto radiálneho poľa:

$$E_p(\vec{r}) = E_R - \int_{\vec{r}_R}^{\vec{r}} -\frac{\kappa Mm}{r'^3}\,\vec{r}\,'\,.\,d\vec{r}\,' = E_R + \int_{r_R}^{r} \frac{\kappa Mm}{r'^2}\,dr' = E_R + \left[-\frac{\kappa Mm}{r'}\right]_{r_R}^{r}$$

- vhodná voľba konštánt: $r_R = \infty$ a $E_R = 0$

$$\boxed{E_p(\vec{r}) = -\frac{\kappa Mm}{r}}$$

zákon (ne)zachovania energie

- ak sú v hre len konzervatívne sily, potom sa mechanická energia (definovaná ako súčet kinetickej a potenciálnej) zachováva

- medzi konzervatívne sily počítame aj sily, ktoré sú vždy kolmé na rýchlosť, napríklad magnetickú silu $\overrightarrow{F}(\vec{r},t) = q\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}(\vec{r},t)$ ale aj rôzne hladké šmykľavky, mantinely, napnuté špagátiky (tieto sily konajú nulovú prácu a majú nulovú potenciálnu enegiu)

- ak sú v hre aj nekonzervatívne sily, napríklad sily závislé od času $\overrightarrow{F}(\vec{r},t) = q\overrightarrow{E}(\vec{r},t)$ či rýchlosti (odpor prostredia alebo trenie, ktoré síce nezávisí od veľkosti rýchlosti, ale závisí od jej smeru): zmena mechanickej energie = práca nekonzervatívnych síl

matematické kyvadlo

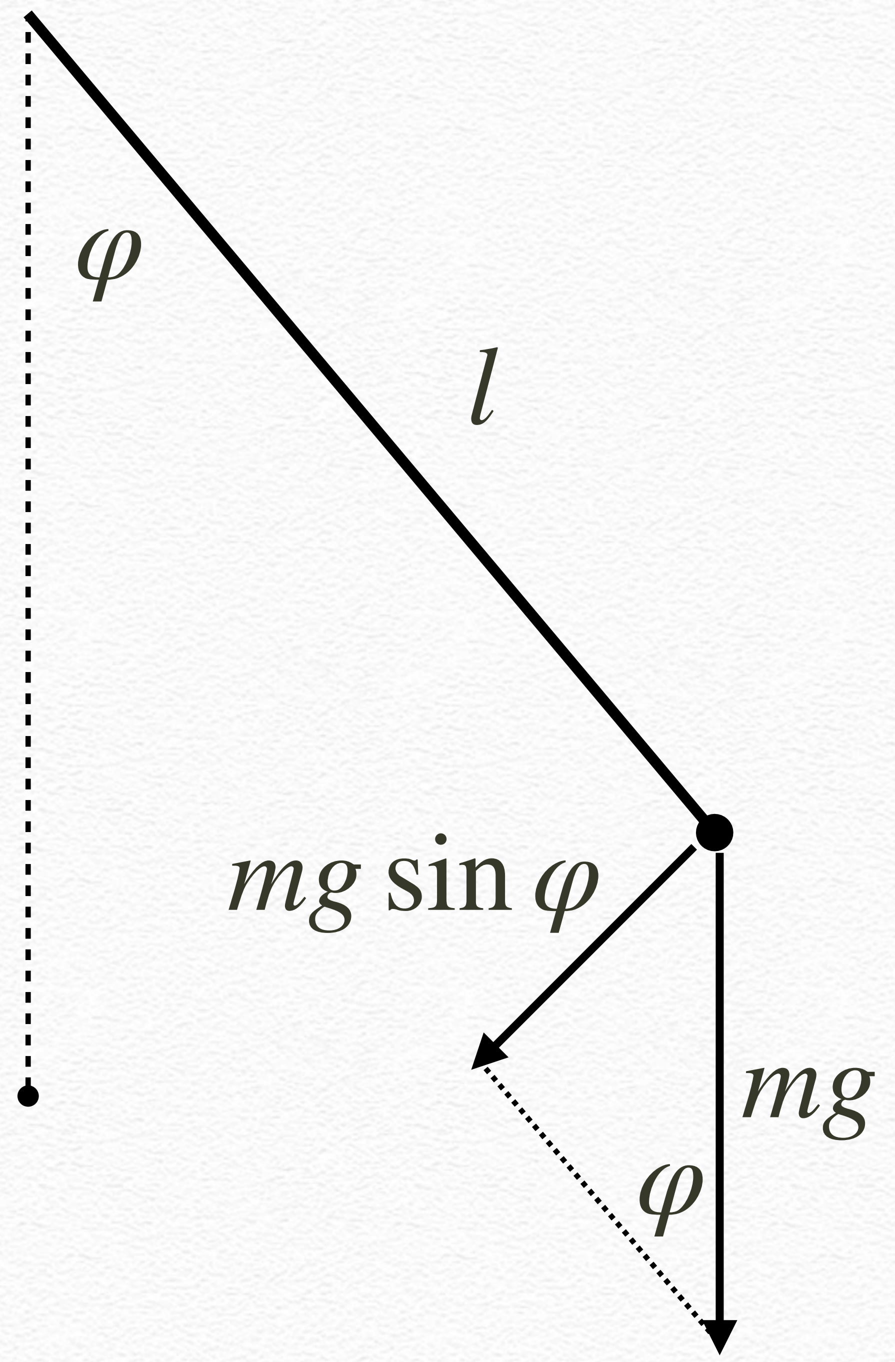
- uvažujme tzv. matematické kyvadlo, čiže teliesko na tyčke zanedbateľnej hmotnosti

- z Newtonovho zákona sily dostávame v smere kolmom na tyčku (pozri obrázok):

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi$$

- toto je ťažká nelineárna diferenciálna rovnica (pre malé uhly síce platí $\sin\varphi \approx \varphi$ a rovnica prejde na lineárnu, ale to nás teraz nezaujíma)

- aká je amplitúda kmitov, ak je max. rýchlosť $v_{\max}$?

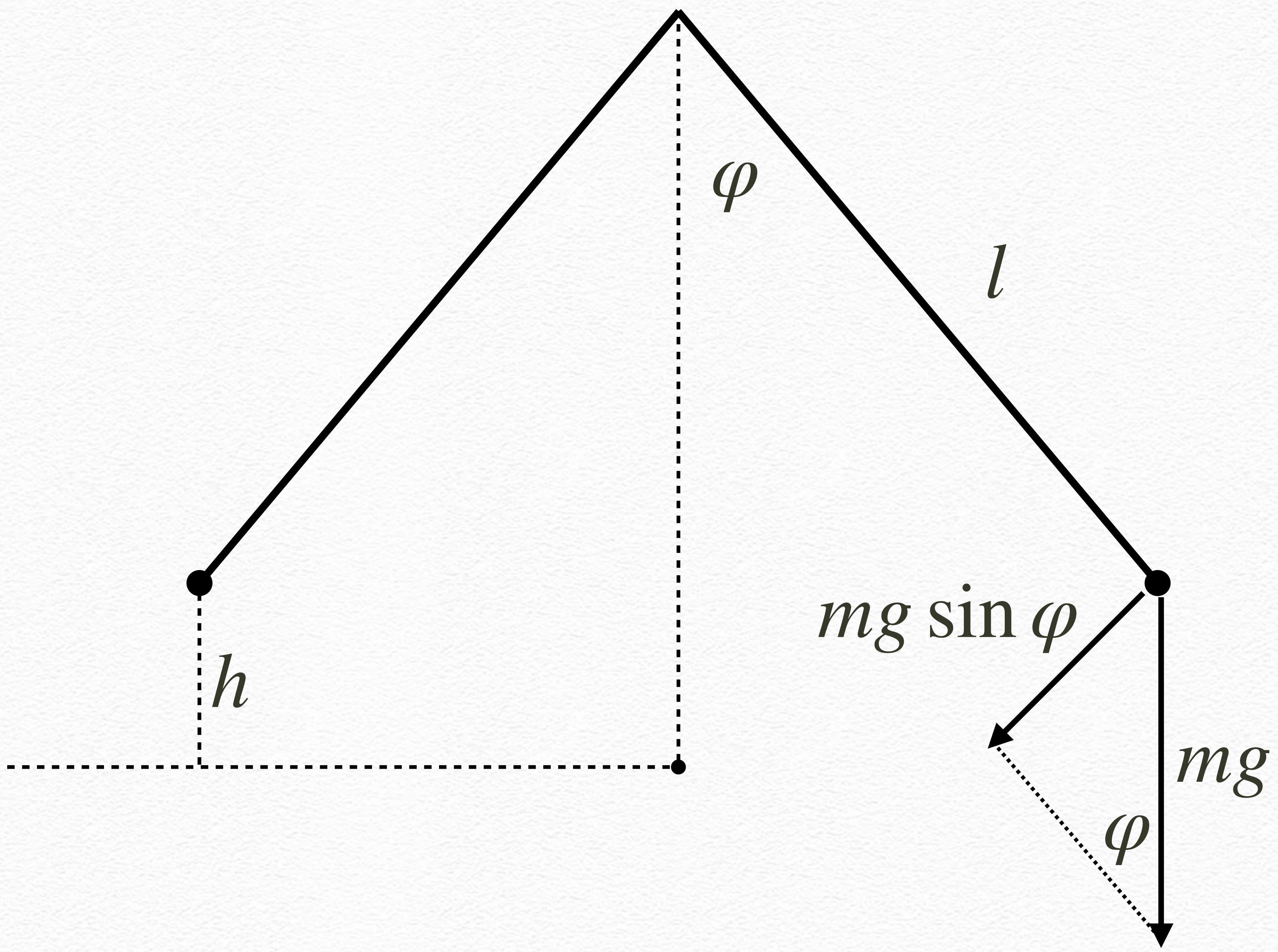


$$v = l\dot{\varphi}$$

$$a = l\ddot{\varphi}$$

príklad užitočnosti zachovania energie

- tyčka pôsobí na teliesko silou len v smere tyčky, teliesko sa pohybuje len v smere kolmom, takže tyčka pôsobí silou, ktorá je OK z hľadiska zákona zachovania energie
- homogénne gravitačné pole je konzervatívne
- zákon zachovania energie nám rýchlo povie, aká je amplitúda kmitov, ak je maximálna rýchlosť $v_{\max}$
- $\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \text{const}$
- $\frac{1}{2}mv_{\max}^2 + 0 = 0 + mgh_{\max} \quad \Rightarrow \quad h_{\max} = \frac{v_{\max}^2}{2g}$



$$v = l\dot{\varphi}$$

$$h = l(1 - \cos\varphi)$$

nepovinné

pohyb matematického kyvadla

nepovinné

- zákon zachovania energie umožňuje nahradiť nelineárnu pohybovú rovnicu druhého rádu rovnicou prvého rádu (hoci stále nelineárnou)

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos\varphi) = E$$

- to je rovnica typu $\dot{\varphi} = f(\varphi)$ a tie vieme riešiť (t. j. vieme ich previesť na integrovanie – už sme o tom hovorili v jednej nepovinnej časti)
- v tomto prípade zákon zachovania energie umožňuje odpovedať na niektoré jednoduché otázky, ale v skutočnosti umožňuje ešte oveľa viac: nájsť kompletne celý pohyb matematického kyvadla

čitateľský tip na záver

- mechanická energia sa niekedy nezachováva, ale celková energia (súčet všetkých foriem energie) sa vždy zachováva
- rôzne formy energie sú definované práve tak, aby sa ich celkový súčet zachovával (netriviálnou vlastnosťou nášho sveta je možnosť definovať ich tak, aby to platilo)
- skvelé klasické krátke nepovinné čítanie na túto tému: https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_04.html
stačí prvá časť prednášky (5 odsekov) : What is energy?