Moment hybnosti

dôležitá fyzikálna veličina

mechanika 21

ďalšia čudná kombinácia písmen

- k zákonom zachovania energie a hybnosti sme dospeli tak, že sme skúmali čudné kombinácie veličín $\frac{1}{2}mv^2$ a $m\overrightarrow{v}$ a ukázali sme o nich, že za určitých okolostí pre ne platia práve tie zákony zachovania
- ďalší zákon zachovania dostaneme podobným spôsobom z inej čudnej kombinácie písmen, pričom táto kombinácia písmen (veličín) dáva zmysel len vo viac ako jednom rozmere
- od energie a hybnosti sa táto nová zachovávajúca sa veličina líši aj tým, že pre svoju definíciu potrebuje značne egocentrický pohľad

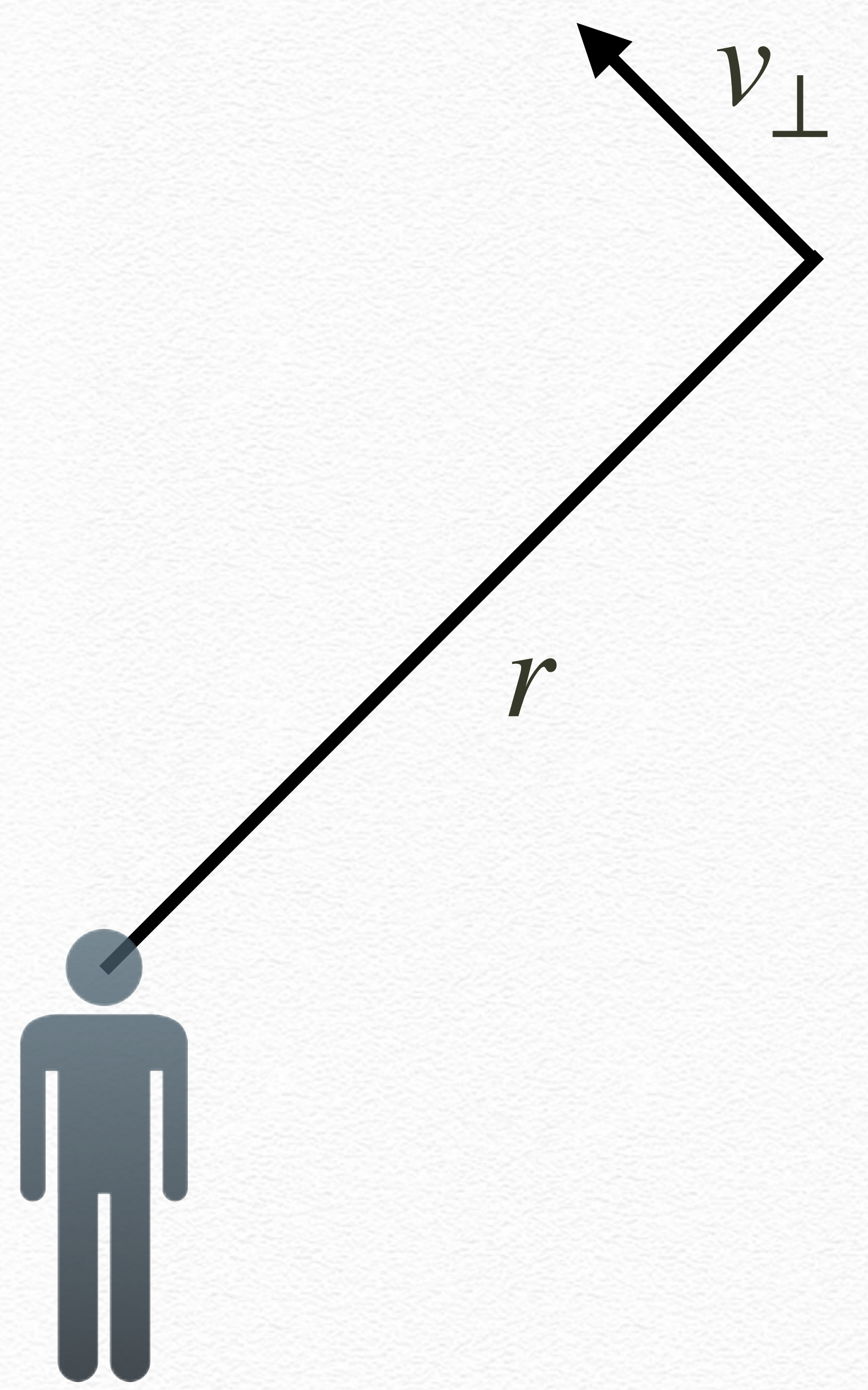
svet z pohľadu egocentrika

- predstavme si človeka, ktorý má rád len také fyzikálne veličiny, ktoré sa nejakým spôsobom vzťahujú priamo k nemu

- ľúbi napríklad veličinu r, ktorá vyjadruje ako ďaleko od neho je konkrétne teleso

- alebo má rád práve tú zložku rýchlosti telesa, ktorú vidí voľným okom, čiže zložku kolmú na jeho spojnicu s telesom

- a z týchto dvoch si vyrobí veličinu $L = m\, r\, v_{\perp}$

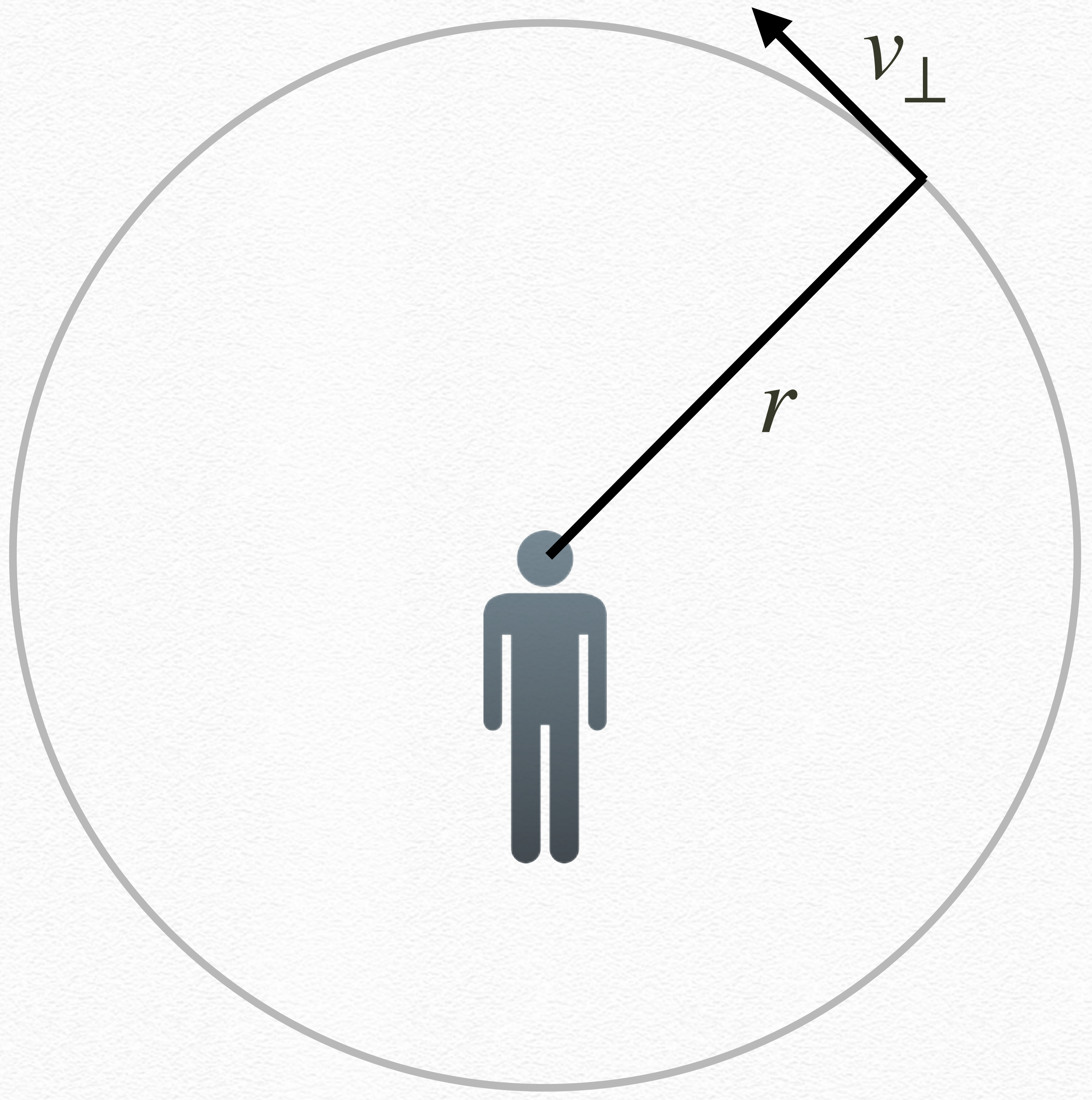


súvis veličiny L s rotáciami

- egocentrika zaujíma, ako sa svet točí okolo neho a veličina $L = m\,r\,v_{\perp}$ istým spôsobom súvisí práve s rotáciami

- napríklad pre rovnomerný pohyb po kružnici sa táto veličina zachováva (ak je definovaná vzhľadom k stredu kružnice)

- a ako uvidíme neskôr (v ďalšej prednáške), zachováva sa aj pri Keplerovom eliptickom pohybe planét – práve tam si ju ľudia všimli

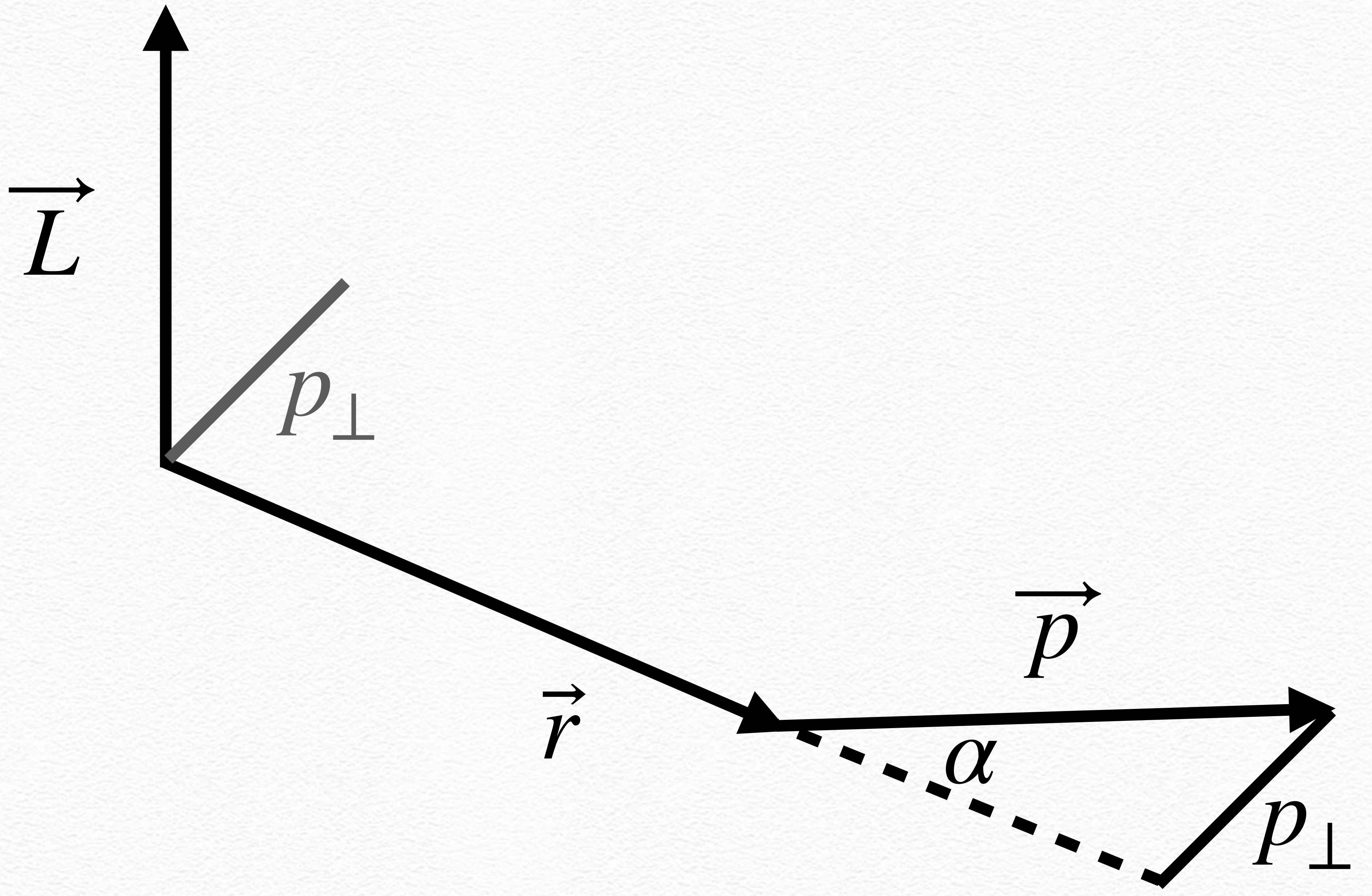


vektor momentu hybnosti

- veličinu L môžeme zapísať pomocou vektorového súčinu polohy a hybnosti
$$L = r\,p\,\sin\alpha \; = |\vec{r} \times \overrightarrow{p}|$$

- pre fyziku v 2D svete je to len nejaký umelý zápis veličiny L, pre fyziku v 3D nie je zatiaľ jasné, či bude dôležité L alebo
$$\overrightarrow{L} = \vec{r} \times \overrightarrow{p}$$

- ukážeme (o chvíľu), že dôležitou veličinou je ten vektorový súčin, nielen jeho veľkosť



náš egocenter sa posadil
do počiatku vzťažnej sústavy

svet z pohľadu iného egocentrika

- ak je počiatok súradnicovej sústavy obsadený jedným egocentrikom a iný egocentrik sedí v mieste $\overrightarrow{R}$, môže si ten druhý definovať moment hybnosti vzhľadom k sebe takto:

$$\overrightarrow{L} = \left(\vec{r} - \overrightarrow{R}\right) \times \overrightarrow{p}$$

- všimnime si, že moment hybnosti je definovaný vzhľadom k nejakému konkrétnemu bodu
- pre jednoduchosť budeme odteraz uvažovať všetky momenty vzhľadom k počiatku (t.j. pre $\overrightarrow{R} = 0$) a všeobecné $\overrightarrow{R}$ budeme uvažovať len vtedy, keď to bude fakt potrebné
- poznámka: na strednej škole ste sa niektorí možno stretli s nejakým momentom, ktorý bol definovaný vzhľadom k určitej osi – ale tu nemáme v hre nijakú os a momenty sú definované vzhľadom k bodu

rýchlosť zmeny momentu hybnosti

- rýchlosť zmeny čohokoľvek je časová derivácia tohto čohokoľvek
- pre časovú deriváciu vektorového súčinu platí Leibnizovo pravidlo (ktoré platí pre každú vec, ktorá si zaslúži meno súčin)

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \dot{\vec{a}} \times \vec{b} + \vec{a} \times \dot{\vec{b}}$$

- dôkaz: najrýchlejšie v kartézskych súradniciach, využitím

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{e}_x + \cdots$$

- $$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$

zákon (ne)zachovania mom. hybnosti

- veličina

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

sa volá moment sily ($\vec{F}$ pôsobiacej na teleso s polohovým vektorom $\vec{r}$)

- rýchlosť zmeny momentu hybnosti je teda rovná momentu sily

$$\boxed{\dot{\vec{L}} = \vec{M}}$$

- zákon zachovania momentu hybnosti (pre jednu časticu):

ak je moment sily nulový, moment hybnosti sa zachováva

- všetko to platí aj pre momenty vzhľadom k bodu $\vec{R}$, pričom $\vec{M} = (\vec{r} - \vec{R}) \times \vec{F}$

zachovanie $\overrightarrow{L}$ v radiálnom silovom poli

- keď má sila tvar $\overrightarrow{F}(\vec{r}) = f(r)\,\vec{r}$ (takej sile sa hovorí radiálna) jej moment sily (vzhľadom k počiatku) je
$$\overrightarrow{M} = \vec{r} \times f(r)\,\vec{r} = 0$$
(lebo vektorový súčin vektora so sebou samým je nulový)

- v radiálnom silovom poli (napríklad v Newtonovom gravitačnom poli) sa teda moment hybnosti zachováva

- mimochodom, práve toto je hlavný dôvod, prečo sa zákonmi zachovania zaoberáme zrovna teraz, pred vyšetrovaním pohybu telies v Newtonovom gravitačnom poli

prečo je dôležité $\overrightarrow{L}$ a nielen L

- pri zavedení vektora momentu hybnosti, nebolo jasné, či má dobrý fyzikálny význam len jeho veľkosť alebo aj jeho smer

- zákon (ne)zachovania sme potom odvodili pre vektor $\overrightarrow{L}$

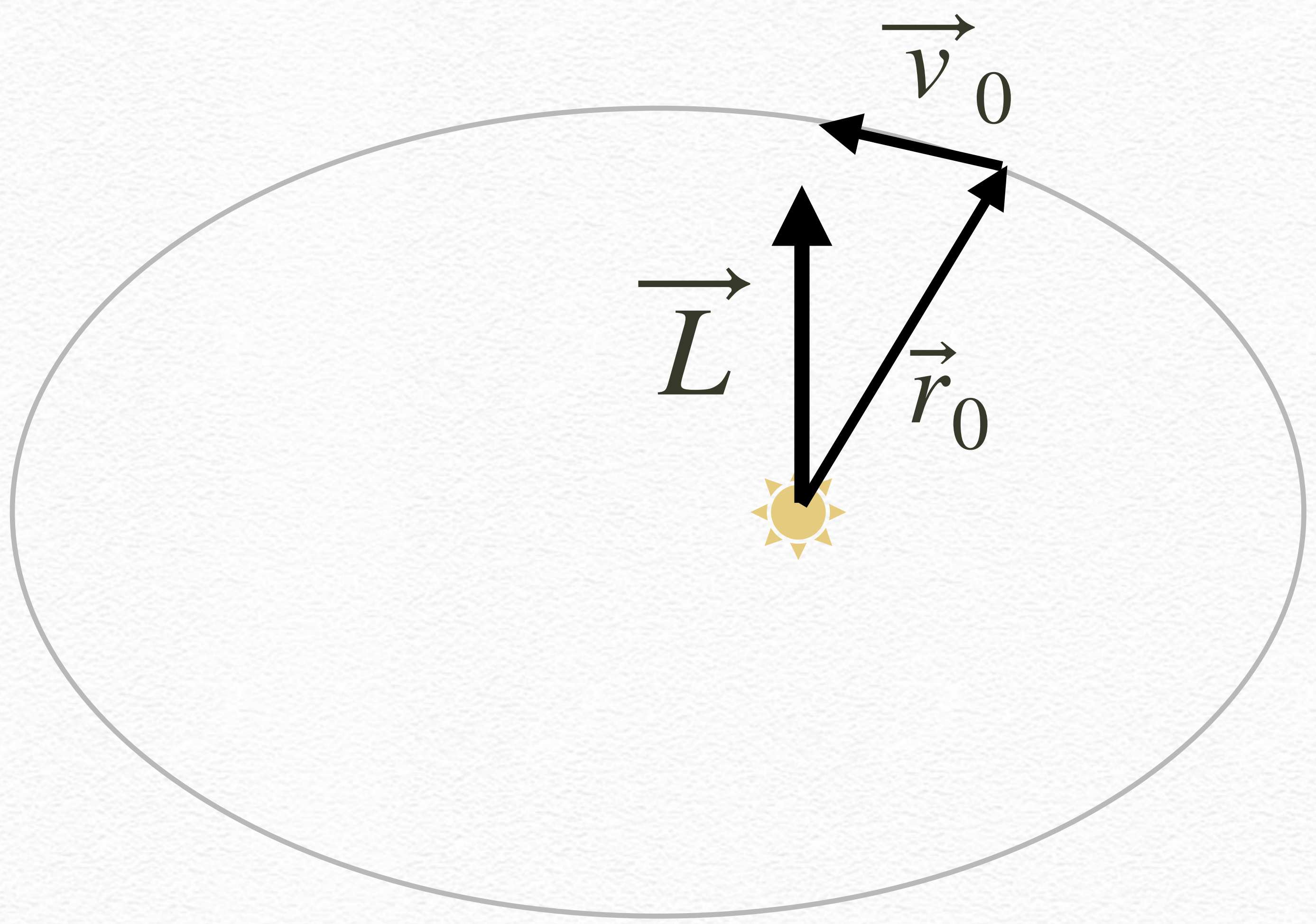
- premyslite si, že zákon zachovania sa z vektora na veľkosť, dedí, ale zákon nezachovania sa z vektora na veľkosť nededí

$$\dot{\overrightarrow{L}} = 0 \;\Rightarrow\; \dot{L} = 0 \qquad\qquad \dot{\overrightarrow{L}} = \overrightarrow{M} \;\not\Rightarrow\; \dot{L} = M$$

- vtip je v tom, že $|\dot{\overrightarrow{L}}| \neq \dot{L}$ (ukážte to na konkrétnom príklade)

rovinný pohyb planét

- ako príklad využitia zachovania vektora momentu hybnosti nájdeme odpoveď na otázku: Prečo je troj-rozmerný pohyb planét v skutočnosti dvojrozmerný?
- počiatočnou polohou a rýchlosťou resp. hybnosťou planéty je definovaná rovina
- moment hybnosti $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ (ktorý sa počas celého pohybu zachováva) je kolmý na túto rovinu
- ak by planéta opúšťala túto rovinu, jej polohový vektor $\vec{r}$ by v nej ešte ležal, ale hybnosť $\vec{p} = m\vec{v}$ už nie, to by však znamenalo, že (zachovávajúci sa) moment hybnosti by zmenil smer – spor



jedna častica alebo viac častíc?

- zákon zachovania energie bol užitočný už pre jednu časticu
- zákon zachovania hybnosti bol užitočný pre sústavu viac častíc
- ako je to so zákonom zachovania momentu hybnosti?
- ten je užitočný už pre jednu časticu (napríklad planetárny pohyb)
- ale je užitočný aj pre viac častíc
- takže si ho teraz sformulujeme aj pre viac častíc

momenty sústavy viacerých častíc

- pre sústavu N hmotných bodov definujeme momenty (vzhľadom k počiatku)

$$\overrightarrow{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \overrightarrow{p}_i \qquad \overrightarrow{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \overrightarrow{F}_i$$

- pre momenty vzhľadom k inému bodu $\overrightarrow{R}$, treba v definíciách zameniť $\vec{r}_i \to \vec{r}_i - \overrightarrow{R}$

- rýchlosť zmeny momentu hybnosti: $\dot{\overrightarrow{L}} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}_i \times \overrightarrow{p}_i + \vec{r}_i \times \dot{\overrightarrow{p}}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \overrightarrow{F}_i$

($\dot{\vec{r}}_i \times \overrightarrow{p}_i = \overrightarrow{v}_i \times m_i \overrightarrow{v}_i = 0$ a $\dot{\overrightarrow{p}}_i = \overrightarrow{F}_i$)

(zdanlivý) problém vnútorných síl

- na momente sily je blbé to, že doň vstupujú aj vnútorné sily, ktoré väčšinou nepoznáme
- ak označíme symbolom $\vec{F}_{ij}^{\text{vnut}}$ vnútornú silu, ktorou pôsobí j-ty bod na i-ty bod, potom
$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{vonk}} + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij}^{\text{vnut}}$$
- moment sily môžeme teda zapísať ako
$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{vonk}} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{\text{vnut}}$$
- ukážeme teraz, že tá dvojitá suma je nulová
- zákon akcie a reakcie: $\vec{F}_{ij}^{\text{vnut}} = -\vec{F}_{ji}^{\text{vnut}}$
- finta: $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} = \sum_{i<j}^{N} (a_{ij} + a_{ji}) + \sum_{i}^{N} a_{ii}$
- hmotné body nepôsobia samé na seba: $\vec{F}_{ii} = 0$
- čiže $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{\text{vnut}} = \sum_{i<j}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}^{\text{vnut}}$
- ak vnútorné sily pôsobia po spojniciach bodov tak $\vec{F}_{ij}^{\text{vnut}} \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j \quad \Rightarrow \quad (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}^{\text{vnut}} = 0$
hotovo: vnútorné sily neprispievajú do $\vec{M}$

príklady užitočnosti

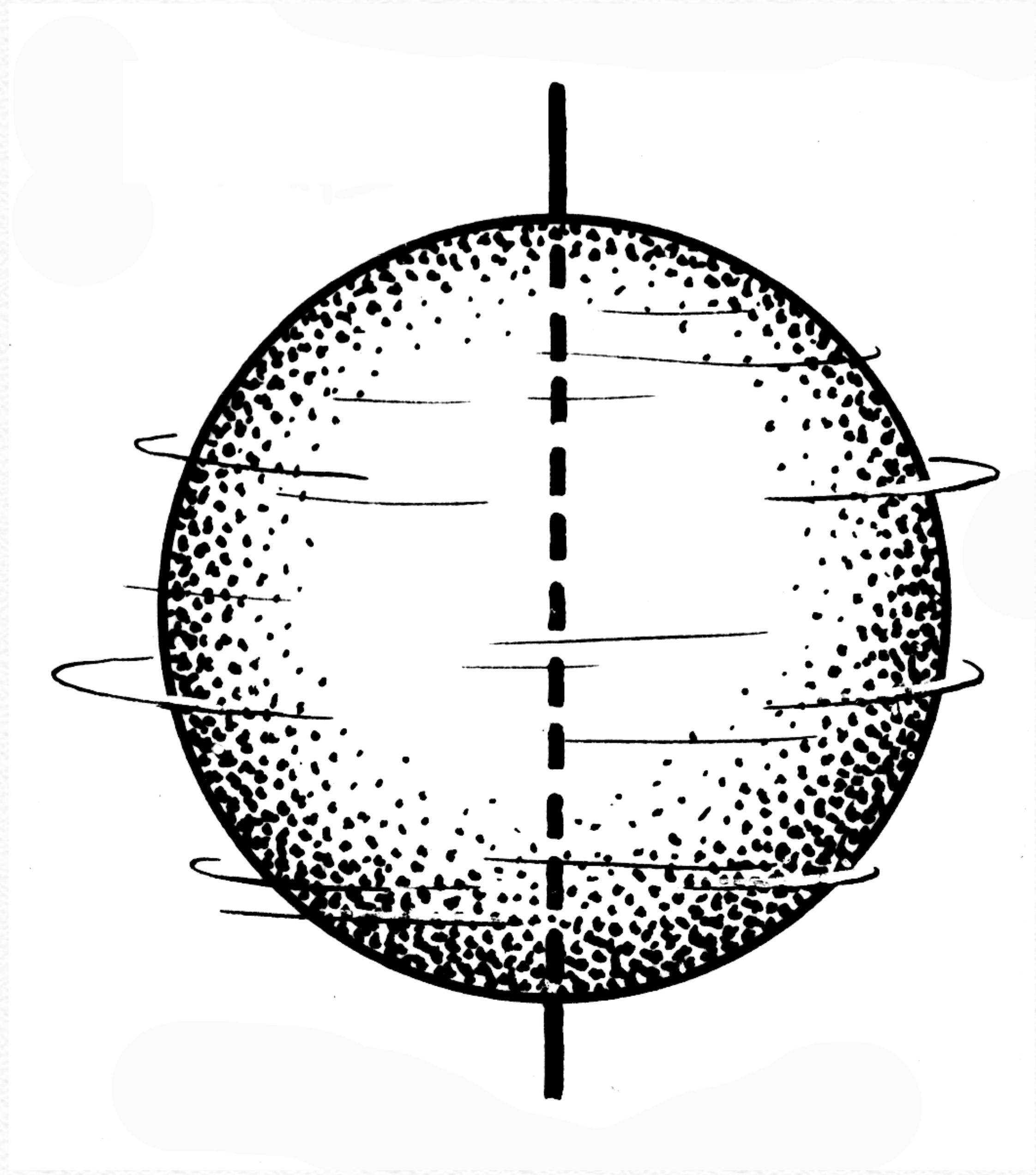
- zákon zachovania momentu hybnosti pre jednu časticu hrá významnú úlohu v astronómii, kde úzko súvisí s druhým Keplerovým zákonom (o tomto bude reč na budúcej prednáške)

- zákon zachovania momentu hybnosti hrá mimoriadne dôležitú úlohu aj v mechanike tuhého telesa (o tom bude reč v ďalších častiach tohto kurzu)

- v tejto prednáške spomenieme už len jeden príklad užitočnosti zákona zachovania momentu hybnosti, ďalšie príklady budú neskôr

súvis veličiny $\overrightarrow{L}$ s rotáciami (napr. planét)

- ak sa okolo egocentrika pohybuje viac telies, ich momenty hybnosti sa sčitujú ako vektory
- čiže ak sa aj všetko točí okolo egocentrika, výsledný moment hybnosti môže byť nulový (ak sa momenty jednotlivých telies vyrušia)
- výnimkou z tohto všeobecného tvrdenia je tuhé teleso točiace sa okolo nejakej osi
- v takom telese sa všetky jeho časti pohybujú v rovnobežných rovinách a ich momenty hybnosti sa sčitujú všetky v jednom smere



čím väčšia uhlová rýchlosť rotácie
tým vyššie rýchlosti jednotlivých častí
tým vyšší moment hybnosti

rotácia vesmírnych telies na záver

- Slnko, planéty aj mesiace rotujú okolo vlastnej osi. Prečo?
- odpoveď je vcelku prirodzená, ak vesmírne telesá vznikli gravitačným (alebo iným) priťahovaním z pôvodného plynu či prachu
- ak boli momenty hybnosti plynových či prachových častíc rozložené náhodne, potom celkový moment hybnosti bol blízky nule, ale asi nie presne nulový (nenulové hodnoty celkového momentu majú pomerne vysokú pravdepodobnosť aj pri náhodnom rozložení momentov častíc)
- pri pôsobení vnútorných gravitačných síl sa moment hybnosti zachováva, čiže výsledné teleso má pôvodný nenulový moment hybnosti, čiže rotuje