Pohyb v gravitačnom poli

planéty a satelity

mechanika 22

dôležitosť planetárneho pohybu

- teleso v Newtonovom gravitačnom (resp. Coulombovom elektrostatickom) poli patrí spolu s LHO k najdôležitejším systémom klasickej a dokonca aj kvantovej mechaniky (tam sa to volá atóm vodíka)
- tento systém je veľmi dôležitý z historického hľadiska (objav Newtonovej mechaniky), z astronomického hľadiska (celkový obraz sveta) aj z praktického hľadiska (satelity)
- na rozdiel od LHO je pohybová rovnica pre tento systém nelineárna, čiže podstatne ťažšia

čo sa chceme naučiť

- v prípade LHO sme sa naučili riešiť lineárne diferenciálne rovnice

- v prípade planetárneho pohybu sa nebudeme učiť systematicky riešiť nelineárne diferenciálne rovnice (pretože to nikto nevie, aj keď túto konkrétnu rovnicu riešiť vieme)

- namiesto toho sa naučíme pár štandardných a veľmi užitočných kúzelníckych trikov

problém dvoch telies

- majme dve telesá, ktoré na seba navzájom pôsobia a inak sú izolované

- pohybové rovnice telies 1 a 2 sú (s uvážením zákona akcie a reakcie)
$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \overrightarrow{F} \quad \text{a} \quad m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -\overrightarrow{F}$$

- ak sila závisí len od vzájomnej polohy $\overrightarrow{\rho} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ potom môžeme vhodnou lineárnou kombináciou rovníc získať rovnicu pre $\overrightarrow{\rho}$ (čím z problému dvoch telies vznikne problém jedného telesa)

- **<u>trik</u>** (vhodná lineárna kombinácia): vynásobíme prvú (druhú) rovnicu druhou (prvou) hmotnosťou
$$m_1 m_2 \ddot{\vec{r}}_1 = m_2 \overrightarrow{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$
$$m_1 m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -m_1 \overrightarrow{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$
a tieto rovnice od seba odčítame:
$$\boxed{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{\overrightarrow{\rho}} = \overrightarrow{F}(\overrightarrow{\rho})}$$

- problém dvoch telies sme previedli na problém jedného telesa s tzv. redukovanou hmotnosťou $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

hviezda a planéta

- riešením pohybovej rovnice pre teleso v gravitačnom poli teda zároveň riešime pohybovú rovnicu pre relatívnu polohu hviezdy a planéty resp. planéty a satelitu
- poznámka: v týchto prípadoch je jedna z hmotností rádovo menšia ako druhá, napr. $m_1 \ll m_2$, čiže $m_1 + m_2 \approx m_2$ redukovaná hmotnosť je vtedy $\mu \approx m_1$
- ostáva ešte vyriešiť otázku, ako z nájdenej relatívnej polohy $\overrightarrow{\rho}(t)$ nájdeme $\vec{r}_1(t)$ a $\vec{r}_2(t)$
- **trik** (iná dobrá lineárna kombinácia): sčítame rovnice pre $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$
$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = 0$$
čo nie je nič iné ako pohybová rovnica hmotného stredu $\vec{r} = (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)/m$ (kde $m = m_1 + m_2$ je celková hmotnosť)
$$\boxed{m\ddot{\vec{r}} = 0}$$
- jednoduchou algebrou teraz dostaneme
$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \frac{\mu}{m_1}\overrightarrow{\rho} \qquad \vec{r}_2 = \vec{r} - \frac{\mu}{m_2}\overrightarrow{\rho}$$

pohyb v gravitačnom poli

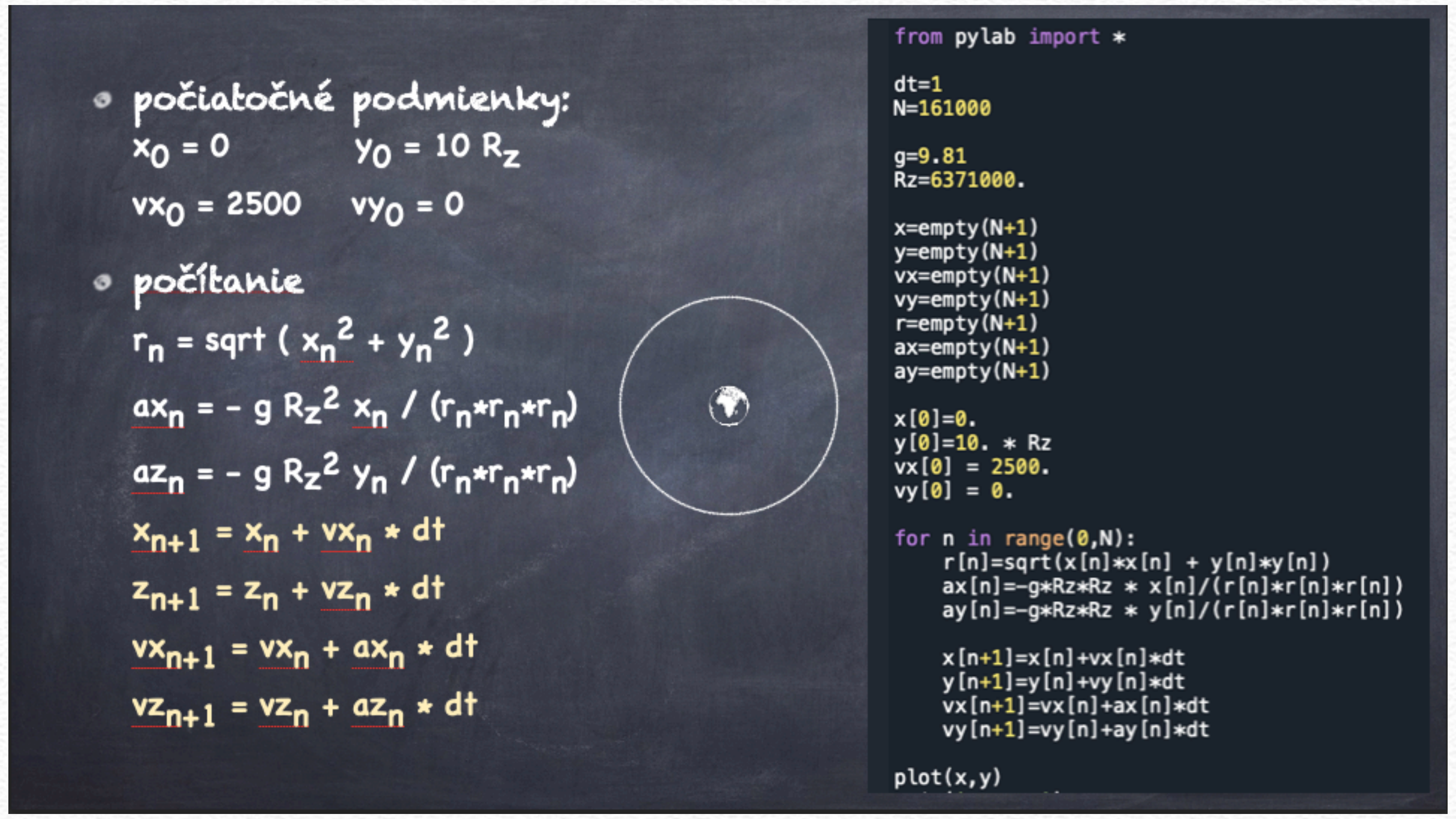
- pohybovú rovnicu telesa v gravitačnom poli sme už riešili metódou “krok za krokom”

- teraz sa chceme naučiť, čo sa dá z rovnice

$$m\ddot{\vec{r}} = -\kappa \frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

  zistiť nielen približnou metódou, ale presne

- a pôjde nám najmä o to, aby sme pomocou tejto pohybovej rovnice úplne porozumeli Keplerovým zákonom (kde pod úplným porozumením nemyslíme približné riešenie, ale presné a striktné odvodenie týchto zákonov z pohybovej rovnice)

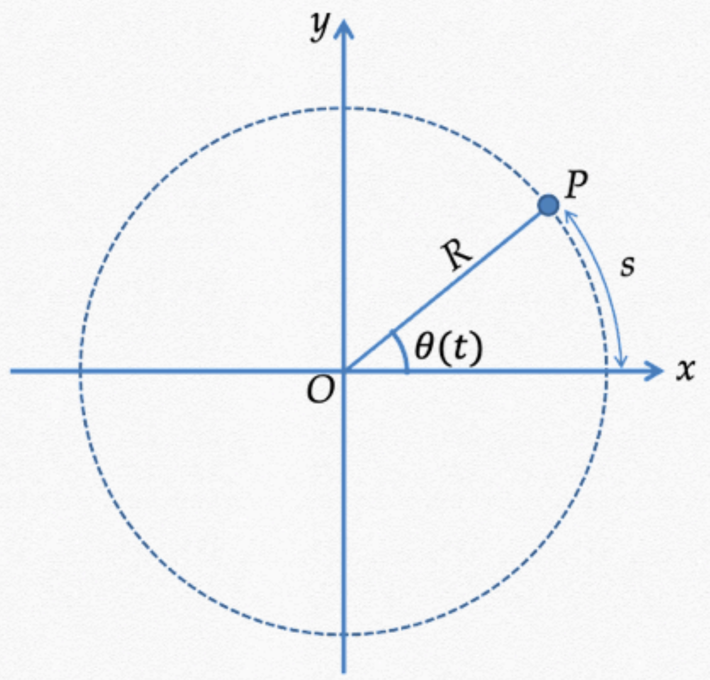


1. Keplerov zákon – kruhové orbity

- špeciálnym prípadom prvého Keplerovho zákona je pohyb po kružnici
- ako vyplýva tento pohyb z Newtonovej pohybovej rovnice telesa v gravitačnom poli?
- **trik** neriešime pohybovú rovnicu, ale využijeme to, čo už vieme o rovnomernom pohybe po kružnici
- môže hrať gravitačná sila úlohu dostredivej sily? áno, ak $\vec{v} \perp \vec{r}$ a zároveň $mv^2/r = \kappa Mm/r^2$
- poznámka: rýchlosť $v = \sqrt{\kappa M/r}$ potrebná pre pohyb po kružnici sa volá prvá kozmická rýchlosť

rovnomerný pohyb po kružnici
(ak si náhodou nepamätáte zo strednej školy)

- rýchle odvodenie dôležitých vzťahov pre rovnomerný pohyb po kružnici: $\theta = \omega t$
- $x(t) = R\cos\omega t$ $\quad y(t) = R\sin\omega t$
- $\dot{x}(t) = -\omega R\sin\omega t$ $\quad \dot{y}(t) = \omega R\cos\omega t$
- $\ddot{x}(t) = -\omega^2 R\cos\omega t$ $\quad \ddot{y}(t) = -\omega^2 R\sin\omega t$
- $\vec{v}\,.\,\vec{r} = 0$ $\quad v = \omega r$ $\quad (r = R)$
- $\vec{a}\,.\,\vec{v} = 0$ $\quad a = \omega^2 r$ $\quad \vec{a} = -\omega^2\vec{r}$

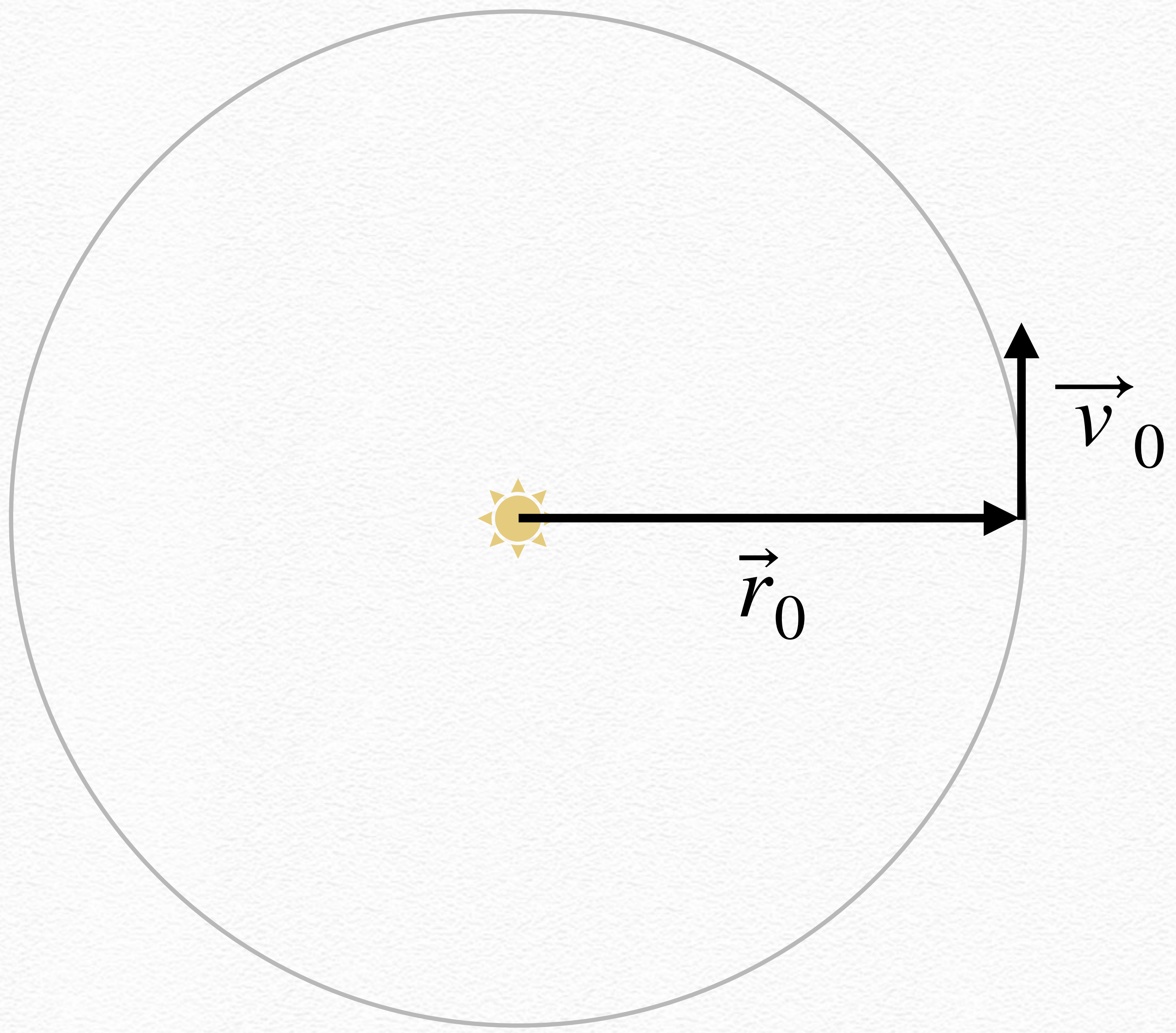


dostredivá sila

$$F = mv^2/r \qquad \vec{F} \perp \vec{v}$$

kedy dostaneme pohyb po kružnici

- rovnomerný pohyb po kružnici je riešením Newtonovej rovnice (t.j. funkcia $\vec{r}(t)$ zodpovedajúca rovnomernému pohybu po kružnici spĺňa uvažovanú rovnicu)
- ak teda vezmeme počiatočné podmienky $\vec{r}_0$ a $\vec{v}_0$ také, že vzťah medzi nimi zodpovedná vzťahu medzi polohou a rýchlosťou pri rovnomernom pohybe po kružnici, dostaneme tento pohyb
- nuž a tie podmienky sú nasledovné: rýchlosť $\vec{v}_0$ musí byť kolmá na $\vec{r}_0$ a jej veľkosť musí byť $v_0 = \sqrt{\kappa M / r_0}$

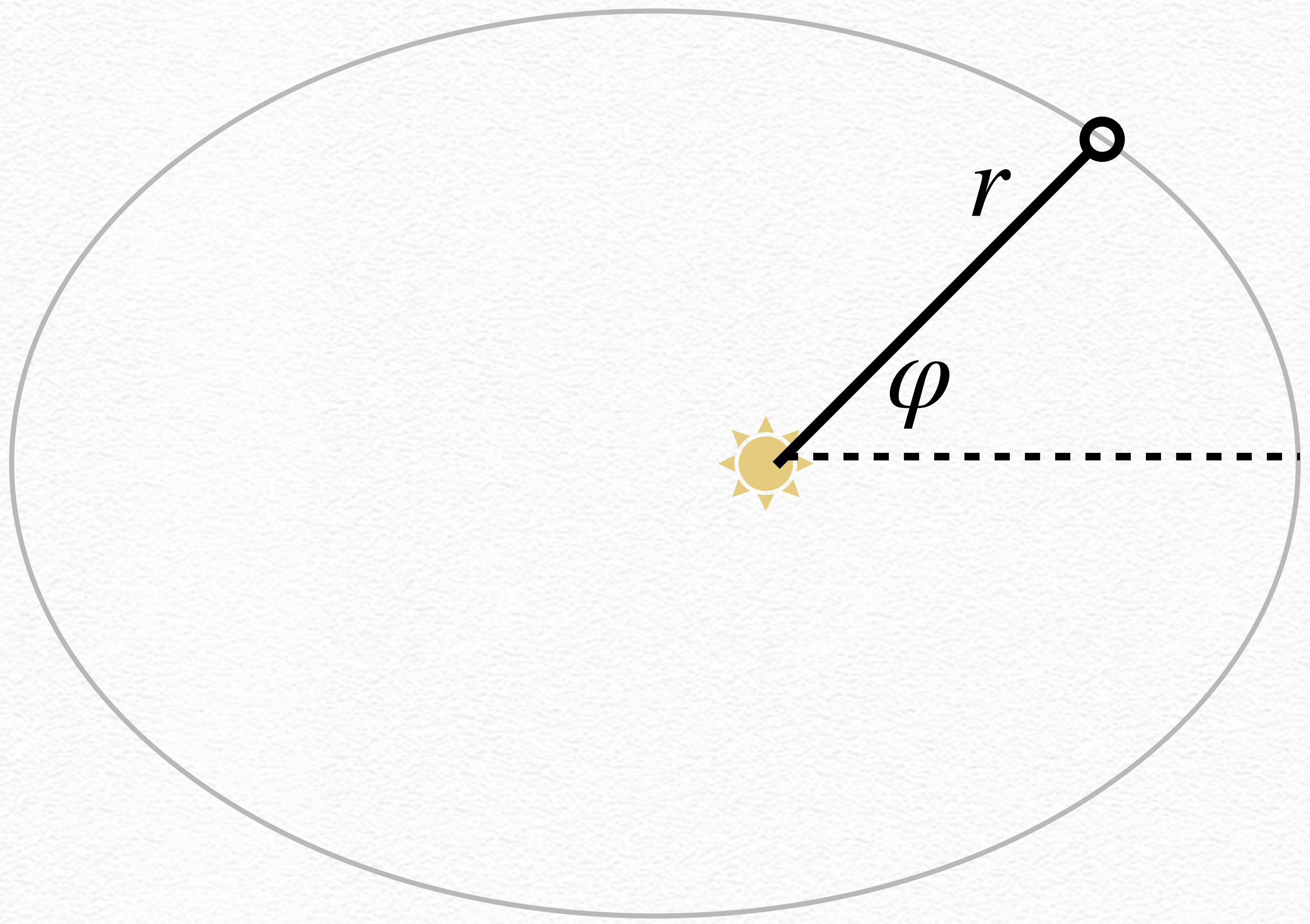


nepovinné

nepovinné

1. Keplerov zákon – eliptické dráhy

- toto je úplne nepovinná časť (poriadne to bude urobené na prednáške z teoretickej mechaniky)
- ako vyzerá pohyb pre všeobecné poč. podmienky?
- **trik** zákon zachovania energie $\frac{1}{2}m\vec{v}^2 - \frac{\kappa M m}{r} = E$ budeme chápať a riešiť ako diferenciálnu rovnicu
- výhoda: nie je to rovnica druhého, ale prvého rádu
- pre riešenie tejto rovnice sú výhodné tzv. polárne súradnice r, φ (vzdialenosť od počiatku a uhol)



nepovinné

riešenie rovnice získanej trikom

nepovinné

- toto je ešte stále úplne nepovinná časť
- zložky rýchlosti v polárnych súradniciach:
  v radiálnom smere $v_r = \dot{r}$
  v smere kolmom na riadálny $v_\perp = r\dot{\varphi}$
- zákon zachovania energie:
  $\frac{1}{2}m\left(v_r^2 + v_\perp^2\right) - \frac{\kappa M m}{r} = E \ (= \text{const})$
- zákon zachovania momentu hybnosti:
  $L = |\vec{r} \times \vec{p}\,| = r m v_\perp \ (= \text{const})$
- spolu: $\boxed{\dot{r} = \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2\kappa M}{r} - \frac{L^2}{m^2 r^2}}}$

- nepovinné info o riešení rovnice $\dot{r} = f(r)$
- rovnicu napíšeme v tvare $\frac{dr}{dt} = f(r)$
- to sa dá napísať v tvare $\frac{dr}{f(r)} = dt$
- a odtiaľ vplýva $\int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{f(r')} = \int_{t_0}^{t} dt'$
- takže stačí vypočítať príslušné integrály
  a z nich potom vyjadriť r ako funkciu t
  (integrály tu počítať nebudeme, ide nám
  len o základnú predstavu celého postupu)

nepovinné

kompletný planetárny pohyb

nepovinné

- dokončenie úplne nepovinnej časti
- ak chceme poznať celý pohyb, potrebujeme ešte nájsť závislosť uhla od času
- tú nájdeme z rovnice $L = rmv_\perp = mr^2\dot{\varphi}$
- rovnica: $\dot{\varphi}(t) = \dfrac{L}{m\,r^2(t)}$

  riešenie: $\varphi(t) = \displaystyle\int \frac{L}{m\,r^2(t)} dt$
- ak poznáme funkciu $r(t)$, vieme vypočítať $\varphi(t)$ a ak poznáme obidve tieto fukcie, tak vieme o pohybe v gravitačnom poli úplne všetko

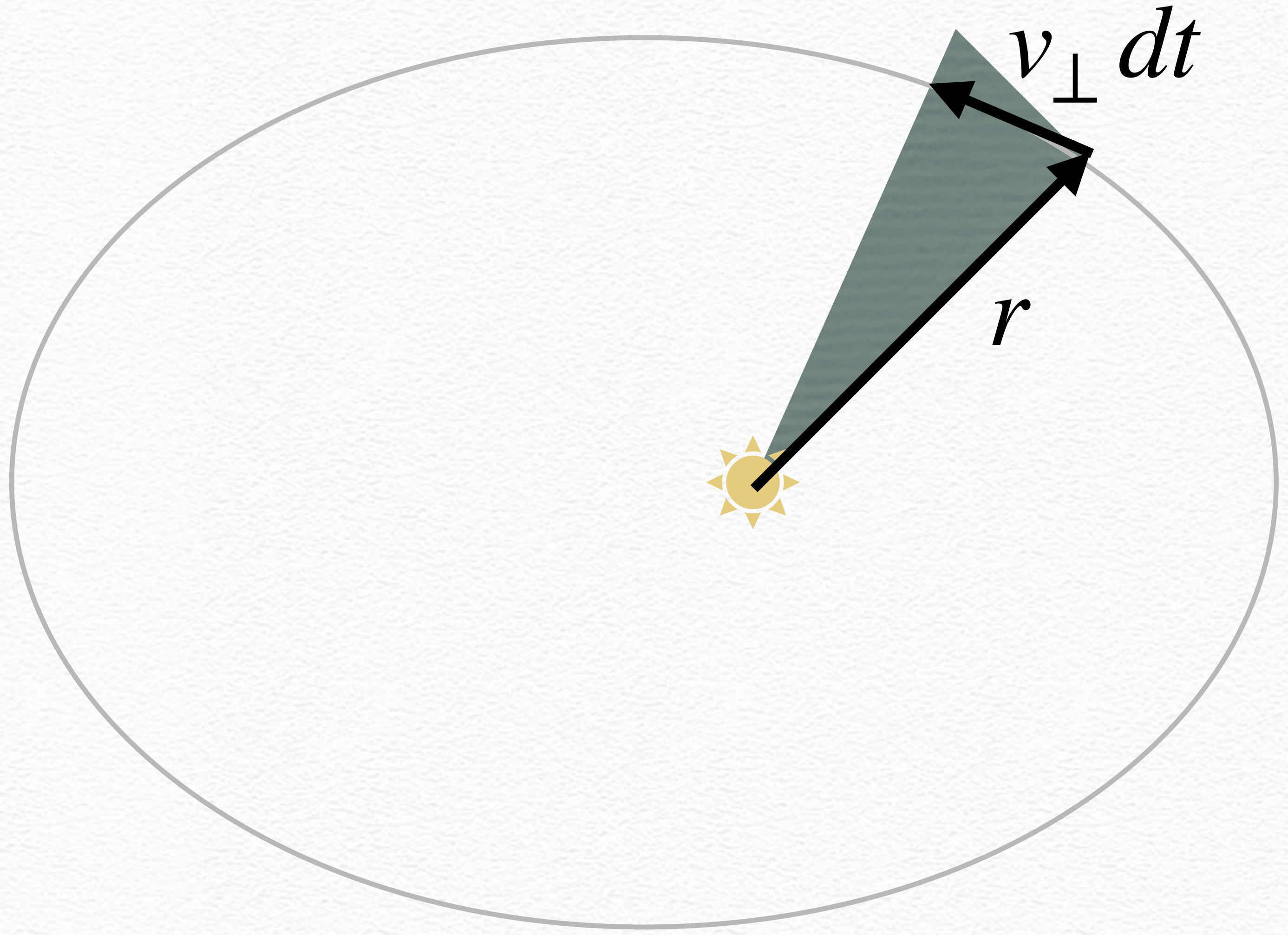
- a kde sú tie (nepovinné) elipsy?
- ak by sme integrály fakt vypočítali a vyjadrili trajektóriu ako funkciu $r(\varphi)$, dostali by sme rovnice kužeľosečiek v polárnych súradniciach
- ktorá kužeľosečka to bude, o tom rozhodujú počiatočné podmienky (pre malé počiatočné rýchlosti dostaneme elipsy, väčšie počiatočné rýchlosti vedú na hyperboly, parabola je veľmi špecifickým hraničným prípadom)
- ak poznáme kompletný pohyb, máme všetko, vrátane ďalších dvoch Keplerových zákonov (ale tie vieme odvodiť aj bez úplného riešenia)

2. Keplerov zákon – moment hybnosti

- pri našom nahliadnutí rovinnosti planetárnych dráh sme využili len zachovanie smeru momentu hybnosti, teraz využijeme ďalší **trik**: zachovanie jeho veľkosti $L = rmv_\perp$

- výraz $\frac{1}{2}rv_\perp$ je pritom rýchlosťou, ktorou sa mení plocha opísaná polohovým vektorom, pretože za čas dt sa táto plocha zmení o $\frac{1}{2}rv_\perp dt \pm \cdots$, kde bodky sú za veci idúce k nule rýchlejšie, ako dt (ako by malo byť vidno z obrázka)

- zo zachovania veľkosti momentu hybnosti teda vyplýva zachovanie rýchlosti zmeny plochy opísanej polohovým vektorom, čo nie je nič iné ako druhý Keplerov zákon (v ktorom sa polohovému vektoru zvykne hovoriť čudným archaickým výrazom "sprievodič")



3. Keplerov zákon – kruhové orbity

- pre špeciálny prípad kruhových orbít sa 3. Keplerov zákon nahliadne ľahko
- dostredivou silou je gravitačná sila $\frac{mv^2}{r} = \kappa \frac{Mm}{r^2}$ z čoho vyplýva $\frac{v^2}{r^2} = \kappa \frac{M}{r^3}$
- čo môžeme napísať ako $\frac{r^3}{T^2} = \frac{\kappa M}{4\pi^2}$ keďže doba obehu je $T = \frac{2\pi r}{v}$
- čím sme dostali nielen 3. Keplerov zákon, ale aj hodnotu konštanty v ňom (ale len v špeciálnom prípade kruhových orbít)

nepovinné

3. Keplerov zákon – všeobecne

nepovinné

- **trik**: výroba nových riešení pohybových rovníc preškálovaním premenných
- nech $\vec{r}(t)$ je nejaké konkrétne riešenie pohybovej rovnice $m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$
- preškálovaním premenných nazývame zámenu: $\vec{r} \to \vec{\rho} = \alpha \vec{r}$ $\quad t \to \tau = \beta t$
- ďalej budeme potrebovať druhú deriváciu $\vec{\rho}(\tau)$ podľa τ : $\dfrac{d^2\vec{\rho}(\tau)}{d\tau^2} = \dfrac{\alpha}{\beta^2}\dfrac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$
- trik funguje len v špeciálnych prípadoch, keď $\vec{F}\left(\vec{\rho}, d\vec{\rho}/d\tau, \tau\right) = \dfrac{\alpha}{\beta^2}\,\vec{F}\left(\vec{r}, d\vec{r}/dt, t\right)$
- vtedy platí $m\dfrac{d^2\vec{\rho}(\tau)}{d\tau^2} = \vec{F}\left(\vec{\rho}, d\vec{\rho}/d\tau, \tau\right)$ (vyplýva to z dvoch predchádzajúcich riadkov)
- a preškálovaná funkcia $\vec{\rho}(\tau)$ je teda novým riešením (iným ako $\vec{r}(t)$) rovnakej rovnice

nepovinné

nepovinné

3. Keplerov zákon – prípravné príklady

<u>amplitúda a frekvencia LHO</u>

nezávislosť frekvencie kmitov LHO od amplitúdy vieme nájsť aj bez riešenia pohybovej rovnice

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t)$$

sila $-kx$ sa pri preškálovaní zmení na $-\alpha kx$, čiže podmienka triku je splnená pre $\frac{\alpha}{\beta^2} = \alpha$

máme $\beta = 1$, čiže ak v nejakom riešení $x(t)$ zmeníme výchylku α-krát a nezmeníme čas, dostaneme iné riešenie

ak je riešenie periodické, nové riešenie opisuje kmity s inou amplitúdou a rovnakou frekvenciou

<u>výška a doba voľného pádu</u>

súvis medzi výškou a dobou voľného pádu vieme nájsť aj bez riešenia pohybovej rovnice

$$m\ddot{z}(t) = -mg$$

sila $-mg$ sa pri preškálovaní nezmení, čiže podmienka triku je splnená pre $\frac{\alpha}{\beta^2} = 1$

máme $\alpha = \beta^2$, čiže ak v nejakom riešení $z(t)$ zmeníme výšku α-krát a čas zmeníme $\sqrt{\alpha}$-krát, dostaneme iné riešenie

ak zmeníme výšku voľného pádu α-krát, doba pádu sa zmení $\sqrt{\alpha}$-krát,

nepovinné

3. Keplerov zákon – dokončenie

nepovinné

vzťah medzi veľkosťou obežnej dráhy a dobou obehu planéty môžeme nájsť aj bez riešenia pohybovej rovnice $m\ddot{\vec{r}} = -\kappa \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$

sila $-\kappa \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$ sa pri preškálovaní zmení na $-\kappa \frac{Mm}{\alpha^2 r^2} \frac{\vec{r}}{r}$, čiže podmienka triku je splnená pre

$$\frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{1}{\alpha^2}$$

máme teda $\alpha^3 = \beta^2$, takže ak v nejakom riešení $\vec{r}(t)$ pohybovej rovnice zmeníme výchylku α-krát a čas zmeníme $\alpha^{3/2}$-krát, dostaneme nové riešenie

ak má pôvodné riešenie “veľkosť” R a dobu obehu T, potom nové riešenie získané preškálovaním má “veľkosť” αR a dobu obehu $\alpha^{3/2}T$, čo je práve tretí Keplerov zákon:

$$\left(\frac{\alpha R}{R}\right)^3 = \left(\frac{\alpha^{3/2}T}{T}\right)^2$$

dôležitá poznámka na záver

- v celej našej analýze pohybu planét a satelitov sa nikde nevyskytli dva pojmy, ktoré sa v tejto súvislosti často vyskytujú: <u>bezváhový stav</u> a <u>odstredivá sila</u>
- ľudia, ktorí tieto pojmy používajú (a to aj niektorí fyzici), ich veľmi často používajú úplne zle
- ľudia, ktorí tieto pojmy používajú správne, väčšinou naozaj rozumejú mechanike
- preto sa im aj my budeme snažiť poriadne porozumieť