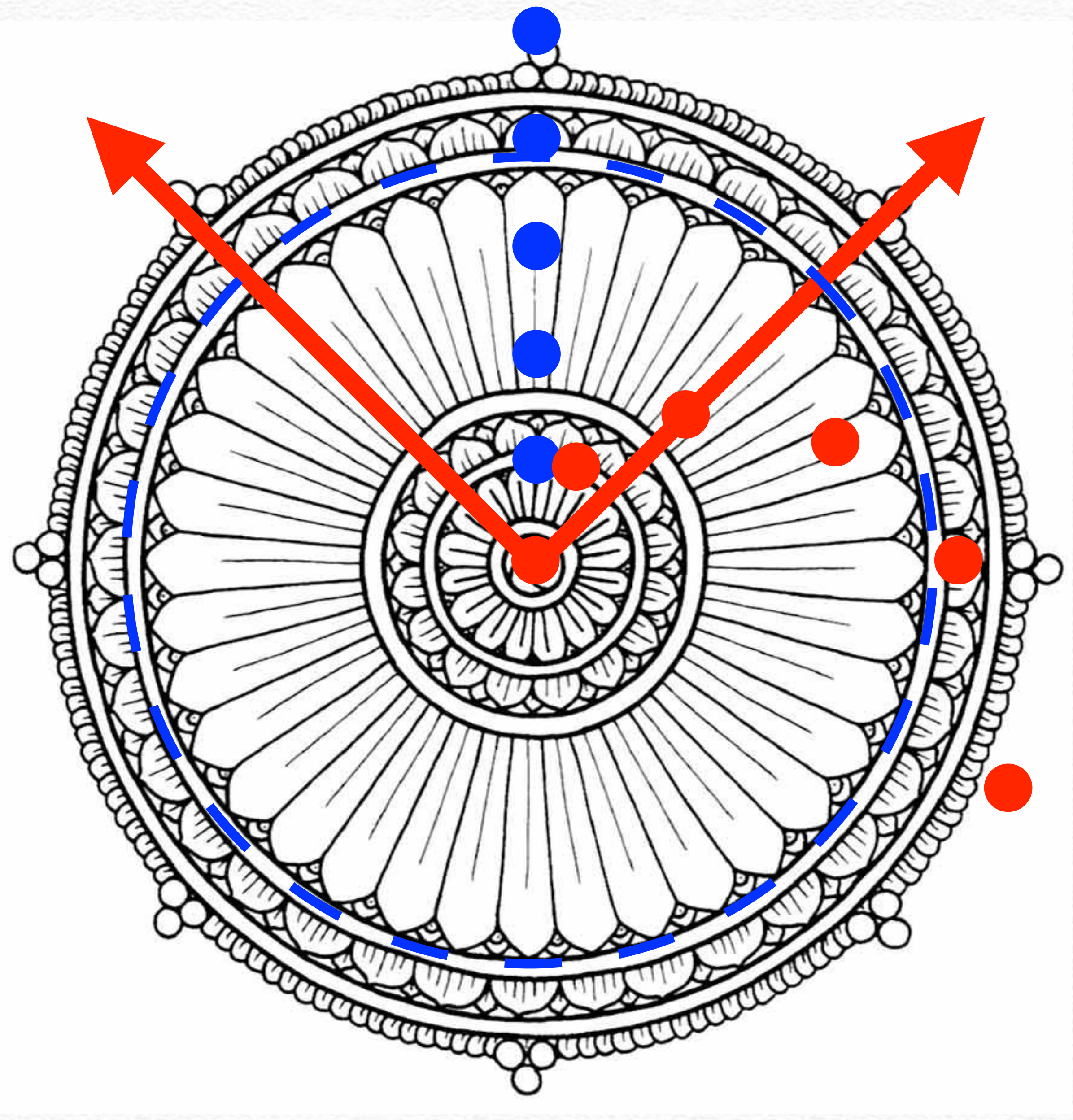
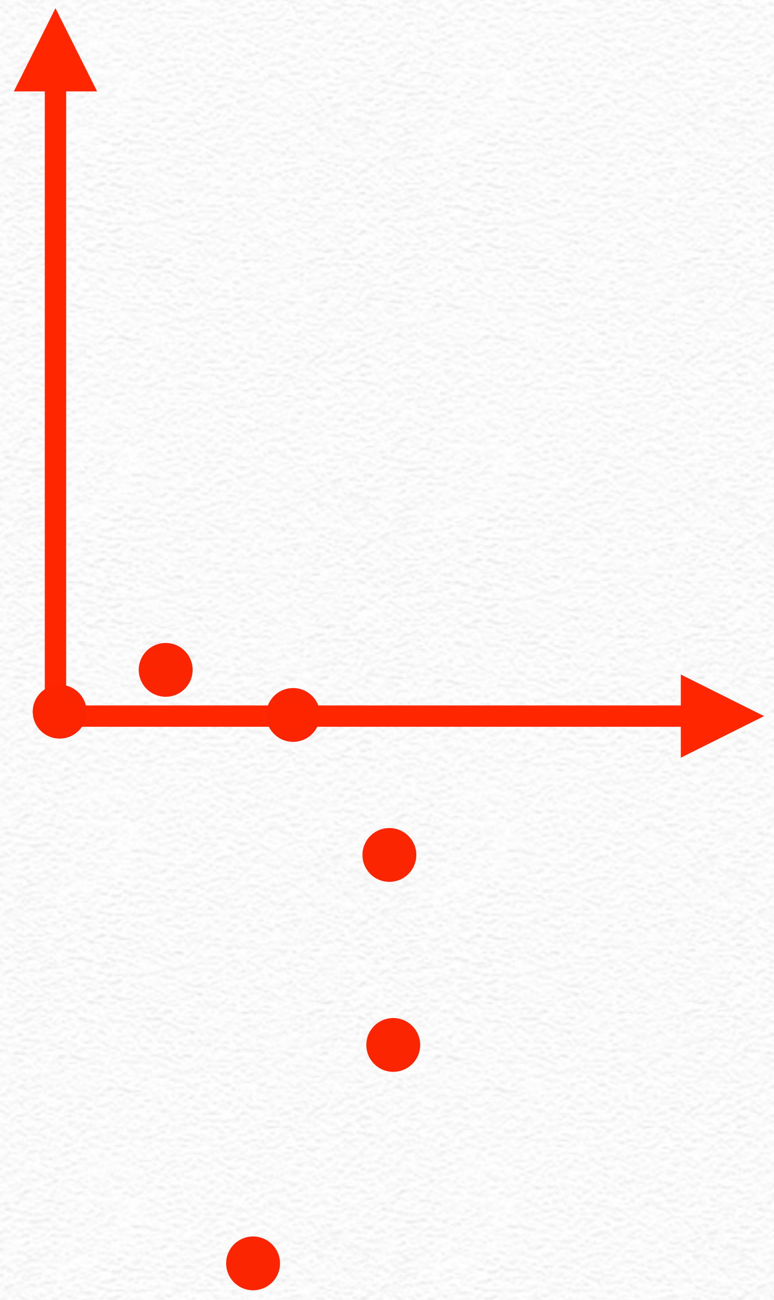
Rotujúce neinerciálne sústavy

odstredivá sila a Coriolisova sila

mechanika 26

in the previous episode





vo vzťažnej sústave “kolotoč” pôsobí okrem odstredivej aj nejaká ďalšia fiktívna sila

fiktívne sily v rotujúcej sústave

- sú tri:
  odstredivá (pôsobí všade okrem osi rotácie)
  Coriolisova (to je tá, ktorej prejav sme videli na obrázku)
  Eulerova (pôsobí len ak sa mení uhlová rýchlosť rotácie)

- odstredivú sme už mali, na ďalšie dve sa pozrieme teraz

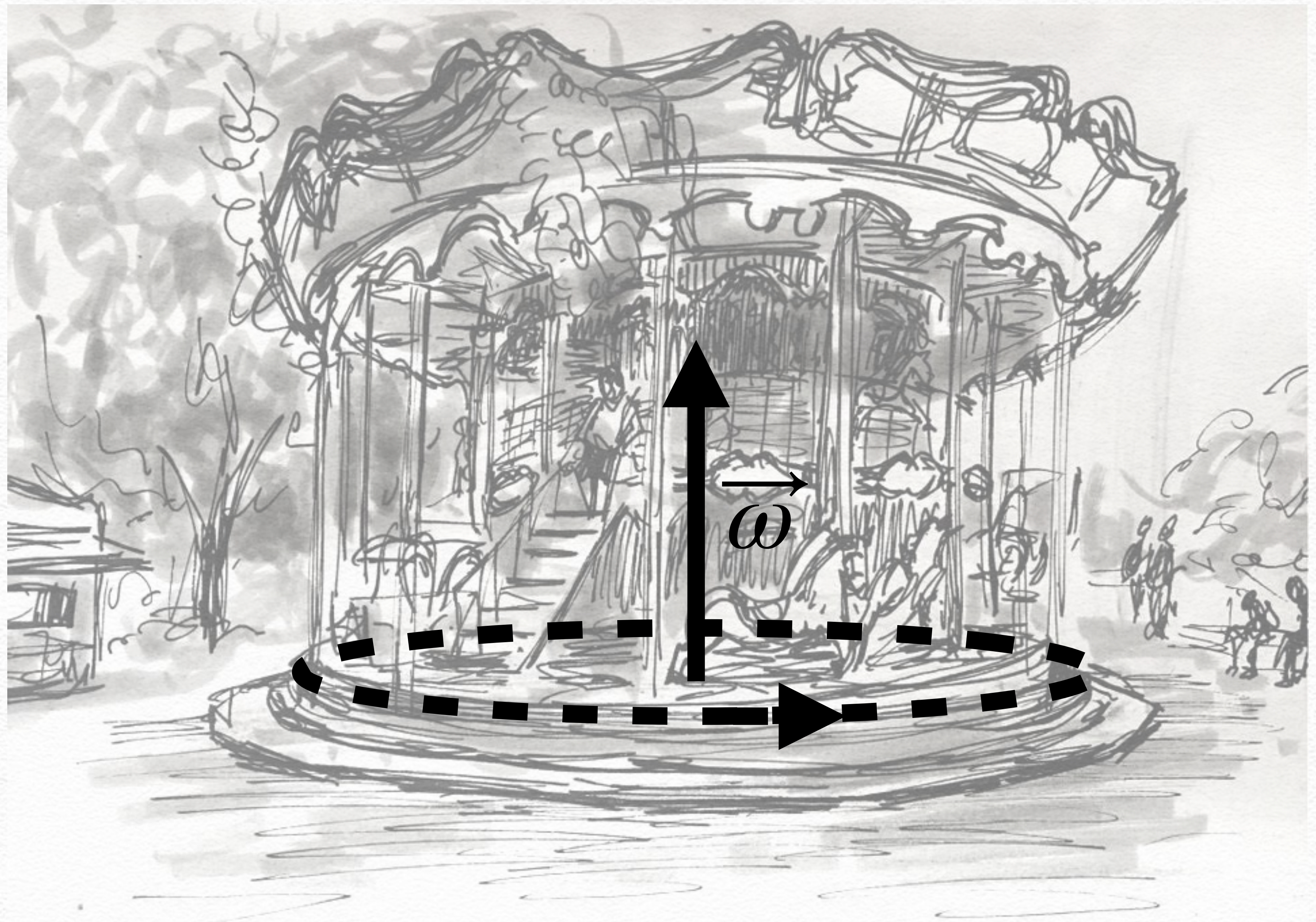
- odvodenie bude formálnejšie (jednoduchšie sa to nahliadnuť nedá) ale výhodou tohto odvodenia bude priezračne jasný tvar všetkých troch fiktívnych síl v rotujúcich neinerciálnych sústavách

vektor uhlovej rýchlosti

- rotáciu sústavy *S* vzhľadom k sústave *S'* budeme opisovať vektorom uhlovej rýchlosti

- <u>definícia vektora uhlovej rýchlosti</u> $\vec{\omega}$
  – smer je v smere osi rotácie
  – veľkosť je ω (uhlová rýchlosť rotácie)
  – orientácia: pravidlo pravej ruky
  (ak zahnuté prsty pravej ruky ukazujú smer rotácie, potom je palec v smere $\vec{\omega}$)

- na prvý pohľad vyzerá opis uhlovej rýchlosti pomocou vektora dosť umelo a krkolomne, ale ukáže sa, že je to veľmi užitočný opis

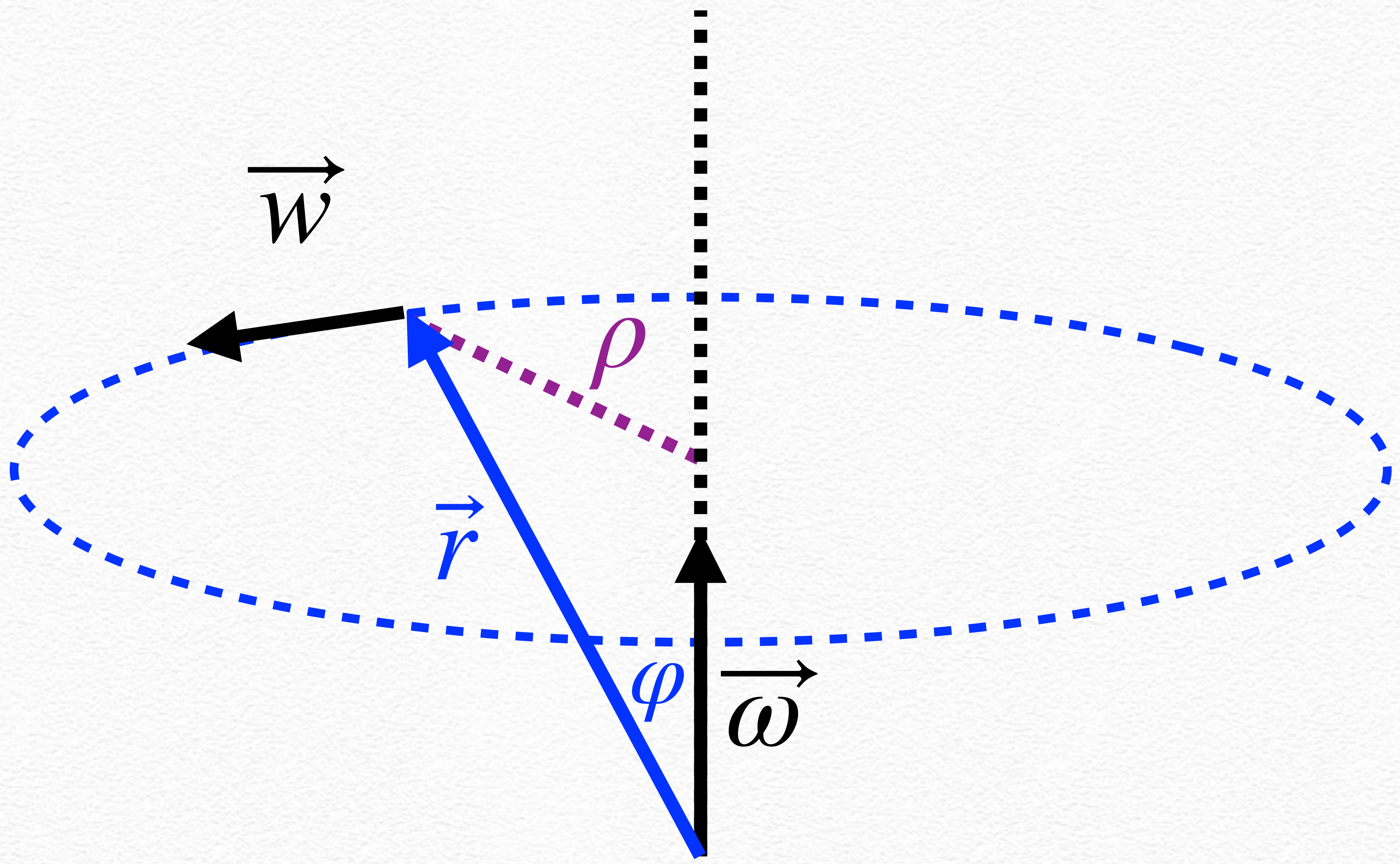


je užitočné (ale nie nevyhnutné) vybrať súradnicovú os *z* tak, aby vektor uhlovej rýchlosti ležal v tejto osi

rýchlosť rotácie vyjadrená cez $\overrightarrow{\omega}$

- body stojace v sústave *S* sa vzhľadom k sústave *S'* pohybujú po kružniciach
- veľkosť rýchlosti rotácie bodu je $\omega\,\rho$ kde ρ je polomer príslušnej kružnice
- toto sa dá napísať aj ako $\omega\, r\, \sin\varphi$ kde r je velkosť polohového vektora príslušného bodu a φ je uhol medzi polohovým vektorom a vektorom $\overrightarrow{\omega}$
- ľahko sa nahliadne (urobte to, treba pritom trochu cvičiť pravou rukou)

$$\boxed{\overrightarrow{w} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}}$$

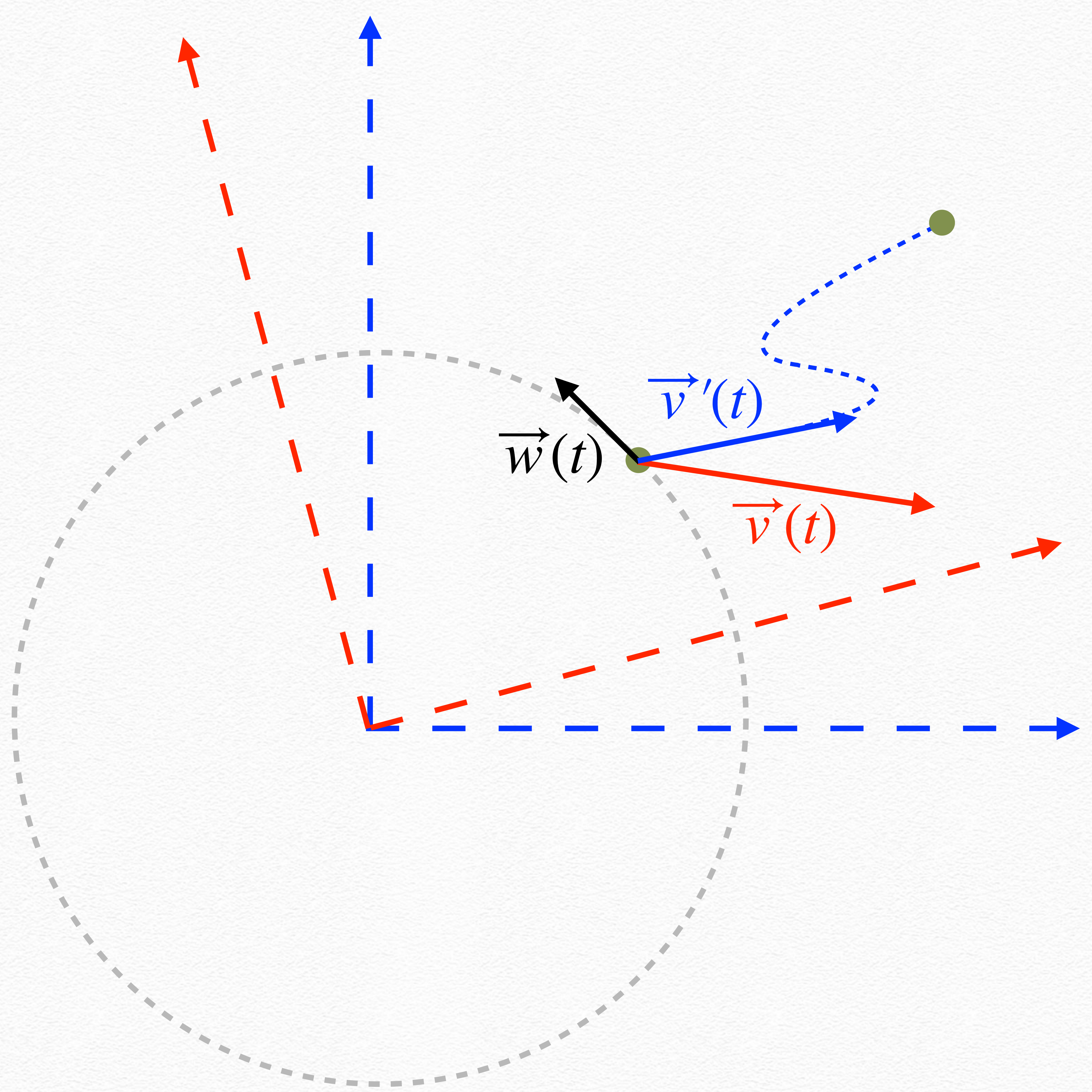


$$w = \omega\,\rho = \omega\, r\, \sin\varphi$$

rôzne rýchlosti v rôznych sústavách

- rýchlosť telesa vzhľadom k sústavám *S* a *S'* je rôzna
- tieto dve rýchlosti sa líšia o rýchlosť $\vec{w}(t)$, ktorou sa (stojaci) bod sústavy *S* (v ktorom sa v čase *t* nachádza naše teleso) pohybuje (rotuje) vzhľadom k sústave *S'*
- rýchlosť $\vec{v}\,'(t)$ telesa vzhľadom k sústave *S'* je súčtom rýchlosti $\vec{v}(t)$ vzhľadom k súst. *S* a relatívnej lokálnej rýchlosti $\vec{w}(t)$

$$\vec{v}\,'(t) = \vec{v}(t) + \vec{w}(t) = \vec{v}(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)$$



rôzne zrýchlenia v rôznych sústavách

- vzťah pre zrýchlenia sa nedá vidieť z obrázka tak ľahko, ako vzťah pre rýchlosti
- obyčajne sa preto postupuje takto: vzťah pre rýchlosti sa prepíše do tvaru
$$\frac{d}{dt'}\vec{r}(t) = \left(\frac{d}{dt} + \vec{\omega}\times\right)\vec{r}(t)$$
s dosť mätúcim označením: t' a t sú rôzne označenia toho istého času, derivácie sú derivácie jedného vektora $\vec{r}(t)$ vyjadreného v rôznych sústavách
- vzťah pre zrýchlenia sa potom napíše (neodvodí, len uhádne) takto
$$\frac{d}{dt'}\frac{d}{dt'}\vec{r}(t) = \left(\frac{d}{dt} + \vec{\omega}\times\right)\left(\frac{d}{dt} + \vec{\omega}\times\right)\vec{r}(t)$$
- tento vzťah budeme považovať len za niečo na úrovni mnemotechnickej pomôcky, pomocou ktorej rýchlo získame výsledok, a ten potom odvodíme aj poriadnejšie

výpočet

$$\frac{d}{dt'}\frac{d}{dt'}\vec{r} = \left(\frac{d}{dt} + \vec{\omega}\times\right)\left(\frac{d}{dt} + \vec{\omega}\times\right)\vec{r}$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\vec{r} + \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) + \vec{\omega}\times\frac{d}{dt}\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\vec{a} = \vec{a} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + 2\,\vec{\omega}\times\vec{v} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)$$

$$\vec{a} = \vec{a} - \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) - 2\,\vec{\omega}\times\vec{v} - \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}$$

pohybová rovnica v rotujúcej sústave

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = m\ddot{\vec{r}}'(t) - m\vec{\omega}(t) \times (\,\vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)\,) - 2m\vec{\omega}(t) \times \vec{v}(t) - m\dot{\vec{\omega}}(t) \times \vec{r}(t)$$

súčet reálnych síl

odstredivá fiktívna sila (aj s tým mínus)

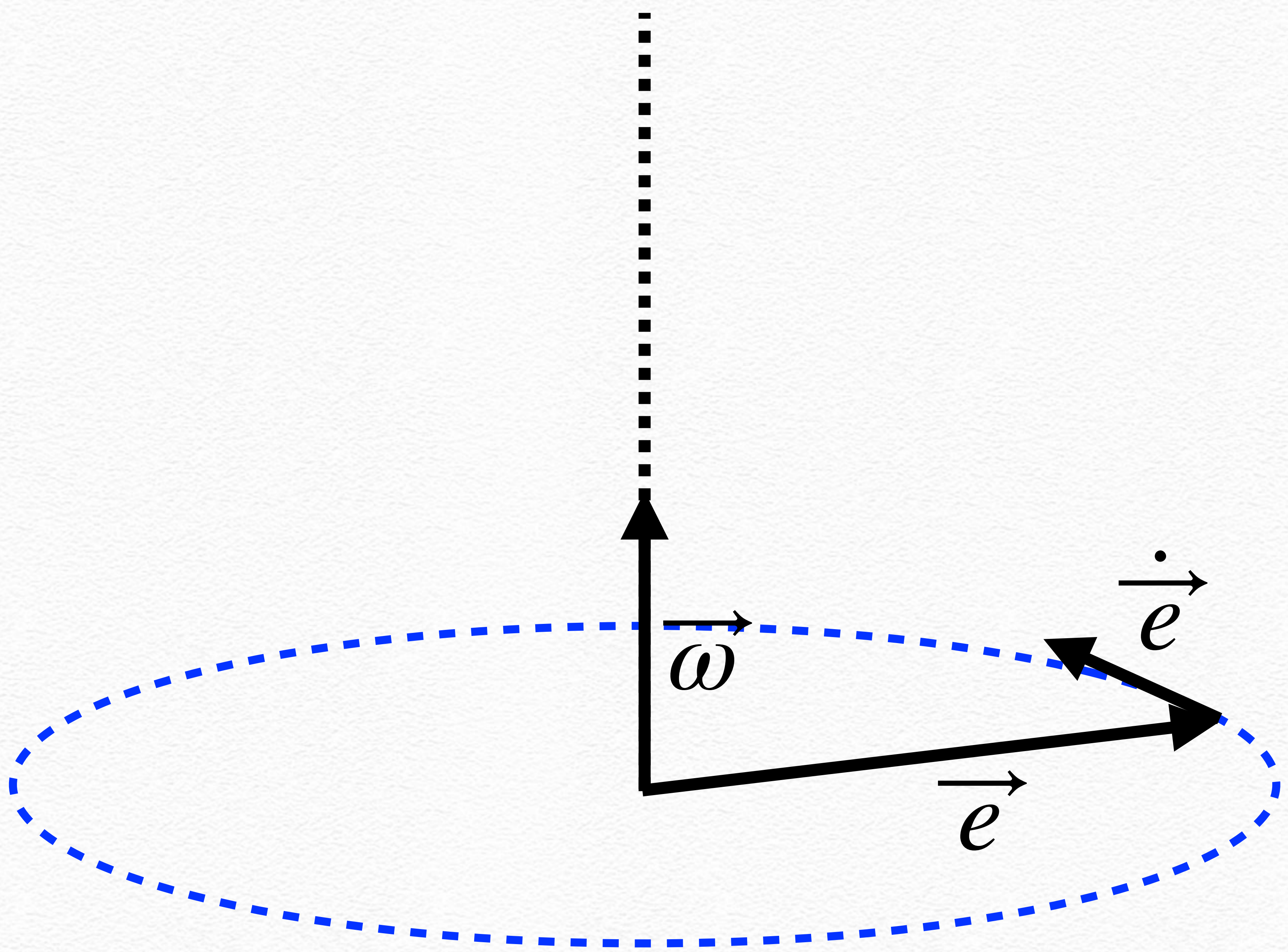
Coriolisova fiktívna sila (aj s tým mínus)

Eulerova fiktívna sila (aj s tým mínus)

- odstredivá sila: smeruje od osi otáčania (ukážte to, t.j. pocvičte si trochu pravou rukou) a jej veľkosť je $m\omega^2\rho$, kde ρ je veľkosť priemetu vektora $\vec{r}$ do roviny kolmej na $\vec{\omega}$
- Coriolisova a Eulerova sila sú novinky, pričom Euerova sila je nenulová len vtedy, keď neinerciálna sústava rotuje s nenulovým uhlovým zrýchlením

a teraz poriadne odvodenie

- ako prípravu k poriadnemu odvodeniu nájdeme rýchlosť zmeny bázových vektorov sústavy *S* z hľadiska sústavy *S'*
- veľkosť rýchlosti zmeny $\vec{e}$ je $\omega\,|\vec{e}\,| = \omega$
- smer $\dot{\vec{e}}$ je kolmý na $\vec{e}$ aj na $\vec{\omega}$
- orientácia je taká, že $\dot{\vec{e}} = \vec{\omega} \times \vec{e}$



rýchlosti v novom odvodení

- ľubovoľný vektor $\vec{u}(t)$ rozložíme jednak do bázových vektorov sústavy ***S'*** (ktoré budeme považovať za časovo nemenné) a jednak do bázových vektorov sústavy **S** (ktoré sa menia s časom)

$$\vec{u}(t) = \sum_{i=1}^{3} c_i'(t)\,\vec{e}_i' = \sum_{i=1}^{3} c_i(t)\,\vec{e}_i(t)$$

- zderivujeme podľa času a vo výslednom vzťahu identifikujeme (toto je netriviálne) rýchlosti zmeny vektora $\vec{u}(t)$ vzhľadom k vzťažným sústavám ***S'*** a **S**

- $$\underbrace{\sum_{i=1}^{3} \dot{c}_i'(t)\,\vec{e}_i'}_{\text{rýchlosť v } S'} = \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \dot{c}_i(t)\,\vec{e}_i(t)}_{\text{rýchlosť v } S} + \underbrace{c_i(t)\,\dot{\vec{e}}_i(t)}_{\text{zvyšok}}$$

- premyslite si, že označené sumy sú naozaj rýchlosti zmeny $\vec{u}(t)$ vzhľadom k ***S'*** a **S**

- zvyšok $= \sum_{i=1}^{3} c_i(t)\,\vec{\omega}\times\vec{e}_i = \vec{\omega}\times\vec{u}(t)$

- $\boxed{\text{rýchlosť v } S' = \text{rýchlosť v } S + \vec{\omega}\times\vec{u}(t)}$

zrýchlenia v poriadnom odvodení

$$\vec{r}(t) = \sum_{i=1}^{3} c_i'(t)\,\vec{e}_i' = \sum_{i=1}^{3} c_i(t)\,\vec{e}_i(t)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \sum_{i=1}^{3} \dot{c}_i'(t)\,\vec{e}_i' = \sum_{i=1}^{3} \dot{c}_i(t)\,\vec{e}_i(t) + c_i(t)\,\dot{\vec{e}}_i(t)$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \sum_{i=1}^{3} \ddot{c}_i'(t)\,\vec{e}_i' = \sum_{i=1}^{3} \ddot{c}_i(t)\,\vec{e}_i(t) + 2\,\dot{c}_i(t)\,\dot{\vec{e}}_i(t) + c_i(t)\,\ddot{\vec{e}}_i(t)$$

rýchlosť zmeny $\vec{e}$ sme vypočítali pre chvíľou, zrýchlenie vypočítame teraz

$$\ddot{\vec{e}}_i = \frac{d}{dt}\dot{\vec{e}}_i = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{e}_i) = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{e}_i + \vec{\omega} \times \dot{\vec{e}}_i = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{e}_i + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{e}_i)$$

rovnaký výsledok ako predtým

- úplne systematickým postupom sme dostali ($\vec{\omega}$ píšeme červeným, ale je to stále vektor uhlovej rýchlosti rotácie neinerciálnej vzťažnej sústavy ***S*** vzhľadom k inerciálnej vzťažnej sústave ***S'***)

$$\sum_{i=1}^{3} \ddot{c}_i'(t)\,\vec{e}_i' = \sum_{i=1}^{3} \ddot{c}_i(t)\,\vec{e}_i(t) + 2\,\dot{c}_i(t)\,\vec{\omega}\times\vec{e}_i(t) + c_i(t)\,\dot{\vec{\omega}}\times\vec{e}_i(t) + c_i(t)\,\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{e}_i(t)\right)$$

- čiže

$$\vec{a} = \vec{a} + 2\,\vec{\omega}\times\vec{v} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)$$

- to je ten istý výsledok, aký sme dostali predtým z mnemotechnického pravidla $\frac{d}{dt'} = \frac{d}{dt} + \vec{\omega}\times$
(to predchádzajúce odvodenie nebolo poriadným odvodením, teraz sme odvodili poriadne)

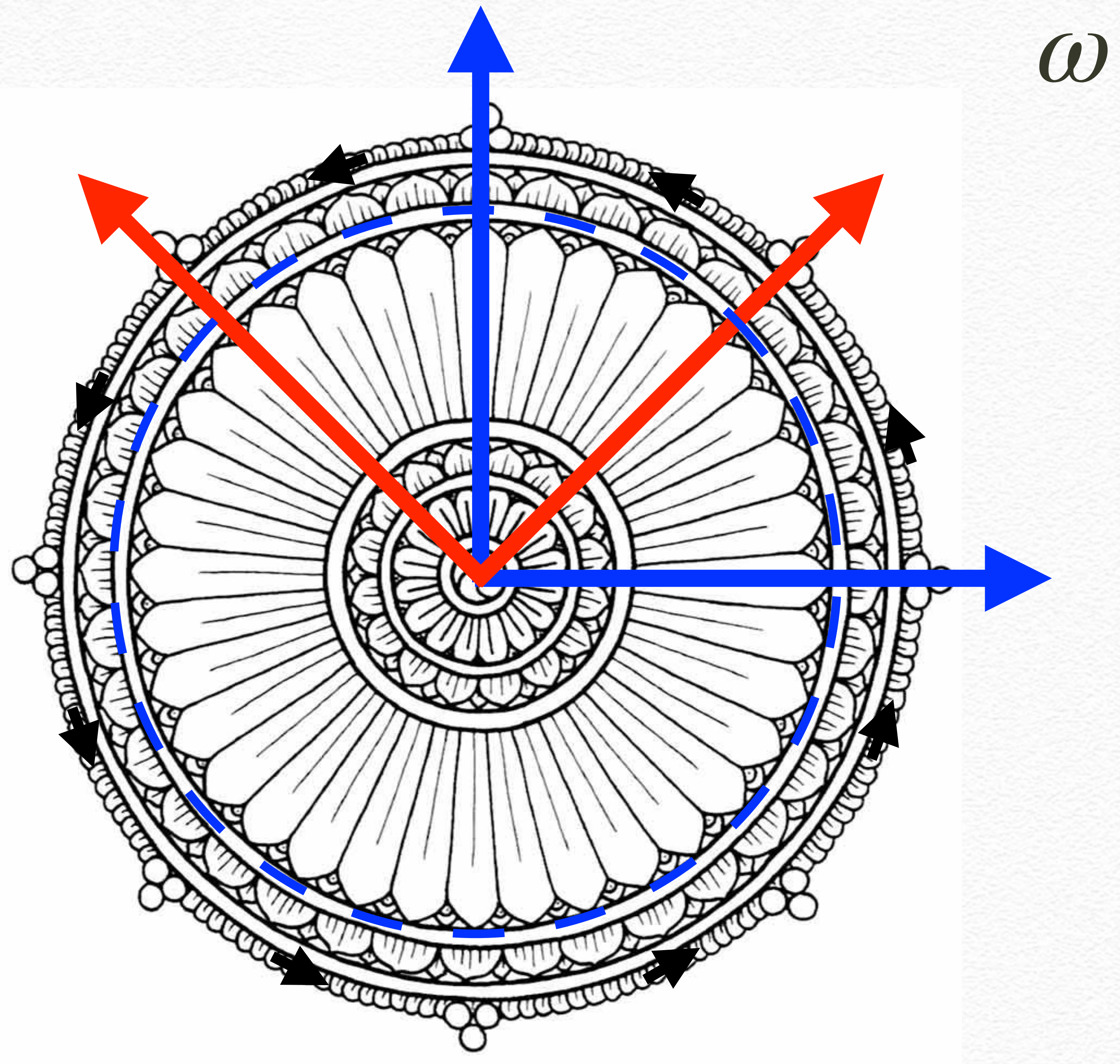
hviezda, kolotoč a Coriolisova sila

- vráťme sa príkladu, v ktorom samotná odstredivá sila nezachránila zákon sily

- aké sú smer a veľkosť Coriolisovej sily pôsobiacej na hviezdu vo vzťažnej sústvave rotujúci kolotoč?

- aká je Eulerova sila pôsobiaca na hviezdu, ak sa uhlová rýchlosť kolotoča nemení?

- ak započítame všetky fiktívne sily, platí zákon sily?



na hviezdu pôsobí prakticky nulová reálna sila (je od všetkých ďaleko), okrem nej odstredivá fiktívna sila a v opačnom smere dvakrát väčšia Coriolisova sila; zákon sily je perfektne splnený

o veľkosti Coriolisovej sily

- na rozdiel od odstredivej sily, s ktorou máme všetci nejakú bezprostrednú skúsenosť, Coriolisovu silu z bežného života prakticky nepoznáme
- táto sila je totiž pomerne malá a preto sa prejavuje až po dlhšom čase
- dostatočne dlhé časy vedúce k výrazným efektom sa vyskytujú napríklad v meteorológii, a preto sú typické príklady Coriolisovej sily meteorologické
- my si spomenieme dva: stáčanie pasátových vetrov a orientáciu hurikánov

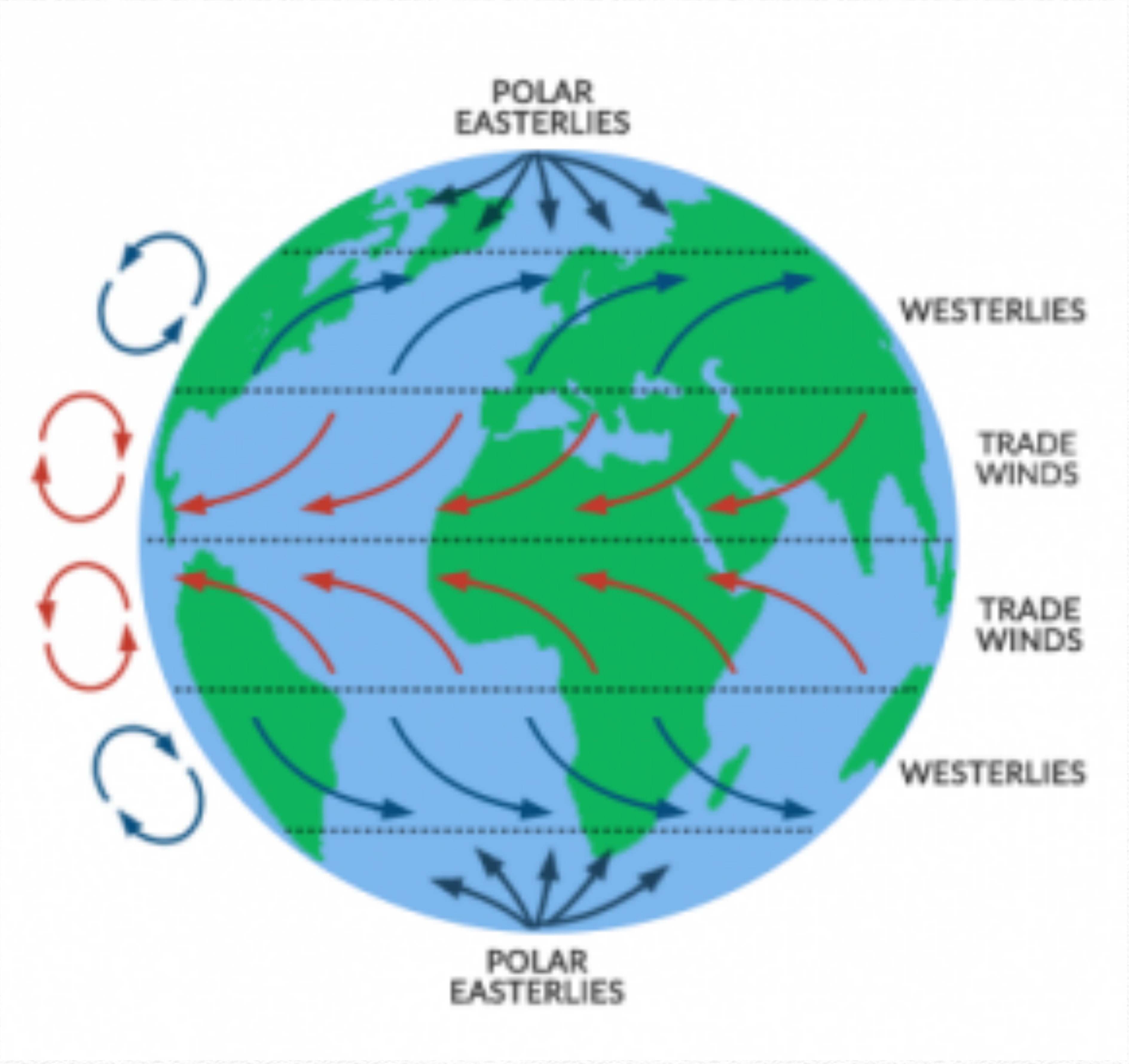
Krištof Kolumbus a Coriolisova sila

- kvôli nerovnomernému ohrievaniu zemského povrchu prúdia na Zemi severo-južné vetry (veľmi zhruba od obratníkov k rovníku a od pólov a obratníkov k polárnym kruhom)

- tieto vetry sú na rotujúcej Zemi stáčané Coriolisovou silou tak, ako je nakreslené na obrázku

- preverte, že tie smery sú správne

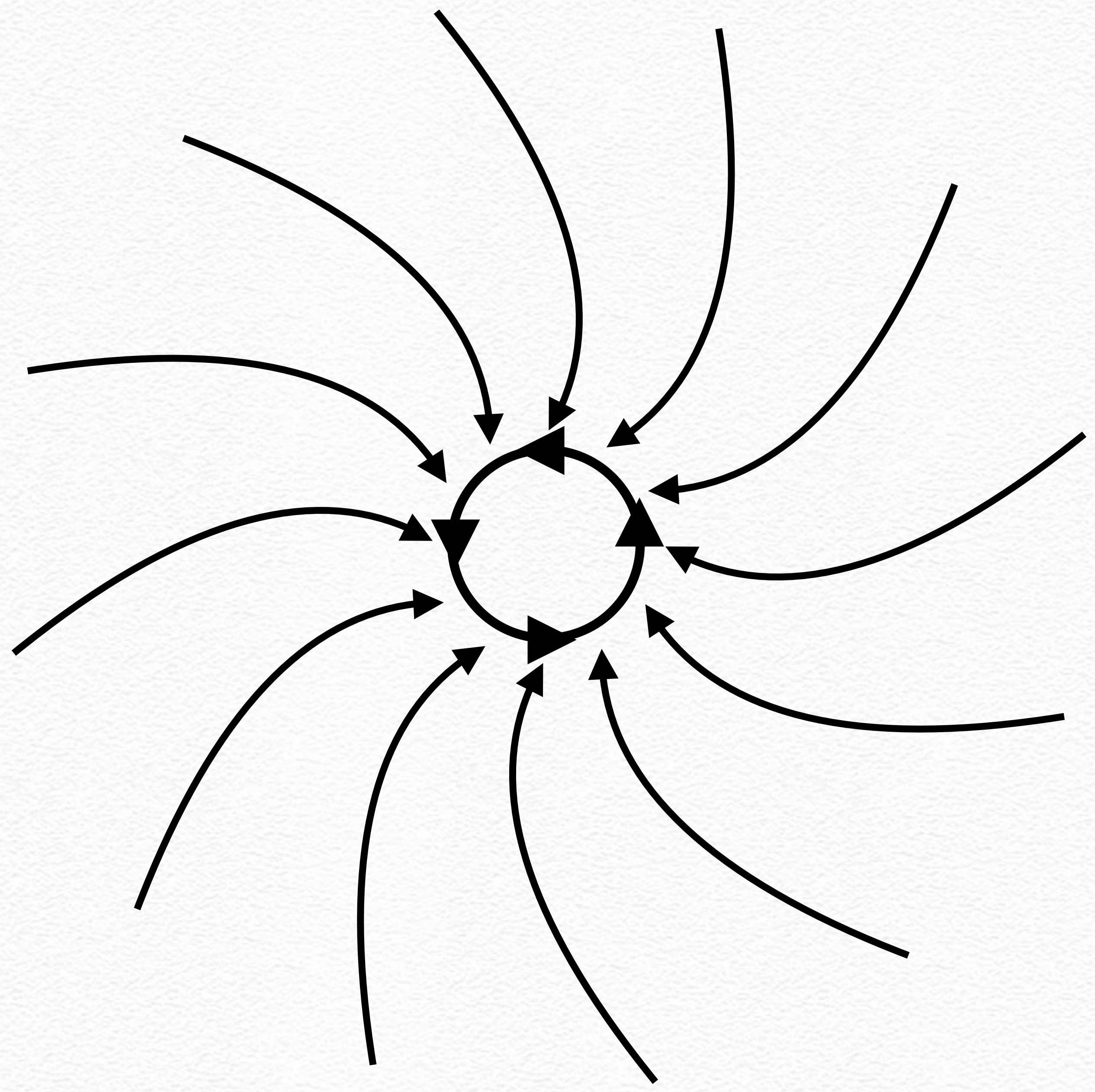
- len vďaka týmto vetrom doplávali Kolumbove plachetnice do Ameriky



víry a Coriolisova sila

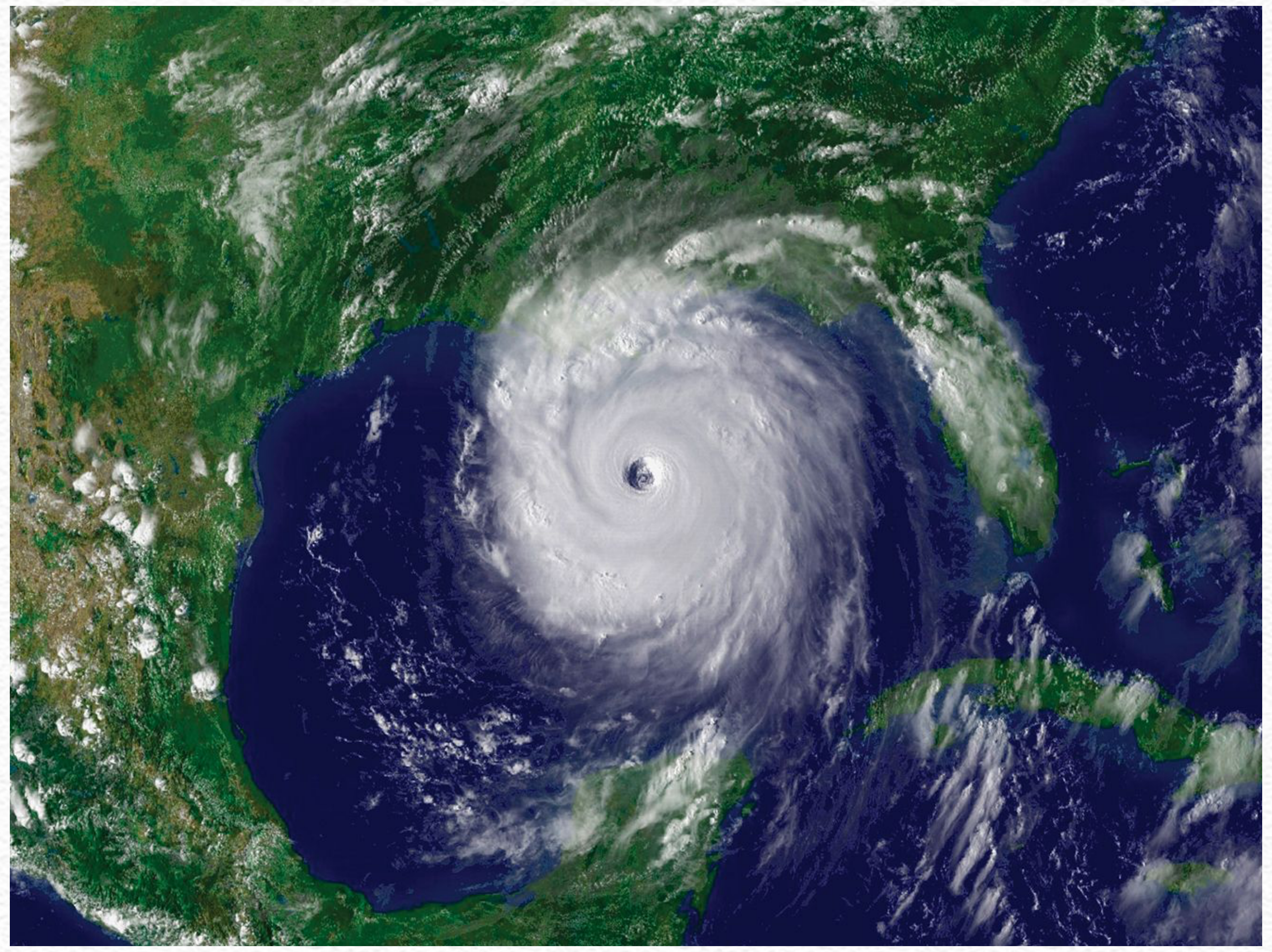
- vodné či vzdušné víry vznikajú vtedy, keď tekutina (najčastejšie voda resp. vzduch) prúdi zo všetkých smerov na jedno miesto a pritom je mierne stáčaná

- ak je prúdenie tekutiny do stredu víru stáčané v zápornom smere (v smere chodu hodinových ručičiek), potom sa výsledný vír zjavne točí (pozri obrázok) v kladnom smere (proti smeru chodu hodinových ručičiek) a naopak



smer rotácie hurikánov

- Coriolisova sila stáča prúdenie na severnej pologuli doprava (v zápornom smere) a na južnej pologuli doľava (v kladnom smere)
- ak je teda vír dôsledkom len Coriolisovej sily, potom sa na severnej pologuli bude točiť v kladnom smere (t.j. proti smeru chodu hodinových ručičiek), ale na južnej pologuli sa vír takýto točí v zápornom smere
- presne také chovanie pozorujeme pri hurikánoch
- pri vodných víroch nie je Coriolisova sila rozhodujúca pre smer rotácie víru (tam sú oveľa dôležitejšie počiatočné podmienky – Coriolisova sila je prislabá na to, aby ich výrazne ovplyvnila)



milý rovníkový podvod

- bežná turistická atrakcia na rovníku: na severnej a južnej pologuli rotuje vodný vír opačnými smermi
- je to bohužiaľ podvod
- smer rotácie víru je v skutočnosti daný počiatočnými podmienkami a Coriolisova sila je príliš slabá na to, aby tento smer zmenila
- rôzny smer rotácie víru sa dá ľahko dosiahnuť aj doma v umývadle (skúste to)

jednoduchá úloha na záver

- Eulerovej sile sa tu venovať nebudeme, tak aspoň dve otázky:
- ktorým smerom pôsobí Eulerova sila na rozbiehajúcom sa kolotoči (os rotácie sa nemení, uhlová rýchlosť rotácie narastá)
- ktorým smerom pôsobí Eulerova sila, ak sa uhlová rýchlosť nemení, ale mení sa smer osi rotácie?