POHYB TUHÉHO TELESA

najprv len v dvoch rozmeroch

telesá nezanedbateľnej veľkosti

- doteraz sme sa zaoberali mechanikou telies (relatívne) zanedbateľnej veľkosti (hovorí sa im hmotné body)

- teraz sa pozrieme na mechaniku telies nezanedbateľnej veľkosti, ktoré sú ale (dokonale) tuhé – nemenia svoj tvar

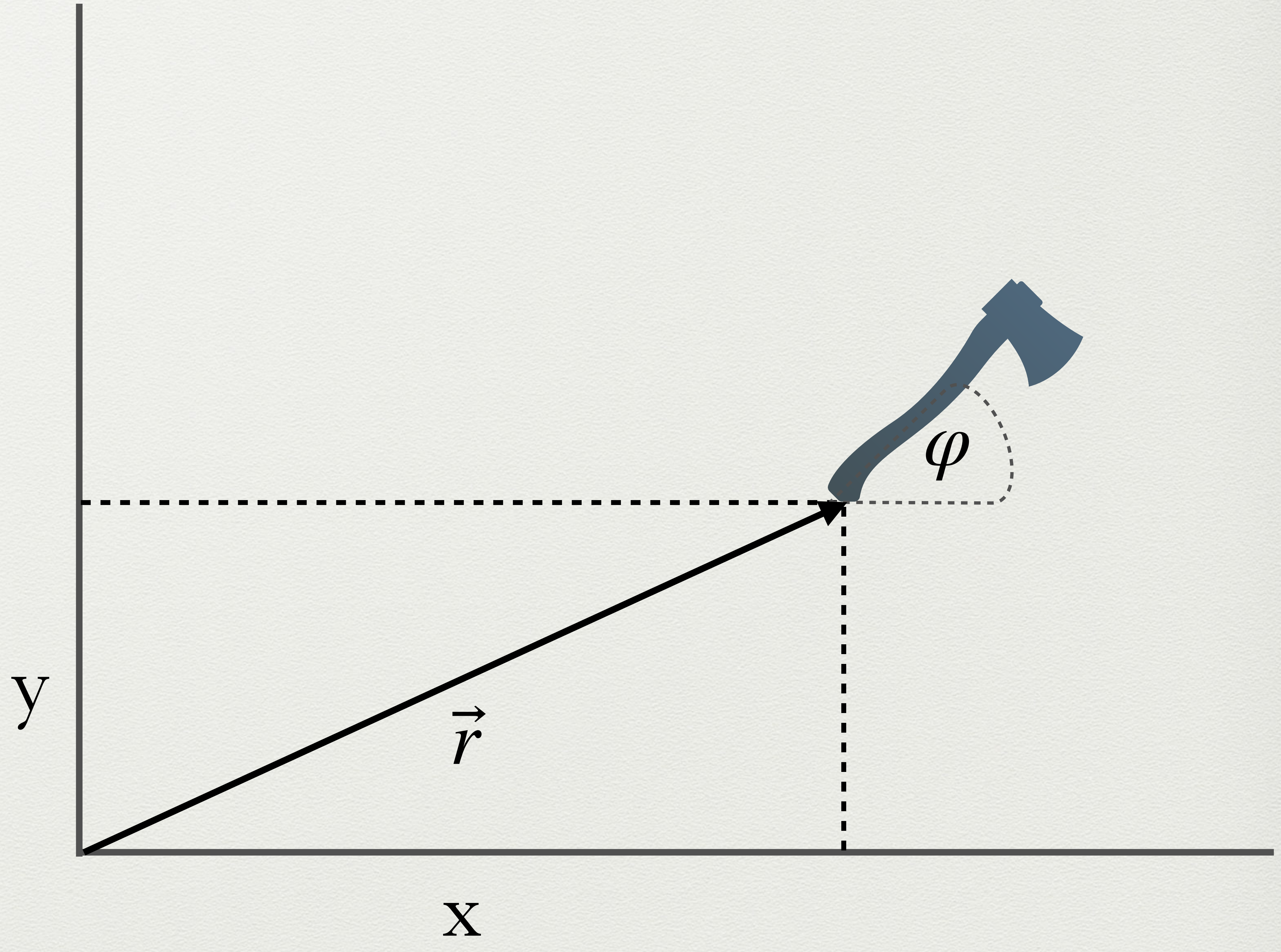
- zo začiatku budeme uvažovať len dva rozmery, pretože tam je všetko o dosť jednoduchšie (do troch rozmerov sa vydáme až keď zvládneme 2D prípad)

určenie polohy telesa v dvoch rozmeroch

- prirodzené určenie polohy tuhého telesa: poloha jedného konkrétneho bodu telesa a k tomu ešte orientácia telesa v priestore

- v dvojrozmernom prípade je orientácia telesa určená jedným uhlom

- konvencia: v prípade uhla za kladný smer zvykneme považovať smer opačný, ako je smer pohybu hodinových ručičiek



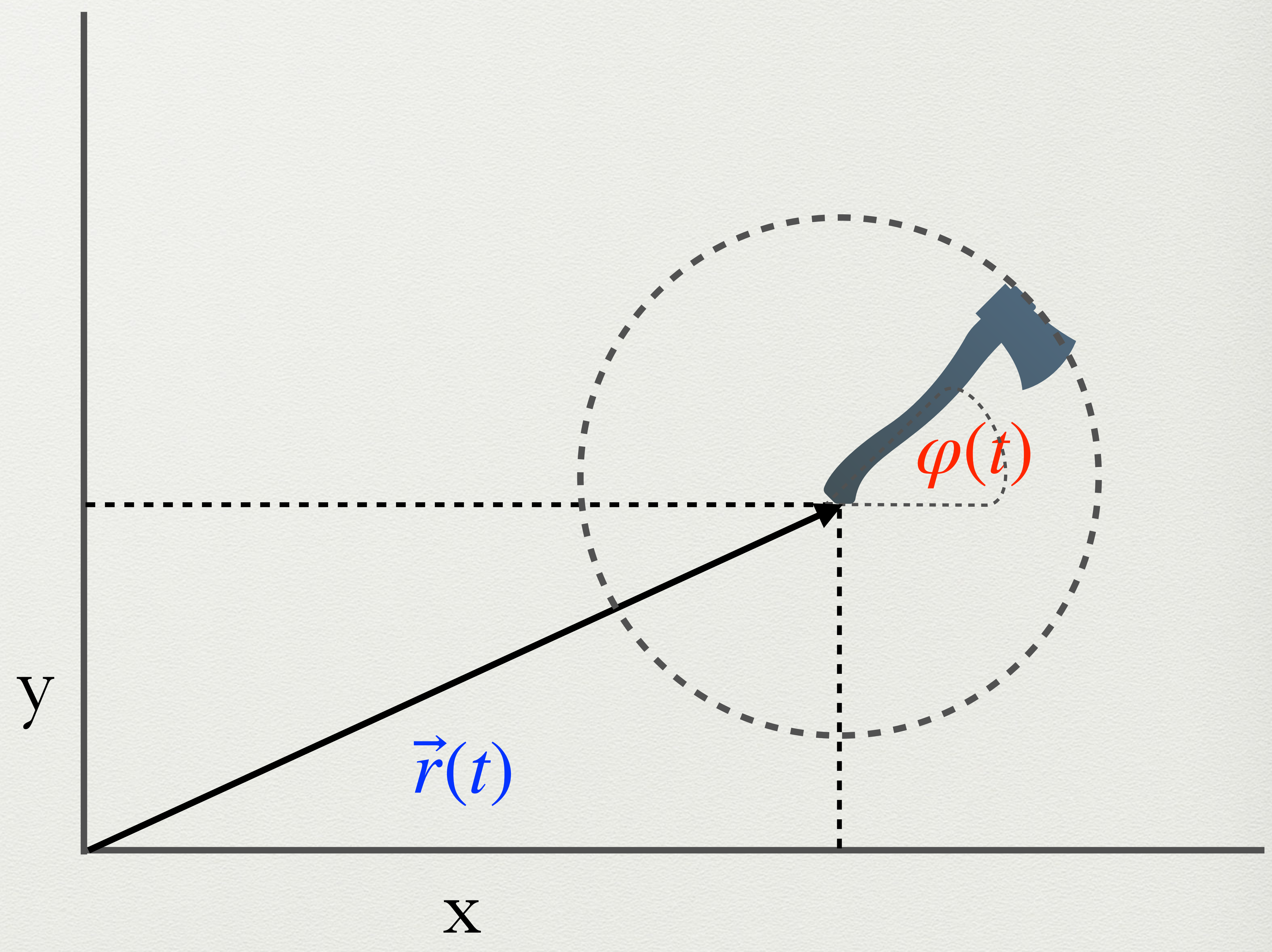
určenie pohybu telesa v dvoch rozmeroch

- poloha ako funkcia času:
  jednak pohyb telesa ako celku, opísaný funkciou $\vec{r}(t)$
  a jednak jeho rotácia, opísaná funkciou $\varphi(t)$

- ak má byť rotácia opísaná jediným uhlom $\varphi(t)$,
  body telesa sa musia pohybovať okolo bodu $\vec{r}(t)$
  po sústredných kružniciach

- taká situácia nastane len ak sa vzdialenosť bodu $\vec{r}(t)$
  od jednotlivých bodov telesa v čase nemení

- čo platí nielen vtedy, keď je $\vec{r}(t)$ polohový vektor
  niektorého z bodov telesa, ale aj vtedy, keď je $\vec{r}(t)$
  polohový vektor hmotného stredu telesa



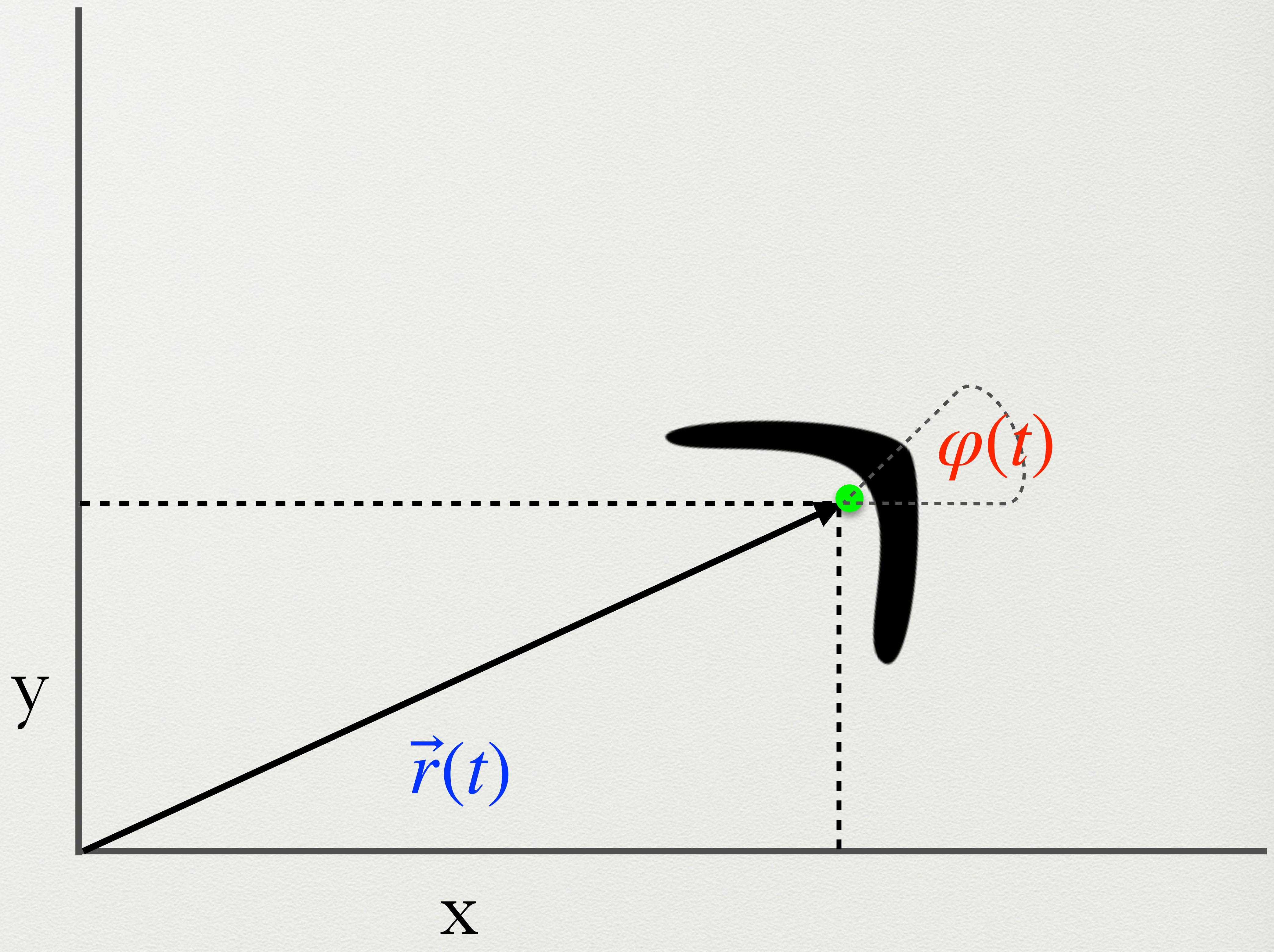
hmotný stred tuhého telesa

- polohu a pohyb tuhého telesa "ako celku" je často výhodné opisovať nie polohou niektorého jeho bodu, ale polohou hmotného stredu

$$\vec{r} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

- dôležitá vec (prečo dôležitá, uvidíme o chvíľku): pri posunutí všetkých bodov telesa o rovnaký vektor $\vec{r}'$ sa o tento vektor $\vec{r}'$ posunie aj hmotný stred a jeho vzdialenosti od bodov telesa sa teda nezmenia (dokážte, ide to priamo z definície)

- pri rotáciách okolo hmotného stredu sa jeho vzdialenosti od bodov telesa tiež nezmenia



vzdialenosť hmotného stredu tuhého telesa od jednotlivých jeho bodov sa nemení

pohybová rovnica pre polohový vektor tuhého telesa

- rovnica pre $\vec{r}(t)$ závisí od výberu bodu, pomocou ktorého určujeme polohu celého tuhého telesa

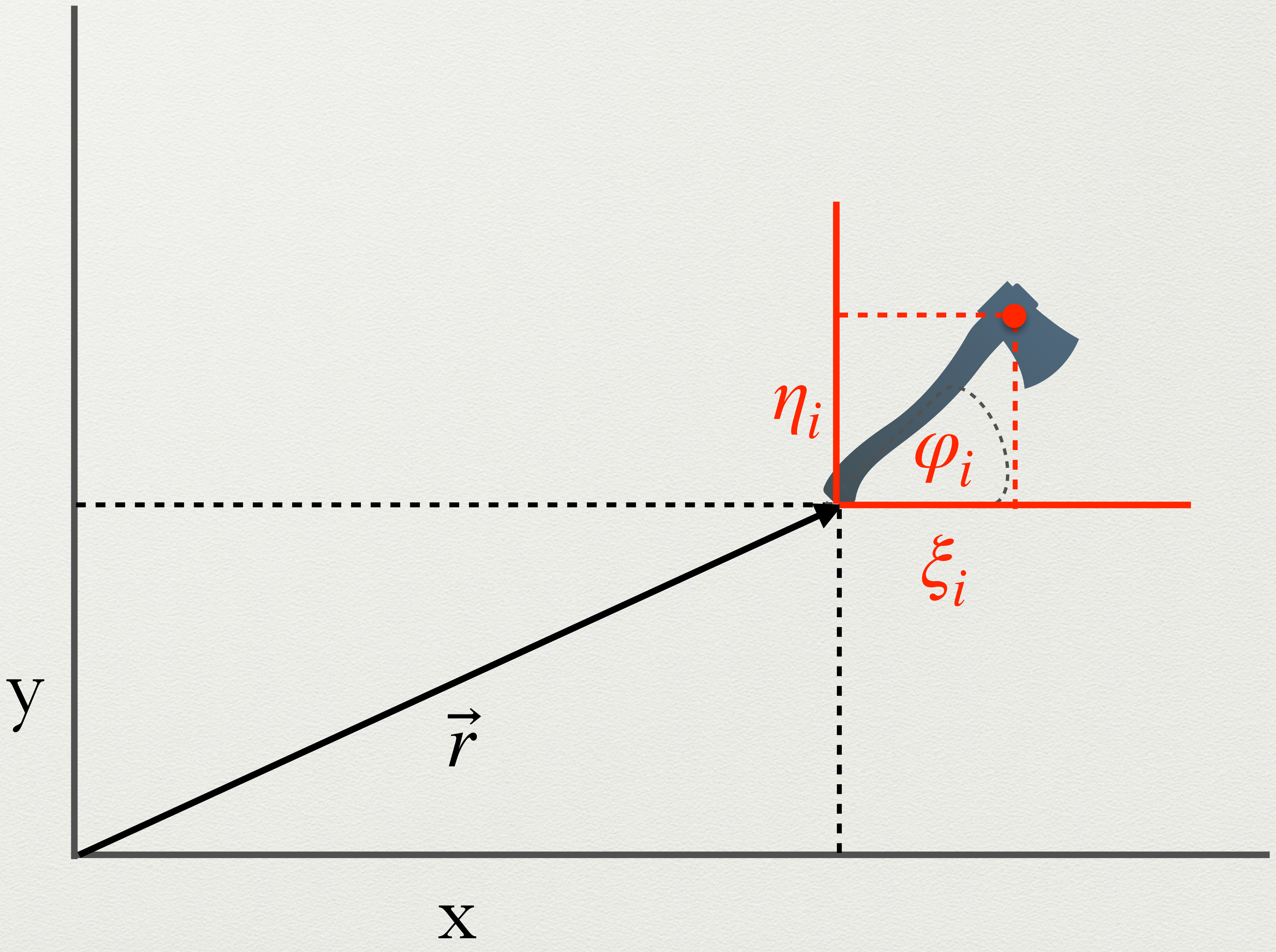
- ak je niektorý bod nášho tuhého telesa upevnený, je rozumné vybrať tento bod, pretože potom preň nijakú pohybovú rovnicu nepotrebujeme

- ak nie je nijaký bod upevnený, potom je asi najrozumnejšie vybrať hmotný stred, pre ktorý už pohybovú rovnicu poznáme:

$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ kde $\vec{F}$ je celková vonkajšia sila

uhol, uhlová rýchlosť, uhlové zrýchlenie

- teraz odvodíme diferenciálnu rovnicu pre orientáciu tuhého telesa, t.j. pre $\varphi(t)$
- uvažujme pomocnú súradnicovú sústavu, ktorej počiatok je vo vybranom bode $\vec{r}(t)$
- súradnice i-teho bodu telesa v pomocnej súradnicovej sústave označme $\xi_i(t)$ $\eta_i(t)$
- uhol $\varphi_i(t) = \arctan \frac{\eta_i(t)}{\xi_i(t)}$ závisí od i
- uhlová rýchlosť $\omega(t) = \dot{\varphi}_i(t)$ nezávisí od i je rovnaká pre všetky body tuhého telesa
- uhlové zrýchlenie $\varepsilon(t) = \dot{\omega}(t) = \ddot{\varphi}_i(t)$



výpočet uhlovej rýchlosti

- derivácia funkcie arcus tangens $\frac{d}{dt}\arctan t = \frac{1}{1+t^2}$

- derivácia zloženej funkcie $\frac{d}{dt}\arctan g(t) = \frac{1}{1+g^2(t)}\ \dot{g}(t)$

- derivácia funkcie $g(t) = \frac{\eta_i(t)}{\xi_i(t)}$ $\dot{g}(t) = \frac{\dot{\eta}_i(t)\xi_i(t) - \eta_i(t)\dot{\xi}_i(t)}{\xi_i^2(t)}$

- uhlová rýchlosť $\omega(t) = \frac{\dot{\eta}_i(t)\,\xi_i(t) - \eta_i(t)\,\dot{\xi}_i(t)}{\xi_i^2(t) + \eta_i^2(t)} = \frac{\dot{\eta}_i(t)\,\xi_i(t) - \eta_i(t)\,\dot{\xi}_i(t)}{\rho_i^2}$

$\rho_i^2 = \xi_i^2(t) + \eta_i^2(t)$ je od času nezávislý kvadrát vzdialenosti i-teho bodu od počiatku pomocnej súradnicovej sústavy (vzájomné vzdialenosti bodov ani vzdialenosti bodov od hmotného stredu sa v tuhom telese s časom nemenia)

výpočet uhlového zrýchlenia

- ďalej vypočítame uhlové zrýchlenie $\varepsilon(t) = \dot{\omega}(t)$ kde $\omega(t) = \dfrac{\dot{\eta}_i(t)\,\xi_i(t) - \eta_i(t)\,\dot{\xi}_i(t)}{\rho_i^2}$
- keďže menovateľ nezávisí od času, derivácia je

$$\dot{\omega}(t) = \frac{\ddot{\eta}_i(t)\,\xi_i(t) + \dot{\eta}_i(t)\,\dot{\xi}_i(t) - \dot{\eta}_i(t)\,\dot{\xi}_i(t) - \eta_i(t)\,\ddot{\xi}_i(t)}{\rho_i^2} = \frac{\ddot{\eta}_i(t)\,\xi_i(t) - \eta_i(t)\,\ddot{\xi}_i(t)}{\rho_i^2}$$

- zvláštny a nie úplne najprirodzenejší výraz v čitateli sa bude (bohužiaľ) vyskytovať často, a preto je dobré poznať niekoľko jeho iných vyjadrení, ktoré sa teraz naučíme

$a_x b_y - a_y b_x$

- majme dva vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ so zložkami

$$a_x = a\cos\alpha \qquad a_y = a\sin\alpha$$
$$b_x = b\cos\beta \qquad b_y = b\sin\beta$$

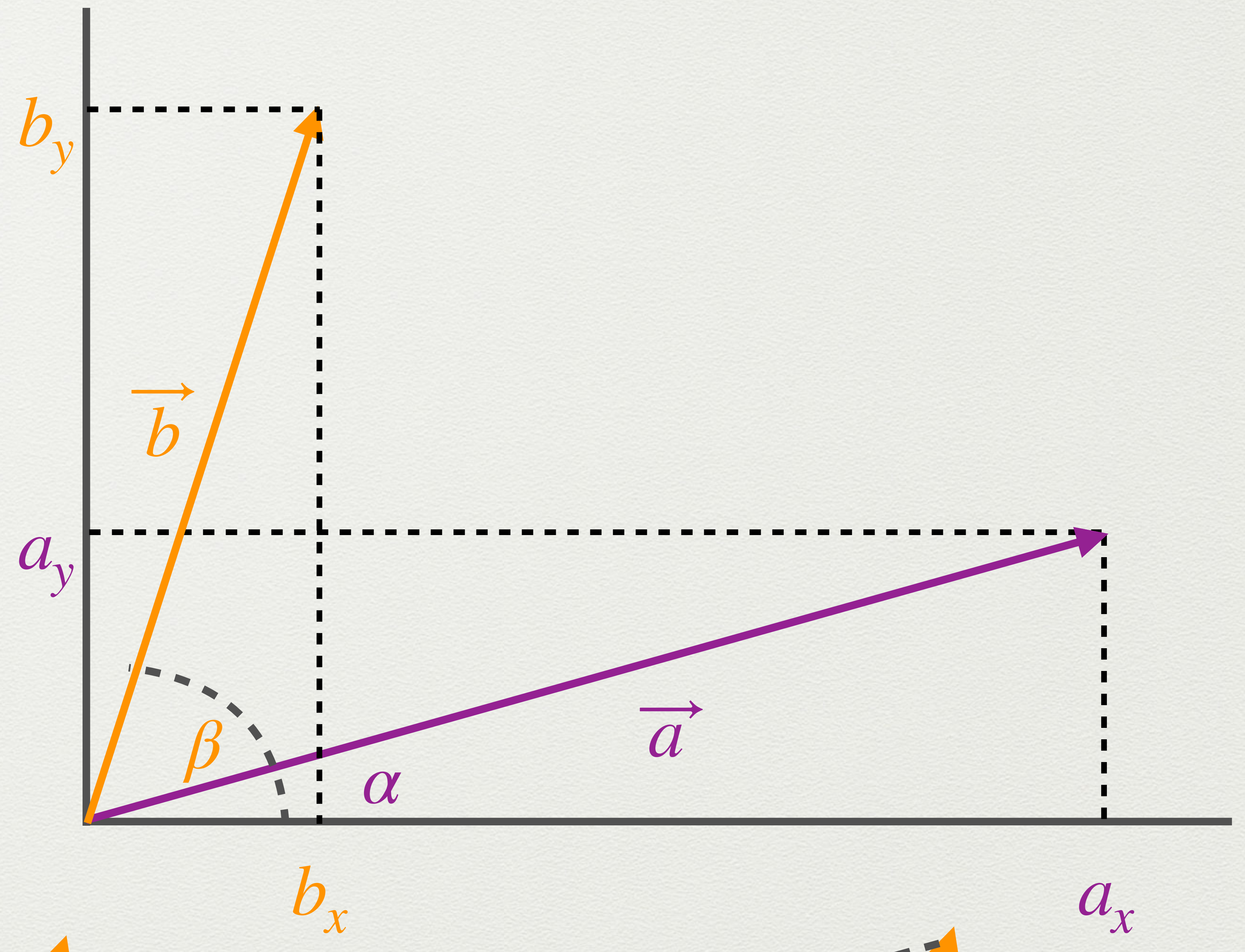
- $a_x b_y - a_y b_x = a\,b\,(\cos\alpha\,\sin\beta - \cos\beta\,\sin\alpha)$

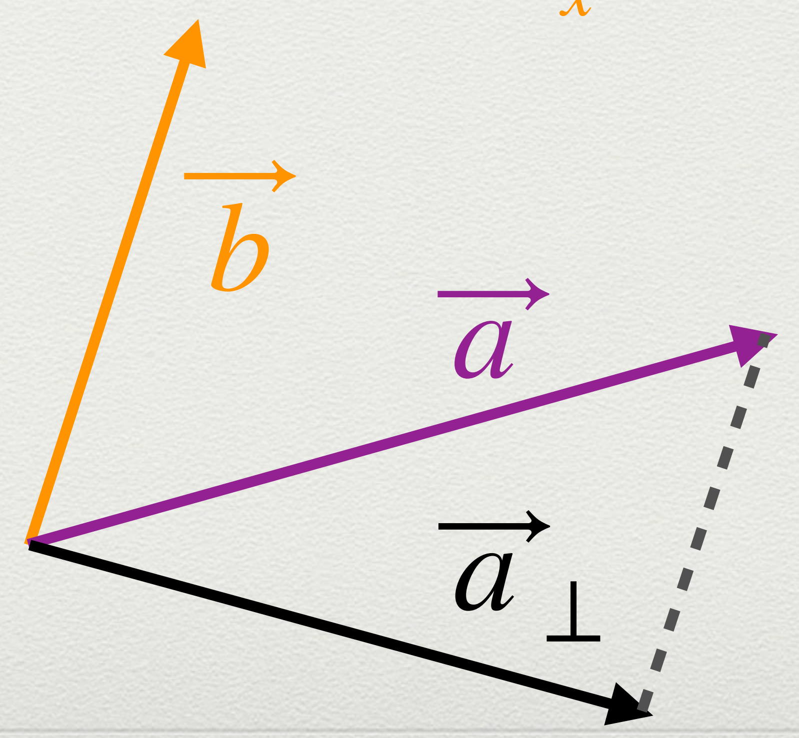
$$= a\,b\,\sin(\beta - \alpha) = a\,b\,\sin\phi$$

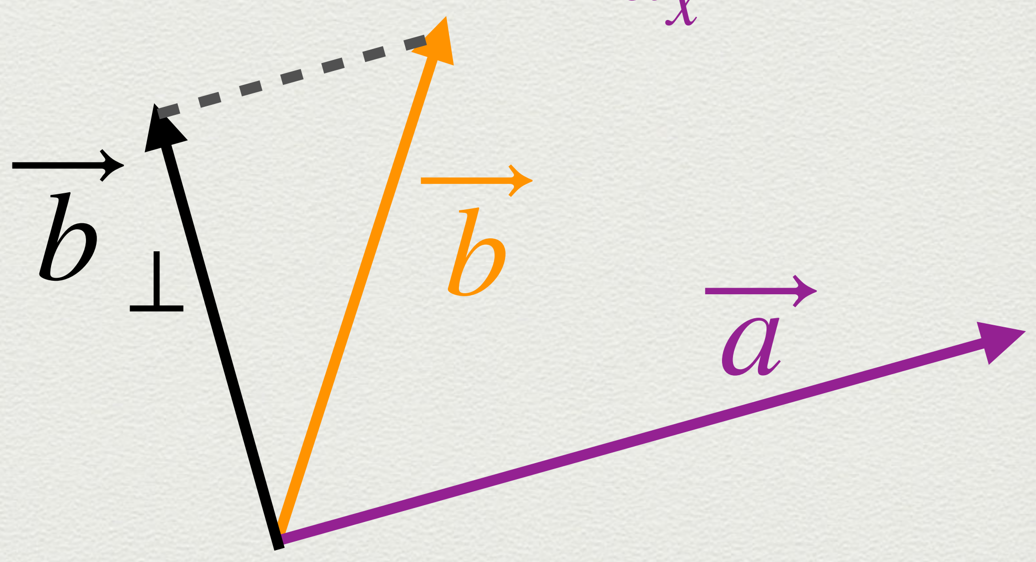
kde ϕ je uhol medzi vektormi $\vec{a}$ a $\vec{b}$ (orientovaný uhol smerujúci od $\vec{a}$ ku $\vec{b}$)

- výraz $a\,b\,\sin\phi$ sa dá zapísať aj ako súčin veľkosti jedného vektora a kolmej zložky druhého vektora (ktorej sa hovorí rameno)

$$a\,b\,\sin\phi = a_\perp\, b = a\, b_\perp$$







súvis s vektorovým súčinom

- v troch rozmeroch je výraz $a_x b_y - a_y b_x$ z-ovou zložkou vektora $\vec{a} \times \vec{b}$
- v dvoch rozmeroch nemáme nič také, ako vektorový súčin
- ale ak chápeme 2D priestor ako podpriestor 3D priestoru, potom má vektorový súčin dobrý zmysel (v tom 3D) a dá sa používať
- takže dostávame ešte jeden možný zápis nášho výrazu, a síce

$$a_x b_y - a_y b_x = \left(\vec{a} \times \vec{b} \right)_z$$

pohybová rovnica pre orientáciu tuhého telesa

- nech sa tuhé teleso skladá z *N* hmotných bodov (s pevnými vzájomnými vzdialenosťami)

- vynásobme rovnicu pre uhlové zrýchlenie hmotnosťou *i*-teho bodu: $m_i \rho_i^2 \varepsilon = \xi_i F_{\eta,i} - \eta_i F_{\xi,i}$

- sčítajme cez všetky body (od *i=1* po *N*):

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \rho_i^2 \varepsilon = \sum_{i=1}^{N} \xi_i F_{\eta,i} - \eta_i F_{\xi,i}$$

- toto je pohybová rovnica pre orientáciu telesa, ale väčšinou sa používa stručnejší zápis

- stručnejší zápis:

$$\boxed{I \varepsilon = M}$$

kde

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i \rho_i^2 \qquad M = \sum_{i=1}^{N} \xi_i F_{\eta,i} - \eta_i F_{\xi,i}$$

- *I* sa nazýva <u>moment zotrvačnosti</u>
  <u>*M*</u> sa nazýva <u>moment sily</u>

- obidva momenty (zotrvačnosti aj sily) sú definované vzhľadom k referenčnému bodu

moment sily – starý známy

- vektor momentu sily vzhľadom k bodu $\vec{R}$

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{R}) \times \vec{F}_i$$

už vystupoval v zákone (ne)zachovania momentu hybnosti

- náš terajší moment sily M nie je nič iné, ako z-ová zložka vektora $\vec{M}$ vzhľadom k počiatku našej pomocnej súradnicovej sústavy

- pozor: $M \neq |\vec{M}|$ $\quad M = \vec{M}_z$

momenty sústavy viacerých častíc

- pre sústavu N hmotných bodov definujeme momenty (vzhľadom k počiatku)

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i \qquad \vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

- pre momenty vzhľadom k inému bodu $\vec{R}$, treba v definíciách zameniť $\vec{r}_i \to \vec{r}_i - \vec{R}$

- rýchlosť zmeny momentu hybnosti: $\dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

$(\dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i = \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i = 0$ a $\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i)$

moment sily je formálne jednoduchší v 3D

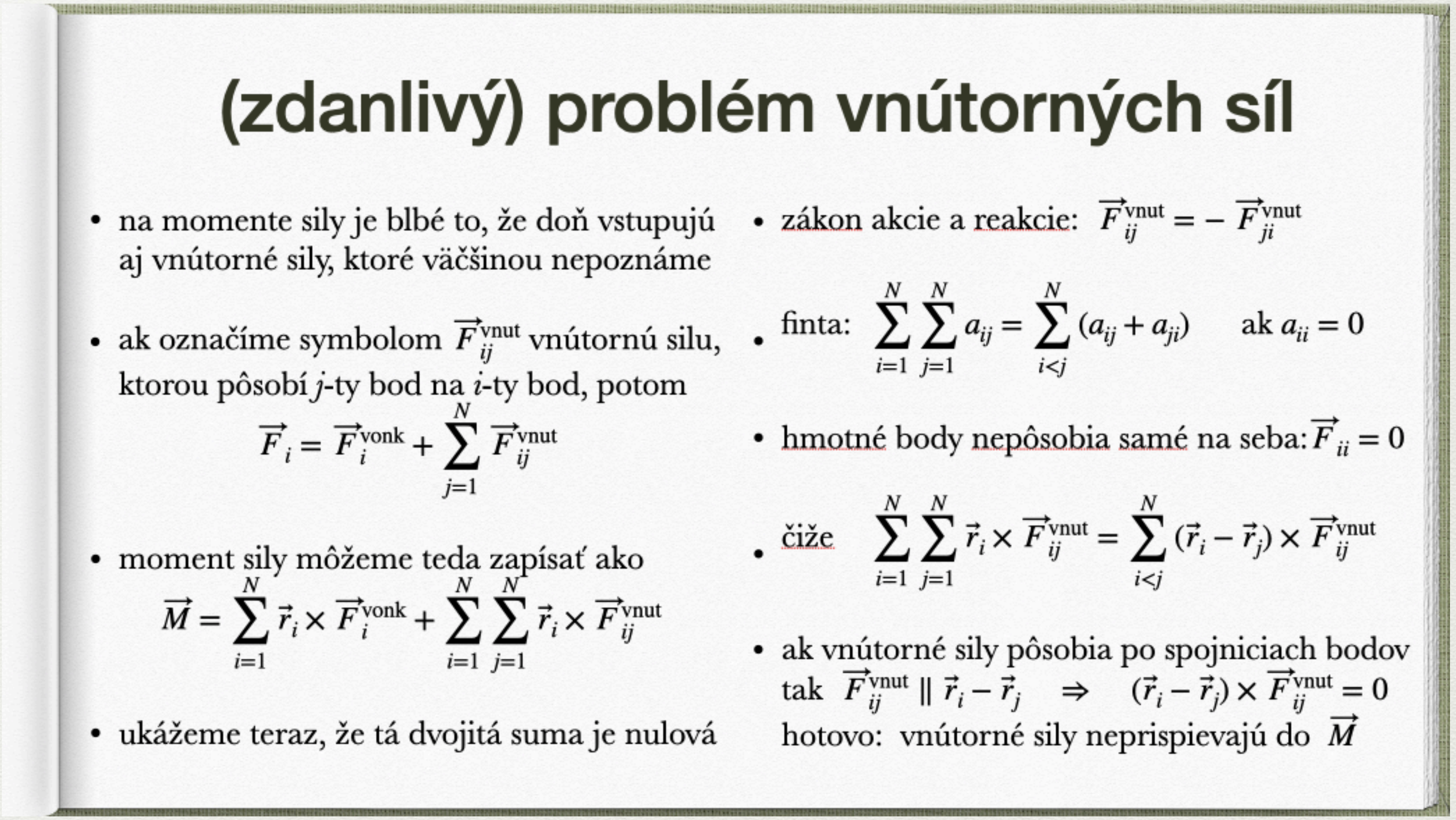
M v 2D je vlastne jedna zložka $\vec{M}$ v 3D

poznámka o vnútorných silách

- v prípade momentu sily $\vec{M}$ v 3D sme v prednáške o zákonoch zachovania ukázali, že ak vnútorné sily pôsobia po spojniciach a platí pre ne zákon akcie a reakcie, potom tieto sily neprispievajú do momentu sily

- rovnaká vec platí aj pre moment sily M v 2D, čiže pri výpočte M stačí brať do úvahy len vonkajšie sily

- dôkaz: stačí zobrať už urobený dôkaz v 3D a brať v ňom do úvahy z zložku



iná možnosť: spomínaný dôkaz v 3D berte len ako inšpiráciu pre dôkaz v 2D priamo z definície

poznámka o fiktívnych silách

- keďže pohybovú rovnicu pre uhol $\varphi(t)$ píšeme v "pohybujúcej sa" sústave, ktorá je vo všeobecnosti neinerciálna, do momentu sily M musíme zarátať príspevok fiktívnych síl

- ak uhol $\varphi(t)$ uvažujeme v nerotujúcej (vzhľadom k inerciálnym) vzťažnej sústave, potom jedinou fiktívnou silou je zotrvačná fiktívna sila

- pre túto silu sa dá vybrať referečný bod tak, aby bol jej moment nulový

zotrvačná fiktívna sila

- v zrýchľujúcich sústavách sa dá zákon zotrvačnosti zachrániť dosť jednoduchým trikom: k reálnym silám, ktorými na teleso pôsobia iné telesá (prípadne silové polia), pridáme takzvanú zotrvačnú fiktívnu silu
$$\vec{F}_{\text{zotrvacna}} = -m\vec{a}$$
pričom $\vec{a}$ je zrýchlenie neinerciálnej sústavy vzhľadom k inerciálnym

- z predchádzajúceho vyplýva, že na testovacie teleso, ktoré vzhľadom k našej neinerciálnej vzťažnej sústave stojí (respektíve sa pohybuje rovnomerne priamočiaro), pôsobí celková výsledná sila (reálna + fiktívna)
$$\vec{F} = \vec{F}_{skutocna} + \vec{F}_{zotrvacna} = m\vec{a} - m\vec{a} = 0$$

- vďaka zavedeniu zotrvačnej fiktívnej sily teda zákon zotrvačnosti platí aj v zrýchľujúcich neinerciálnych vzťažných sústavách

fiktívna sila $\vec{F}(t) = -m\,\vec{a}(t)$ má vždy charakter homogénneho (časovo premenného) grav. poľa

moment zotrvačnej fiktívnej sily

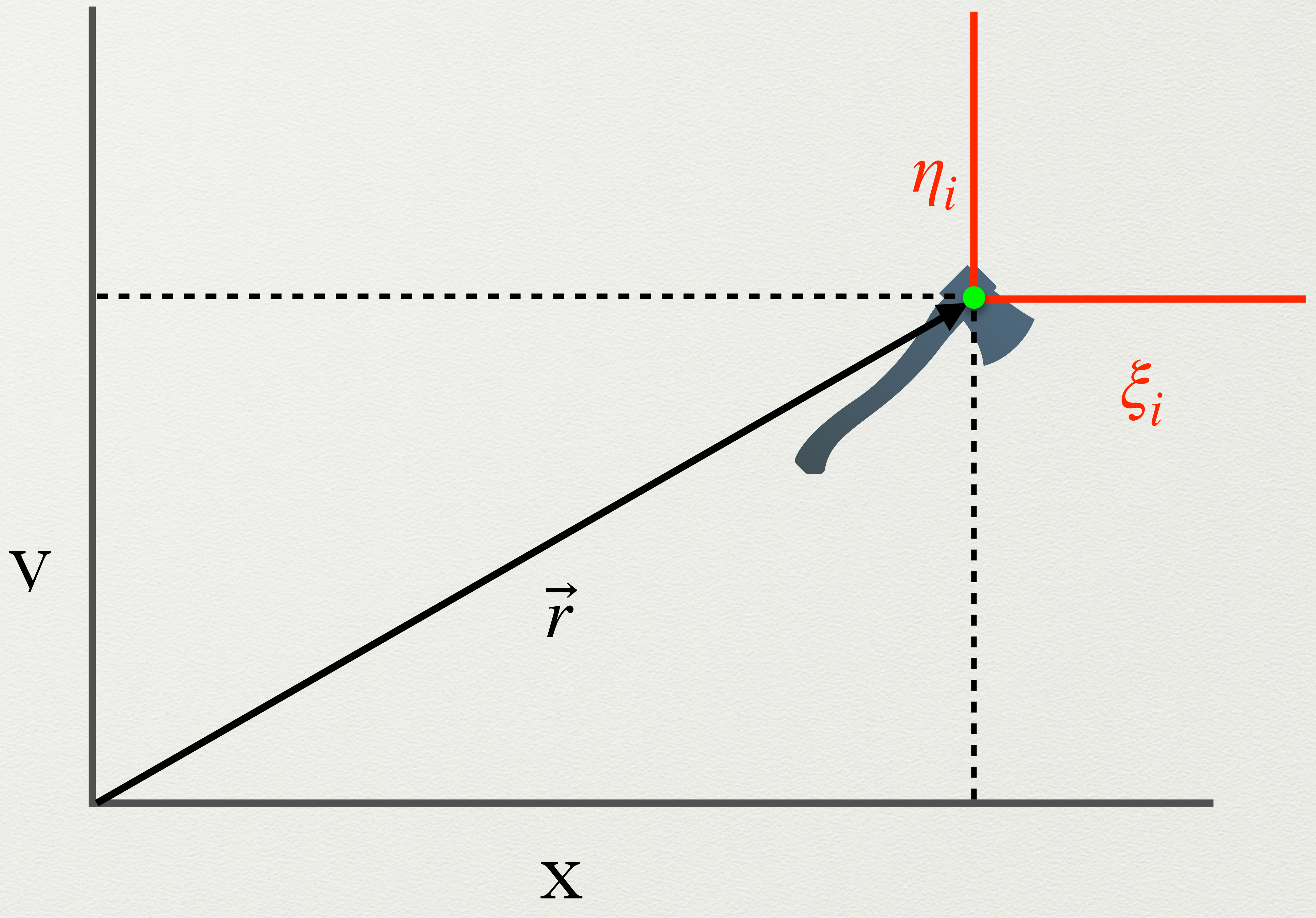
- $\vec{M}$ vzhľadom k referenčnému bodu $\vec{R}$

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{R}) \times \vec{F}_i$$

$$= - \left(\sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_i - \vec{R}) \right) \times \vec{a}(t)$$

- ak je referenčným bodom hmotný stred telesa, potom je moment sily nulový,

pretože $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = m \vec{R}_{\text{hmotny stred}}$



ponaučenie: ak umiestnime počiatok pomocnej sústavy do hmotného stredu telesa, môžeme zabudnúť na moment zotrvačnej fiktívej sily

moment zotrvačnosti – nová vec

- moment zotrvačnosti
$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i \rho_i^2$$
sme zatiaľ nikde nestretli

- tento moment závisí od výberu počiatku vzťažnej sústavy a vo všeobecnosti závisí aj od polohy a orientácie telesa (pretože od nich závisia polohové vektory $\vec{\rho}_i$)

- ak sa však polohové vektory $\vec{\rho}_i(t)$ menia v čase tak, že ich veľkosti $\rho_i(t)$ sa v čase nemenia, potom sa ani I nemení

- kedy sa $\rho_i(t)$ nemenia v čase?

- keď sa nemenia vzdialenosti jednotlivých častí tuhého telesa od refenčného bodu

- to sa deje napríklad vtedy, ak je referenčným bodom jeden z bodov tuhého telesa

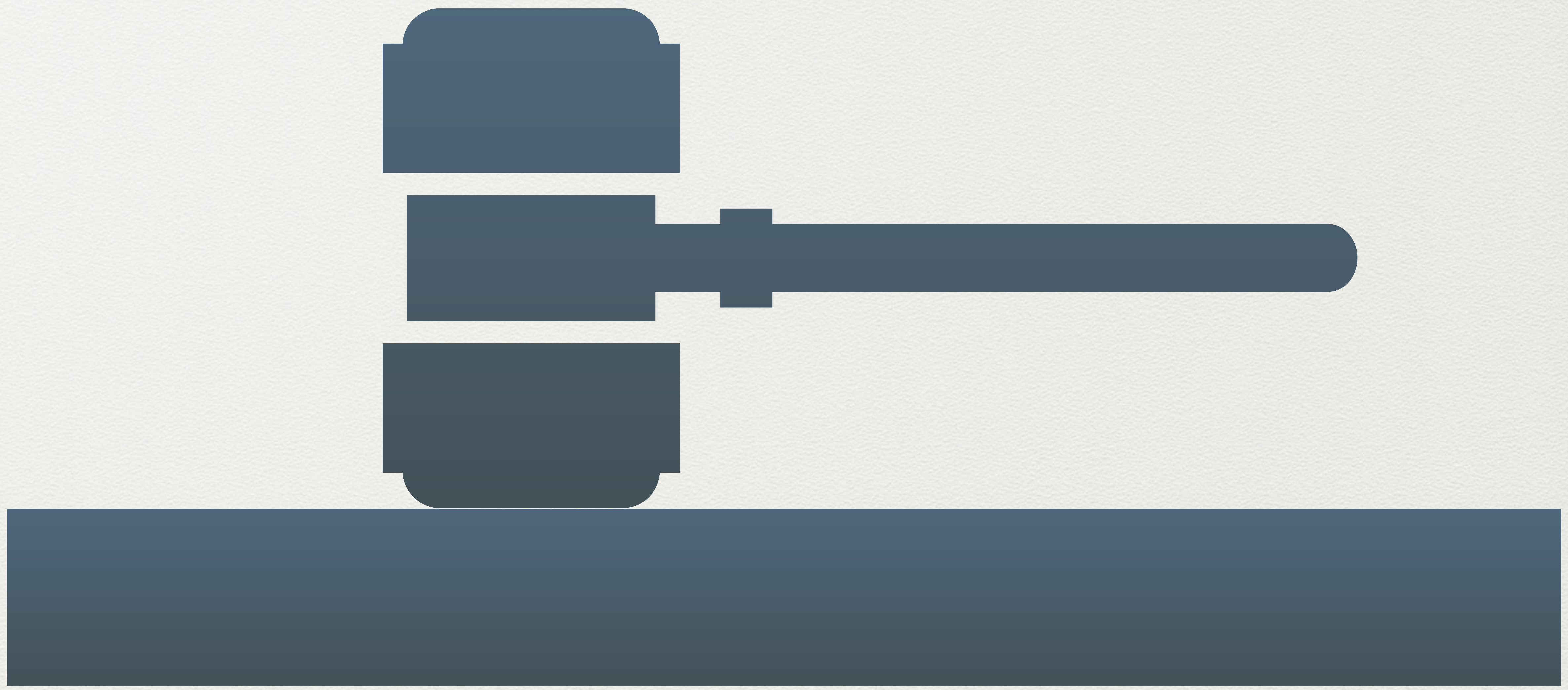
- ale deje sa to aj vtedy, ak je tým referenčným bodom hmotný stred telesa, ktorý nemusí byť zhodný s ani jedným z bodov telesa
(toto sme nahliadli na začiatku tejto prednášky a teraz vidíme, že je to pomerne dôležitá vec)

upevnený bod ako referenčný bod

- upevnený bod po prvý raz:
  pre upevnený bod nemusíme riešiť pohybovú rovnicu, pretože riešenie poznáme: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0$

- upevený bod po druhý raz:
  moment sily upevnenia vzhľadom k bodu upevnenia je nulový (keďže je nulové rameno tejto sily)

- upevnený bod po tretí raz:
  moment zotrvačnosti vzhľadom k bodu upevnenia (čo je jeden z bodov telesa) sa v čase nemení



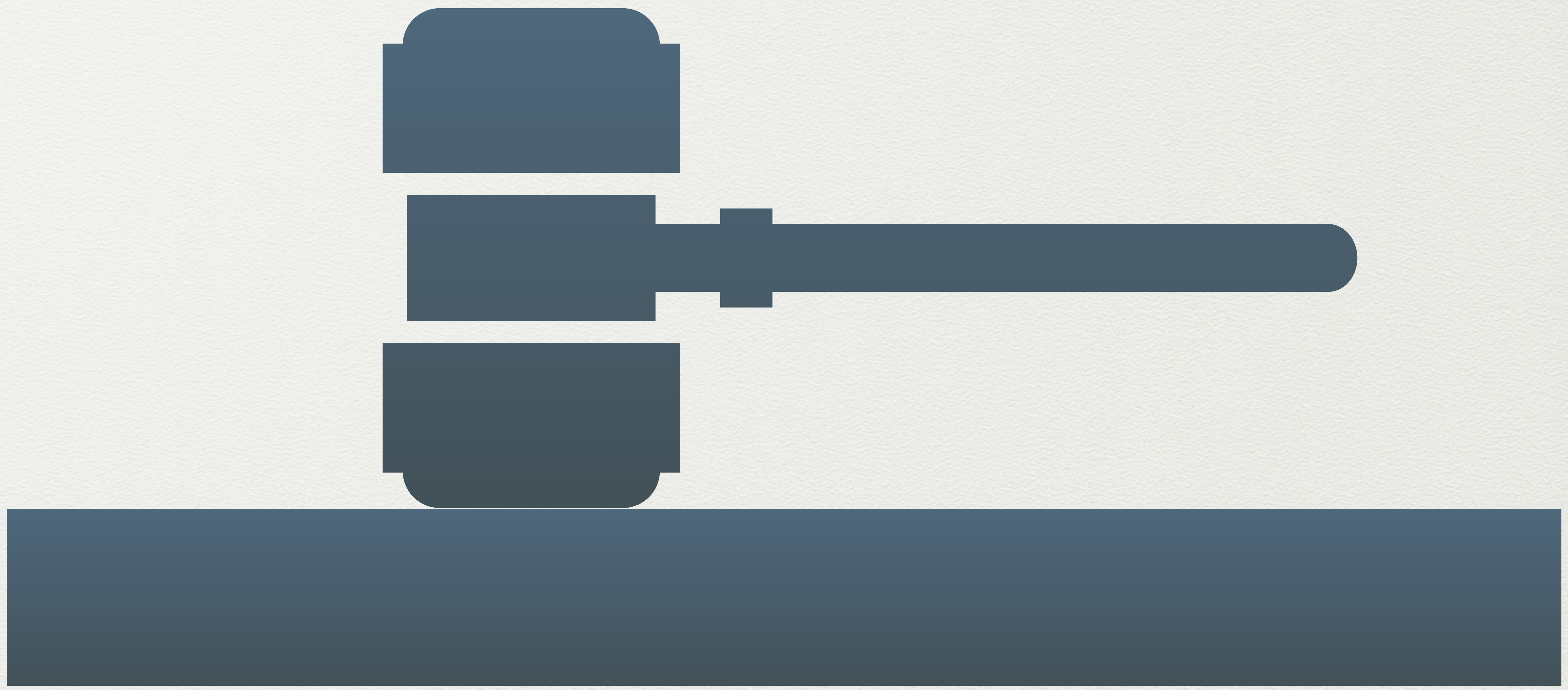
- odklepnuté:
  ak je nejaký bod tuhého telesa upevnený, potom ako referenčný bod vystupujúci v pohybových rovniciach berieme práve tento upevnený bod

hmotný stred ako referenčný bod

- hmotný stred po prvý raz:
  pre hmotný stred platí pohybová rovnica s celkovou hmotnosťou telesa a celkovou vonkajšou pôsobiacou silou

- hmotný stred po druhý raz:
  moment fiktívnej zotrvačnej sily vzhľadom k hmotnému stredu je nulový (ako sme nahliadli vyššie)

- hmotný stred po tretí raz:
  moment zotrvačnosti vzhľadom k hmotnému stredu sa v čase nemení (ako sme nahliadli vyššie)



- odklepnuté:
  ak nijaký bod tuhého telesa nie je upevnený, potom ako referenčný bod vystupujúci v pohybových rovniciach berieme hmotný stred

podobnosti a rozdiely

jednorozmerný posuvný pohyb

- pohybová rovnica: $m\,\ddot{x}(t) = F(x, \dot{x}, t)$
- hmotnosť m býva zadané (zmerané) číslo
- sila F je nejaká dopredu zadaná funkcia polohy, rýchlosti a času a s touto zadanou funkciou riešime diferenciálnu rovnicu pre neznámu funkciu $x(t)$

dvojrozmerný rotačný pohyb

- pohybová rovnica: $I\,\ddot{\varphi}(t) = M(\varphi, \dot{\varphi}, t)$
- moment zotrvačnosti I treba vypočítať
- moment sily M ako konkrétnu funkciu uhla, uhlovej rýchlosti a času treba vypočítať a až potom môžeme riešiť diferenciálnu rovnicu pre neznámu funkciu $\varphi(t)$

ak sú posuvný a rotačný pohyb navzájom previazané, potom

$$m\,\ddot{x}(t) = F(x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi}, t) \qquad \text{a} \qquad I\,\ddot{\varphi}(t) = M(\varphi, \dot{\varphi}, x, \dot{x}, t)$$

ešte dve podobnosti

- kinetická energia rotujúceho telesa je súčtom kinetických energií jeho častí

$$E_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

- rýchlosti jednotlivých častí sú $v_i = \rho_i \omega$ celkove pre kinetickú energiu máme

$$E_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \rho_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

- $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$ pre dvojrozmerné rotácie

  $E_k = \frac{1}{2} m v^2$ pre jednorozmerné translácie

- moment hybnosti je v 2D definovaný analogicky ako moment sily

$$L = \sum_{i=1}^{N} \xi_i p_{\eta,i} - \eta_i p_{\xi,i}$$

- $\xi p_\eta - \eta p_\xi = \rho p_\perp = m \rho^2 \omega$ (pri pohybe po kružniciach $p_\perp = p$ a $p = m \rho \omega$)

$$L = \sum_{i=1}^{N} m_i \rho_i^2 \omega = I \omega$$

- $L = I \omega$ pre dvojrozmerné rotácie

  $p = m v$ pre jednorozmerné translácie

upútavka na záver

- moment zotrvačnosti a moment sily hrajú v 2D rotáciách rovnakú úlohu, ako hrajú hmotnosť a sila v 1D transláciách (posunutiach)
- na rozdiel od hmotnosti a sily, ktoré bývajú často známe, moment zotrvačnosti a moment sily treba väčšinou najprv pre každdú konkrétnu situáciu vypočítať (a až potom môžeme pristúpiť k riešeniu pohybových rovníc)
- momenty zotrvačnosti a sily máme zatiaľ definované len vzhľadom k počiatku a len pre nespojité tuhé teleso zložené z diskrétnych hmotných bodov
- v ďalšej prednáške sa naučíme, ako sa počítajú momenty zotrvačnosti a sily pre tuhé teleso so spojite rozloženou hmotou a vzhľadom k ľubovoľnému bodu