

# POHYB TUHÉHO TELESA

najprv len v dvoch rozmeroch

mechanika 28

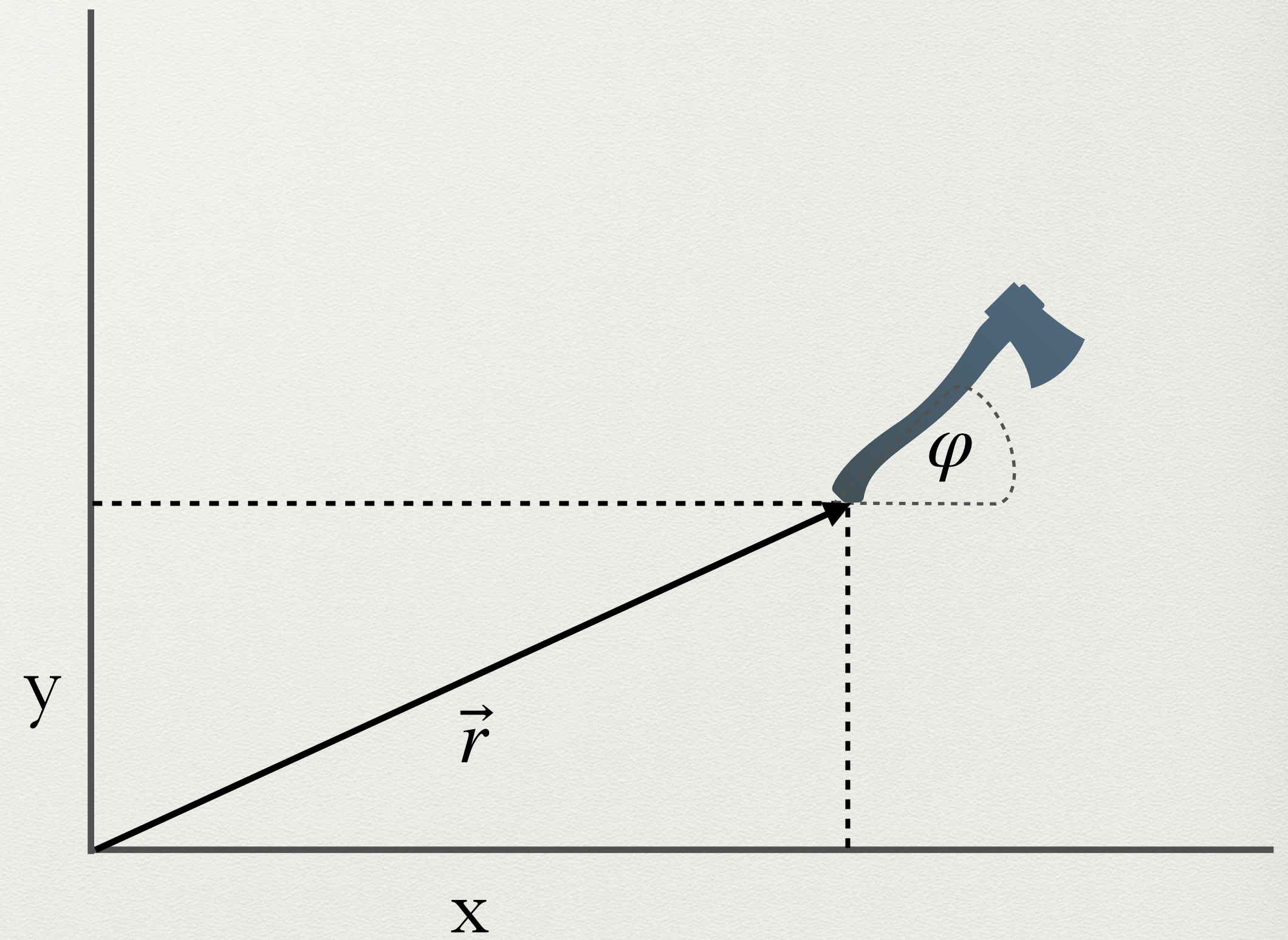
# telesá nezanedbateľnej veľkosti

- doteraz sme sa zaoberali mechanikou telies (relatívne) zanedbateľnej veľkosti (hovorí sa im hmotné body)
- teraz sa pozrieme na mechaniku telies nezanedbateľnej veľkosti, ktoré sú ale (dokonale) tuhé – nemenia svoj tvar
- zo začiatku budeme uvažovať len dva rozmery, pretože tam je všetko o dosť jednoduchšie (do troch rozmerov sa vydáme až keď zvládneme 2D prípad)



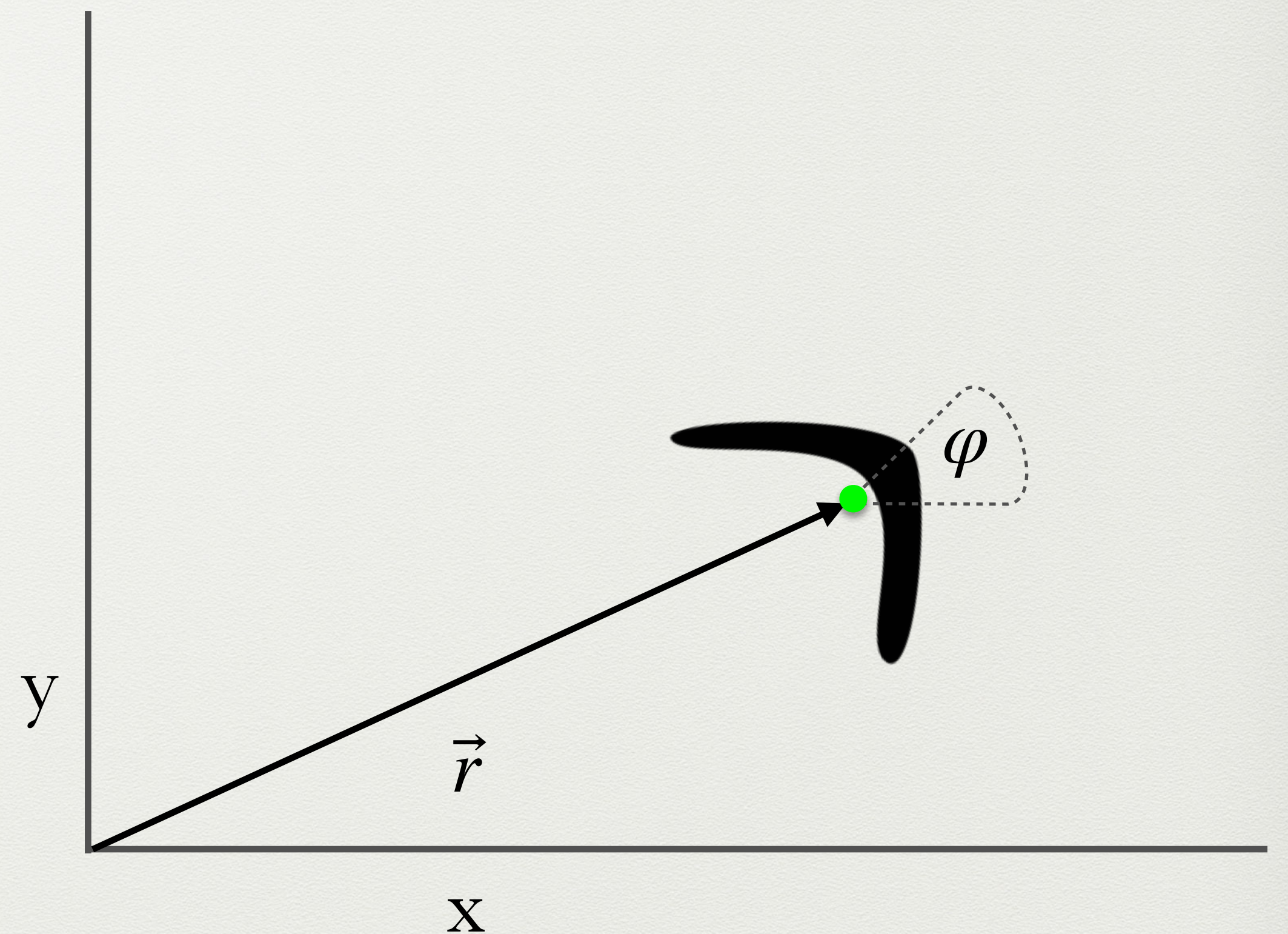
# opis polohy telesa v dvoch rozmeroch

- prirodzené určenie polohy tuhého telesa: poloha jedného konkrétneho bodu telesa a k tomu ešte orientácia telesa v priestore
- v dvojrozmernom prípade je orientácia telesa určená jedným uhlom (každý bod tuhého telesa má svoj vlastný uhol, ale keď poznáme jeden, sú ním dané všetky)
- konvencia: v prípade uhla za kladný smer zvykneme považovať smer opačný, ako je smer pohybu hodinových ručičiek



# hmotný stred ako referenčný bod

- namiesto jedného bodu telesa, ktorého poloha určuje polohu celého telesa, sa často používa hmotný stred
- hmotný stred však nie je jedným z bodov telesa
- je orientácia telesa vzhľadom k hmotnému stredu tiež daná jedným uhlom  $\varphi$ ?
- áno, ak sa body telesa môžu pohybovať vzhľadom k hmotnému stredu len po kružniciach
- čo platí, ak sa vzdialenosti jednotlivých bodov telesa od hmotného stredu počas pohybu nemenia
- nemenia sa?



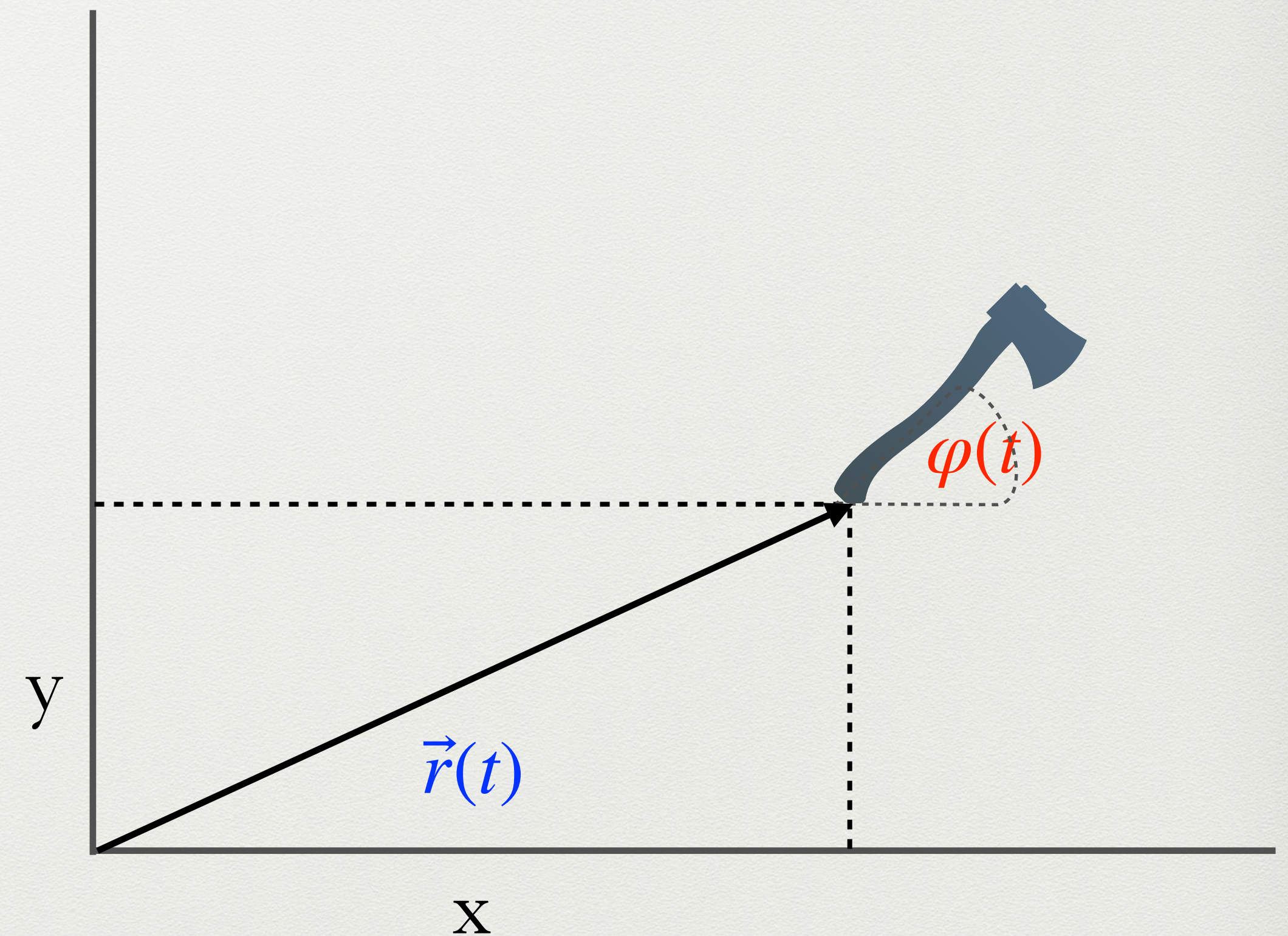
hmotný stred tuhého telesa  
môže ležať mimo tohto telesa

# nemenná vzdialenosť bodov telesa od hmotného stredu

- poloha hmotného stredu  $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i$
- poloha  $k$ -teho bodu vzhľadom k hmot. st.  $\vec{r}_k - \vec{R}$
- trik:  $\vec{r}_k - \vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i (\vec{r}_k - \vec{r}_i)$
- označme vzájomnú polohu  $i$ -teho a  $k$ -teho bodu symbolom  $\vec{w}_{ki} = \vec{r}_k - \vec{r}_i$
- kvadrát vzdialenosti  $k$ -teho bodu od hmot. stredu
$$(\vec{r}_k - \vec{R})^2 = \frac{1}{M^2} \left( \sum_i m_i \vec{w}_{ki} \right)^2 = \frac{1}{M^2} \sum_{i,j} m_i m_j \vec{w}_{ki} \cdot \vec{w}_{kj}$$
- teraz už len stačí nahliadnuť, že skalárne súčiny vektorov  $\vec{w}$  sa v čase nemenia
- skalárne súčiny sú dané veľkosťami vzájomných polohových vektorov  $\vec{w}$  a uhlami medzi nimi
- tieto veľkosti a uhly sa v tuhom telese s časom nemenia
- to znamená, že s časom sa nemení ani vzdialenosť  $k$ -teho bodu od hmotného stredu a to platí pre všetky  $k$

# opis pohybu telesa v dvoch rozmeroch

- poloha ako funkcia času:  
jednak pohyb telesa ako celku, opísaný funkciou  $\vec{r}(t)$   
a jednak jeho rotácia, opísaná funkciou  $\varphi(t)$
- pohybové rovnice:  
diferenciálne rovnice pre funkcie  $\vec{r}(t)$  a  $\varphi(t)$ , ktorých  
riešenie nám hovorí, ako vyzerá pohyb tuhého telesa
- základom mechaniky tuhého telesa sú diferenciálne  
rovnice pre transláciu a rotáciu tohto telesa  
ako prvý krok teda musíme nájsť tieto rovnice
- rovnica pre  $\vec{r}(t)$  sa nájde ľahko  
rovnica pre  $\varphi(t)$  sa nájde o čosi ťažšie



# pohybová rovnica pre polohový vektor tuhého telesa

- rovnica pre  $\vec{r}(t)$  závisí od výberu bodu, pomocou ktorého určujeme polohu celého tuhého telesa
- ak je niektorý bod nášho tuhého telesa upevnený, je rozumné vybrať tento bod, pretože potom preň nijakú pohybovú rovnicu nepotrebuje
- ak nie je nijaký bod upevnený, potom je asi najrozumnejšie vybrať hmotný stred, pre ktorý už pohybovú rovnicu poznáme:

**hmotný stred**  
príklad užitočnosti (ne)zachovania hybnosti

- ❖ vzťah pre rýchlosť zmeny celkovej hybnosti  $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$   
kde  $\vec{F}$  je celková sila (súčet všetkých vonkajších síl)  
vyzerá ako pohybová rovnica nejakej jednej častice
- ❖ dá sa táto rovnica zapísať aj v tvare  $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ , kde  $m$  je celková hmotnosť systému (súčet všetkých hmotností)?
- ❖ áno, ak definujeme polohu hmotného stredu  $\vec{r} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$
- ❖ je to priamy dôsledok zákona (ne)zachovania hybnosti

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad \text{kde } \vec{F} \text{ je celková vonkajšia sila}$$

# pohybová rovnica pre orientáciu tuhého telesa

## **posuvný pohyb tuhého telesa**

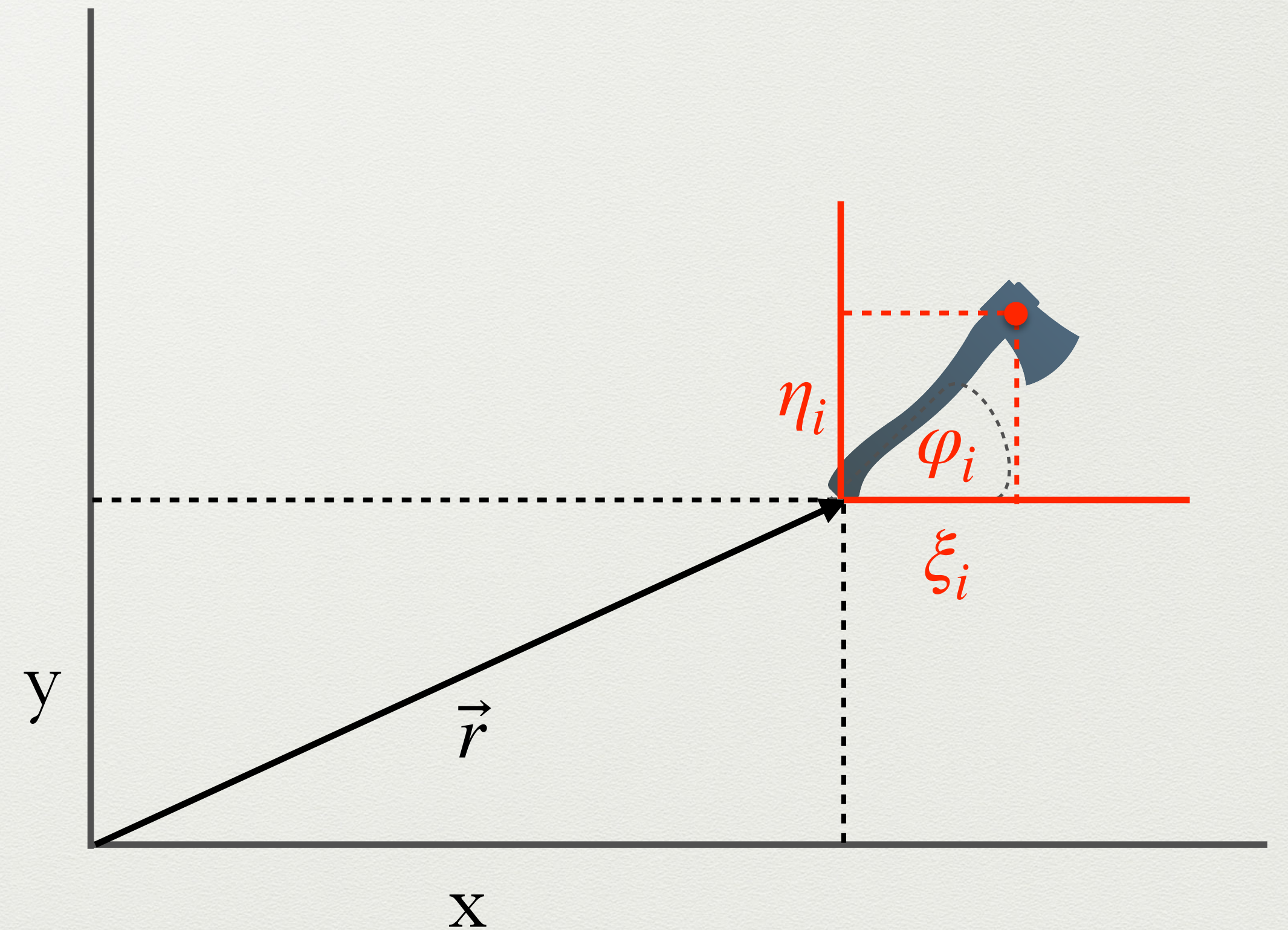
- pohybovú rovnicu pre hmotný stred poznáme z mechaniky hmotného bodu
- táto pohybová rovnica je matematickým dôsledkom Newtonovho zákona sily, čo je jeden z najdôležitejších prírodných zákonov
- zákon sily sa nedá matematicky odvodiť
- je to vlastnosť tohto sveta odpozorovaná z experimentálneho skúmania rôznych prírodných javov

## **rotačný pohyb tuhého telesa**

- pohybová rovnica pre rotácie telesa sa v rámci mechaniky hmotného bodu nevyskytuje
- je to nový nezávislý prírodný zákon, ktorého význam je porovnateľný s významom Newtonovho zákona sily?
- NIE, nie je to nezávislý prírodný zákon
- je to matematický dôsledok zákona sily, ako si o chvíľu ukážeme

# uhol, uhlová rýchlosť, uhlové zrýchlenie

- teraz odvodíme diferenciálnu rovnicu pre orientáciu tuhého telesa, t.j. pre  $\varphi(t)$
- uvažujme pomocnú súradnicovú sústavu, ktorej počiatok je vo vybranom bode  $\vec{r}(t)$
- súradnice  $i$ -teho bodu telesa v pomocnej súradnicovej sústave označme  $\xi_i(t)$   $\eta_i(t)$
- uhol  $\varphi_i(t) = \arctan \frac{\eta_i(t)}{\xi_i(t)}$  závisí od  $i$
- uhlová rýchlosť  $\omega(t) = \dot{\varphi}_i(t)$  nezávisí od  $i$  je rovnaká pre všetky body tuhého telesa
- uhlové zrýchlenie  $\varepsilon(t) = \dot{\omega}(t) = \ddot{\varphi}_i(t)$



# výpočet uhlovej rýchlosti

- derivácia funkcie arcus tangens  $\frac{d}{dt} \arctan t = \frac{1}{1+t^2}$
- derivácia zloženej funkcie  $\frac{d}{dt} \arctan g(t) = \frac{1}{1+g^2(t)} \dot{g}(t)$
- derivácia funkcie  $g(t) = \frac{\eta_i(t)}{\xi_i(t)}$   $\dot{g}(t) = \frac{\dot{\eta}_i(t)\xi_i(t) - \eta_i(t)\dot{\xi}_i(t)}{\xi_i^2(t)}$
- uhlová rýchlosť  $\omega(t) = \frac{\dot{\eta}_i(t)\xi_i(t) - \eta_i(t)\dot{\xi}_i(t)}{\xi_i^2(t) + \eta_i^2(t)} = \frac{\dot{\eta}_i(t)\xi_i(t) - \eta_i(t)\dot{\xi}_i(t)}{\rho_i^2}$

$\rho_i^2 = \xi_i^2(t) + \eta_i^2(t)$  je od času nezávislý kvadrát vzdialenosti  $i$ -teho bodu od počiatku pomocnej súradnicovej sústavy (vzájomné vzdialenosti bodov ani vzdialenosti bodov od hmotného stredu sa v tuhom telese s časom nemenia)

# výpočet uhlového zrýchlenia

- ďalej vypočítame uhlové zrýchlenie  $\varepsilon(t) = \dot{\omega}(t)$  kde  $\omega(t) = \frac{\dot{\eta}_i(t) \xi_i(t) - \eta_i(t) \dot{\xi}_i(t)}{\rho_i^2}$
- keďže menovateľ nezávisí od času, derivácia je

$$\dot{\omega}(t) = \frac{\ddot{\eta}_i(t) \xi_i(t) + \dot{\eta}_i(t) \dot{\xi}_i(t) - \dot{\eta}_i(t) \dot{\xi}_i(t) - \eta_i(t) \ddot{\xi}_i(t)}{\rho_i^2} = \frac{\ddot{\eta}_i(t) \xi_i(t) - \eta_i(t) \ddot{\xi}_i(t)}{\rho_i^2}$$

- zvláštny a nie úplne najprirodzenejší výraz v čitateli sa bude (bohužiaľ) vyskytovať často, a preto je dobré poznať niekoľko jeho iných vyjadrení, ktoré sa teraz naučíme

$$a_x b_y - a_y b_x$$

- majme dva vektory  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$  so zložkami

$$a_x = a \cos \alpha \quad a_y = a \sin \alpha$$

$$b_x = b \cos \beta \quad b_y = b \sin \beta$$

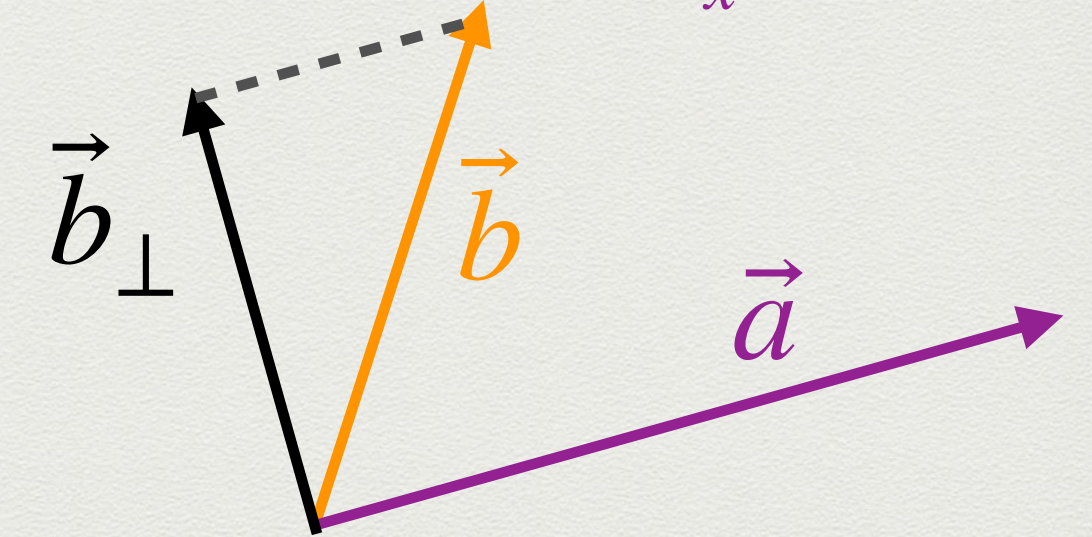
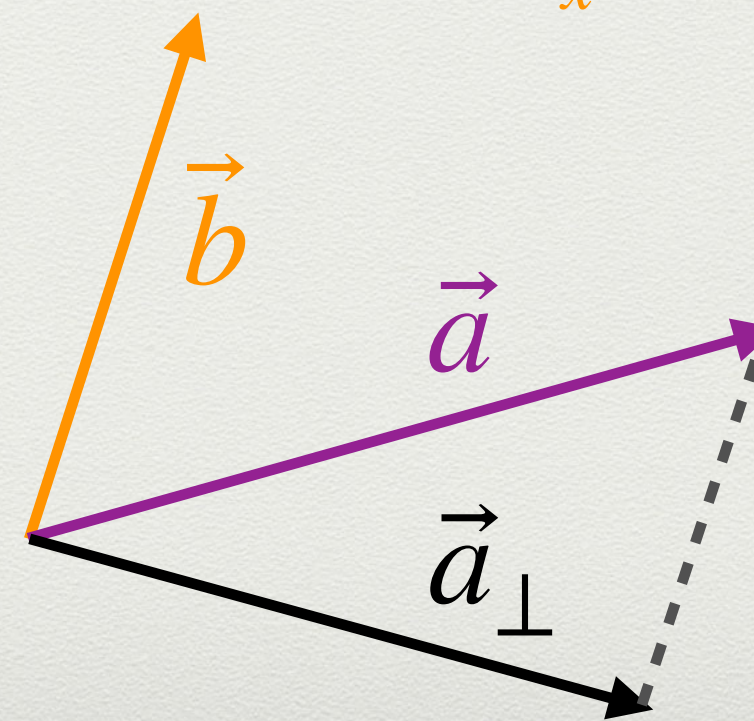
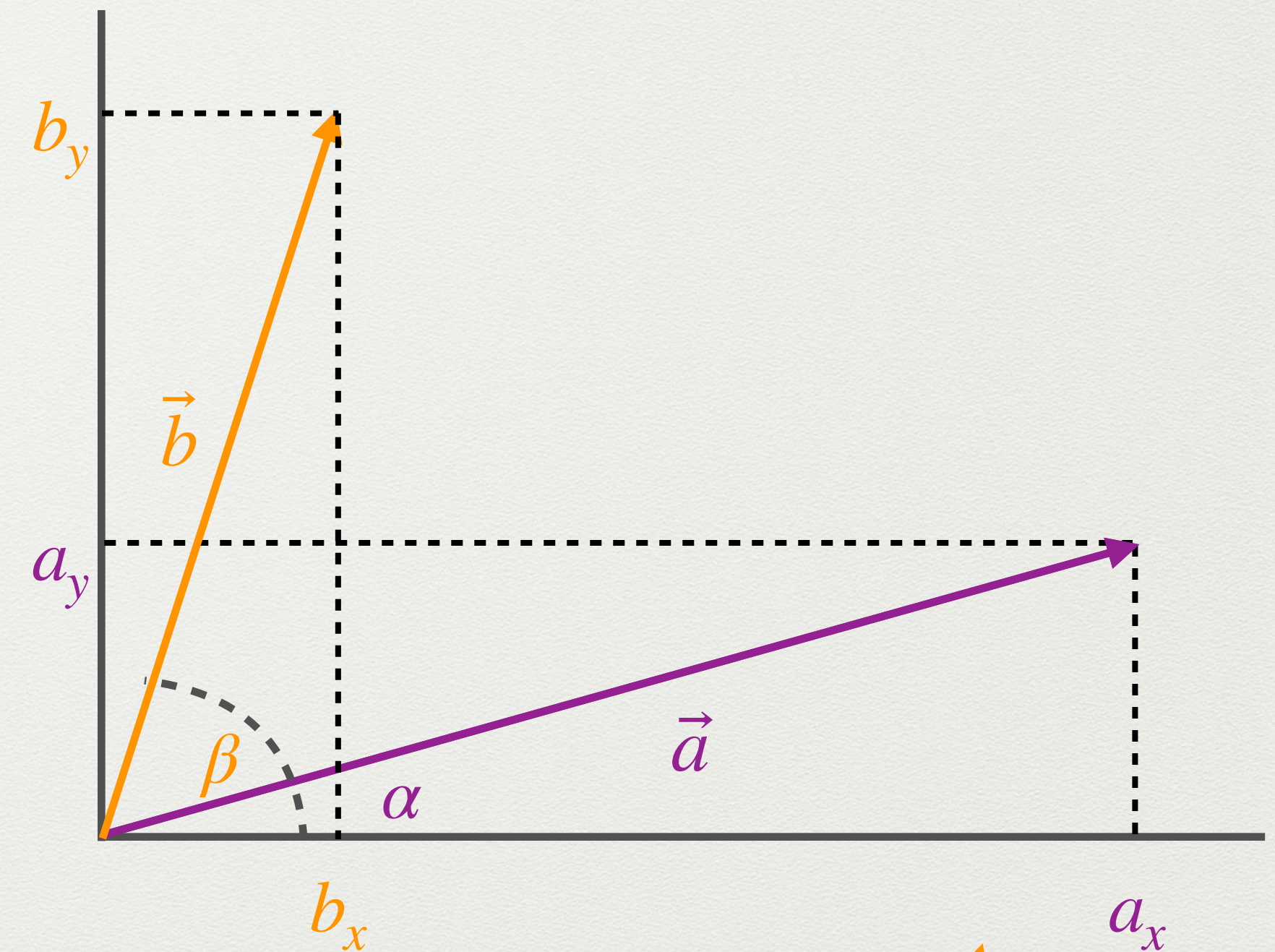
- $a_x b_y - a_y b_x = a b (\cos \alpha \sin \beta - \cos \beta \sin \alpha)$

$$= a b \sin(\beta - \alpha) = a b \sin \phi$$

kde  $\phi$  je uhol medzi vektormi  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$   
(orientovaný uhol smerujúci od  $\vec{a}$  ku  $\vec{b}$ )

- výraz  $a b \sin \phi$  sa dá zapísať aj ako súčin veľkosti jedného vektora a kolmej zložky druhého vektora (ktorej sa hovorí rameno)

$$a b \sin \phi = a_{\perp} b = a b_{\perp}$$



# súvis s vektorovým súčinom

- v troch rozmeroch je výraz  $a_x b_y - a_y b_x$  z-ovou zložkou vektora  $\vec{a} \times \vec{b}$
- v dvoch rozmeroch nemáme nič také, ako vektorový súčin
- ale ak chápeme 2D priestor ako podpriestor 3D priestoru, potom má vektorový súčin dobrý zmysel (v tom 3D) a dá sa používať
- takže dostávame ešte jeden možný zápis nášho výrazu, a síce

$$a_x b_y - a_y b_x = \left( \vec{a} \times \vec{b} \right)_z$$

# pohybová rovnica pre orientáciu tuhého telesa

- nech sa tuhé teleso skladá z  $N$  hmotných bodov (s pevnými vzájomnými vzdialenosťami)
- vynásobme rovnicu pre uhlové zrýchlenie hmotnosťou  $i$ -teho bodu:  $m_i \rho_i^2 \varepsilon = \xi_i F_{\eta,i} - \eta_i F_{\xi,i}$
- sčítajme cez všetky body (od  $i=1$  po  $N$ ):

$$\sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2 \varepsilon = \sum_{i=1}^N \xi_i F_{\eta,i} - \eta_i F_{\xi,i}$$

- toto je pohybová rovnica pre orientáciu telesa, ale väčšinou sa používa stručnejší zápis

- stručnejší zápis:

$$I \varepsilon = M$$

kde

$$I = \sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2 \quad M = \sum_{i=1}^N \xi_i F_{\eta,i} - \eta_i F_{\xi,i}$$

- $I$  sa nazýva moment zotrvačnosti  
 $M$  sa nazýva moment sily
- obidva momenty (zotrvačnosti aj sily) sú definované vzhľadom k referenčnému bodu

# moment sily – starý známy

- vektor momentu sily vzhľadom k bodu  $\vec{R}$

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{R}) \times \vec{F}_i$$

už vystupoval v zákone (ne)zachovania momentu hybnosti (pre ľubovoľnú sústavu hmotných bodov, nielen pre tuhé teleso)

- naš terajší moment sily  $M$  nie je nič iné, ako  $z$ -ová zložka vektora  $\vec{M}$  počítaného vzhľadom k počiatku našej pomocnej súradnicovej sústavy

- pozor:  $M \neq |\vec{M}|$       $M = \vec{M}_z$

## momenty sústavy viacerých častíc

- pre sústavu  $N$  hmotných bodov definujeme momenty (vzhľadom k počiatku)

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad \vec{M} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

- pre momenty vzhľadom k inému bodu  $\vec{R}$ , treba v definíciách zameniť  $\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i - \vec{R}$

- rýchlosť zmeny momentu hybnosti:  $\dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i$   
( $\dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i = \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i = 0$  a  $\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i$ )

moment sily je formálne jednoduchší v 3D  
 $M$  v 2D je vlastne jedna zložka  $\vec{M}$  v 3D

# poznámka o momentoch vnútorných síl

- v prípade momentu sily  $\vec{M}$  v 3D sme v prednáške o zákonoch zachovania ukázali, že ak vnútorné sily pôsobia po spojnicich a platí pre ne zákon akcie a reakcie, potom tieto sily neprispievajú do momentu sily
- rovnaká vec platí aj pre moment sily  $M$  v 2D, čiže pri výpočte  $M$  stačí brať do úvahy len vonkajšie sily
- dôkaz: stačí zobrať už urobený dôkaz v 3D a brať v ňom do úvahy zložku

## (zdanlivý) problém vnútorných síl

- na momente sily je blbé to, že doň vstupujú aj vnútorné sily, ktoré väčšinou nepoznáme
- ak označíme symbolom  $\vec{F}_{ij}^{\text{vnut}}$  vnútornú silu, ktorou pôsobí  $j$ -ty bod na  $i$ -ty bod, potom
$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{vonk}} + \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij}^{\text{vnut}}$$
- moment sily môžeme teda zapísať ako
$$\vec{M} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{vonk}} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{\text{vnut}}$$
- ukážeme teraz, že tá dvojitá suma je nulová
- zákon akcie a reakcie:  $\vec{F}_{ij}^{\text{vnut}} = -\vec{F}_{ji}^{\text{vnut}}$
- finta:  $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} = \sum_{i<j}^N (a_{ij} + a_{ji})$  ak  $a_{ii} = 0$
- hmotné body nepôsobia samé na seba:  $\vec{F}_{ii} = 0$
- čiže  $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{\text{vnut}} = \sum_{i<j}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}^{\text{vnut}}$
- ak vnútorné sily pôsobia po spojnicich bodov tak  $\vec{F}_{ij}^{\text{vnut}} \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j \Rightarrow (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}^{\text{vnut}} = 0$   
hotovo: vnútorné sily neprispievajú do  $\vec{M}$

súčet cez všetky body sa robí práve preto, aby sa príspevky (neznámych) vnútorných síl vyrušili

# moment zotrvačnosti – nová vec

- moment zotrvačnosti

$$I = \sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2$$

sme zatiaľ nikde nestretli

- prečo sme ho (na rozdiel od momentu sily a momentu hybnosti) zatiaľ nestretli?
- pretože moment sily a moment hybnosti mali dobrý a užitočný fyzikálny význam pre ľubovoľnú sústavu hmotných bodov, zatiaľ čo moment zotrvačnosti sa objavil až pri skúmaní mechaniky tuhého telesa

- v pohybovej rovnici pre 2D rotácie hrá moment zotrvačnosti  $I$  analogickú úlohu, akú hrá hmotnosť  $m$  v pohybovej rovnici pre translačný pohyb

$$I \varepsilon = M \qquad m a = F$$

- netriviálny a pritom dôležitý fakt: moment zotrvačnosti vzhľadom k bodom telesa a tiež vzhľadom k hmotnému stredu telesa nezávisí od času (zdôvodnenie: vzdialenosti  $\rho_i$  sa nemenia v čase – toto síce neplatí vzhľadom k ľubovoľnému bodu, ale vzhľadom k bodom telesa a vzhľadom k hmotnému stredu to platí)

# podobnosti a rozdiely

## **jednorozmerný posuvný pohyb hmotného bodu**

- pohybová rovnica:  $m \ddot{x}(t) = F(x, \dot{x}, t)$
- hmotnosť  $m$  býva zadané (zmerané) číslo
- sila  $F$  je nejaká dopredu zadaná funkcia polohy, rýchlosti a času a s touto zadanou funkciou riešime diferenciálnu rovnicu pre neznámu funkciu  $x(t)$

## **dvojrozmerný rotačný pohyb tuhého telesa**

- pohybová rovnica:  $I \ddot{\varphi}(t) = M(\varphi, \dot{\varphi}, t)$
- moment zotrvačnosti  $I$  treba vypočítať
- moment sily  $M$  ako konkrétnu funkciu uhla, uhlovej rýchlosti a času treba vypočítať a až potom môžeme riešiť diferenciálnu rovnicu pre neznámu funkciu  $\varphi(t)$

ak sú posuvný a rotačný pohyb navzájom previazané, potom

$$m \ddot{x}(t) = F(x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi}, t) \quad \text{a} \quad I \ddot{\varphi}(t) = M(\varphi, \dot{\varphi}, x, \dot{x}, t)$$

# ešte dve podobnosti

- kinetická energia rotujúceho telesa je súčtom kinetických energií jeho častí

$$E_k = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

- rýchlosti jednotlivých častí sú  $v_i = \rho_i \omega$   
celkove pre kinetickú energiu máme

$$E_k = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \rho_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

- $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$  pre dvojrozmerné rotácie  
 $E_k = \frac{1}{2} m v^2$  pre jednorozmerné translácie

- moment hybnosti je v 2D definovaný analogicky ako moment sily

$$L = \sum_{i=1}^N \xi_i p_{\eta,i} - \eta_i p_{\xi,i}$$

- $\xi p_{\eta} - \eta p_{\xi} = \rho p_{\perp} = m \rho^2 \omega$  (pri pohybe po kružniciach  $p_{\perp} = p$  a  $p = m \rho \omega$ )

$$L = \sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2 \omega = I \omega$$

- $L = I \omega$  pre dvojrozmerné rotácie  
 $p = m v$  pre jednorozmerné translácie

# poznámka o práci vnútorných síl

- zákon zachovania mechanickej energie sme odvodili z Newtonových zákonov pre jeden hmotný bod
- môžeme takto odvodený zákon používať aj pre tuhé teleso?
- nie, nemôžeme – budeme môcť, až keď ukážeme, že platí aj pre tuhé teleso
- jediná podstatná vec, ktorú pritom treba urobiť navyše oproti prípadu hmotného bodu, je uváženie práce vnútorných síl
- práca síl pôsobiacich medzi bodmi  $i$  a  $j$   
$$\vec{F}_{ij}^{\text{vnut}} \cdot d\vec{r}_j + \vec{F}_{ji}^{\text{vnut}} \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_{ij}^{\text{vnut}} \cdot d(\vec{r}_j - \vec{r}_i)$$
kde sme využili zákon akcie a reakcie
- pôsobenie po spojnicich:  $\vec{F}_{ij}^{\text{vnut}} = c(\vec{r}_j - \vec{r}_i)$   
práca vnútorných síl:  $c(\vec{r}_j - \vec{r}_i) \cdot d(\vec{r}_j - \vec{r}_i)$
- zachovanie vzdialeností:  $(\vec{r}_j - \vec{r}_i)^2 = \text{const}$   
diferenciál:  $2(\vec{r}_j - \vec{r}_i) \cdot d(\vec{r}_j - \vec{r}_i) = 0$
- práca vnútorných síl je teda nulová a preto nepokazí štandardné odvodenie zákona zachovania energie

## a teraz niekoľko rozdielov

- pre upevnený hmotný bod nie je čo riešiť jeho (ne)pohyb je od začiatku daný
- jediná otázka, ktorá sa dá položiť, sa týka síl pôsobiacich na tento bod, odpoveď sa získa triviálne z nulovosti výslednej sily
- mechanika hmotného bodu je netriviálna len pre neupevnený bod
- vtedy treba nájsť všetky sily pôsobiace na daný hmotný bod a vyriešiť pohybovú rovnicu s celkovou silou a so zadanými počiatočnými podmienkami
- pre 2D tuhé teleso s dvomi upevnenými bodmi je jeho (ne)pohyb tiež daný
- otázka, kde pôsobia jednotlivé sily a aké sú veľké je však netriviálna – pre tuhé telesá skrýva aj nepohyb veľa fyziky
- tuhé teleso s jedným upevneným bodom sa môže pohybovať okolo tohto bodu, musíme riešiť pohybové rovnice rotácií
- pre voľné teleso treba nájsť všetky sily a ich momenty a potom riešiť pohybové rovnice pre posuvný aj rotačný pohyb

# program na záver (zoznam nasledujúcich prednášok)

- výpočet momentu zotrvačnosti pre telesá so spojite rozloženou hmotnosťou
- nepohyb telesa s dvomi pevnými bodmi (ikonický príklad: naozajstná páka)
- pohyb telesa s jedným upevneným bodom (ikonický príklad: fyzikálne kyvadlo)
- pohyb telesa bez upevneného bodu (ikonický príklad: koleso na ceste)
- pohyb sústavy viacerých telies (ikonický príklad: kladka)
- až potom prejdeme k mechanike tuhého telesa v troch rozmeroch (a uvidíme, že je oveľa ťažšia ako mechanika tuhého telesa v dvoch rozmeroch)