SPOJITÉ TUHÉ TELESÁ

od súm k integrálom

mechanika 29

momenty vzhľadom k ľubovoľnému bodu

- momenty máme zatiaľ definované len vzhľadom k počiatku súradnicovej sústavy (v minulej prednáške sme používali definíciu v súradnicovej sústave s osami ξ a η teraz sa vrátime k bežnejšiemu označeniu osí písmenami x a y)
- definície vzhľadom k bodu $\vec{R}$ so súradnicami (X, Y) dostaneme tak, že polohové vektory nahradíme "polohovými vektormi vzhľadom k bodu $\vec{R}$ " $\vec{r}_i \to \vec{r}_i - \vec{R}$

moment zotrvačnosti vzhľadom k bodu $\vec{R}$

$$I_{\vec{R}} = \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_i - \vec{R})^2$$

moment sily vzhľadom k bodu $\vec{R}$

$$M_{\vec{R}} = \sum_{i=1}^{N} (x_i - X)\, F_{y,i} - (y_i - Y)\, F_{x,i}$$

Steinerova veta (vcelku užitočné tvrdenie)

- moment zotrvačnosti vzhľadom k bodu $\vec{R}$ sa dá jednoducho vyjadriť cez moment zorvačnosti vzhľadom k hmotnému stredu

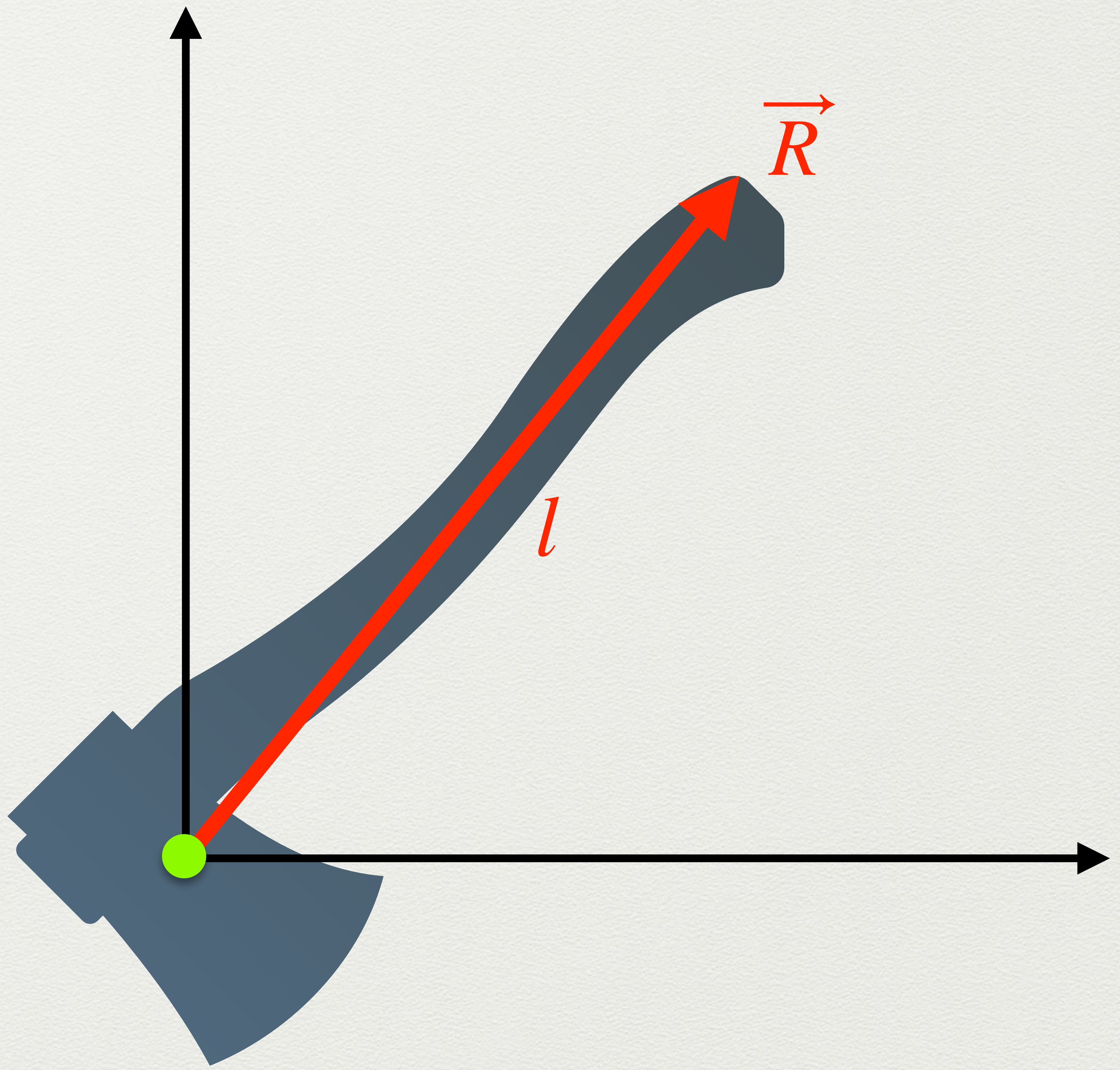
$$I_{\vec{R}} = I_{\text{h.s.}} + ml^2$$

kde m je hmotnosť telesa a l je vzdialenosť bodu $\vec{R}$ od hmotného stredu telesa

dôkaz: $I_{\vec{R}} = \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_i - \vec{R})^2$ napíšeme ako

$$I_{\vec{R}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i^{\,2} - 2\vec{R} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i + \vec{R}^2 \sum_{i=1}^{N} m_i$$

a toto použijeme v sústave, ktorej počiatok je v hmotnom strede: $I_{\vec{R}} = I_{\text{h.s.}} - 2\vec{R} \cdot \vec{0} + l^2 m$



$$I_{\vec{R}} = I_{\text{h.s.}} + m\, l^2$$

od diskrétnych hmotných bodov k spojitému telesu

- dvojrozmerné tuhé teleso sme si zatiaľ predstavovali ako sústavu nejakých N pevne pospájaných hmotných bodov (nie ako spojité rozloženie hmoty)
- momenty (zotrvačnosti a sily) boli definované ako súčty cez tieto body
- prirodzenejšou predstavou tuhého telesa je skôr spojité rozloženie hmoty charakterizované nejakou hustotou, ktorá vo všeobecnosti závisí od polohy
- označenie: dĺžkovú hustotu 1D telesa budeme označovať symbolom $\lambda(x)$, plošnú hustotu 2D telesa symbolom $\sigma(x, y)$ a objemovú hustotu $\rho(x, y, z)$
- pri prechode od diskrétneho rozloženia hmoty k spojitému prejdú súčty na integrály (to platí všeobecne, nielen pre definície momentov)

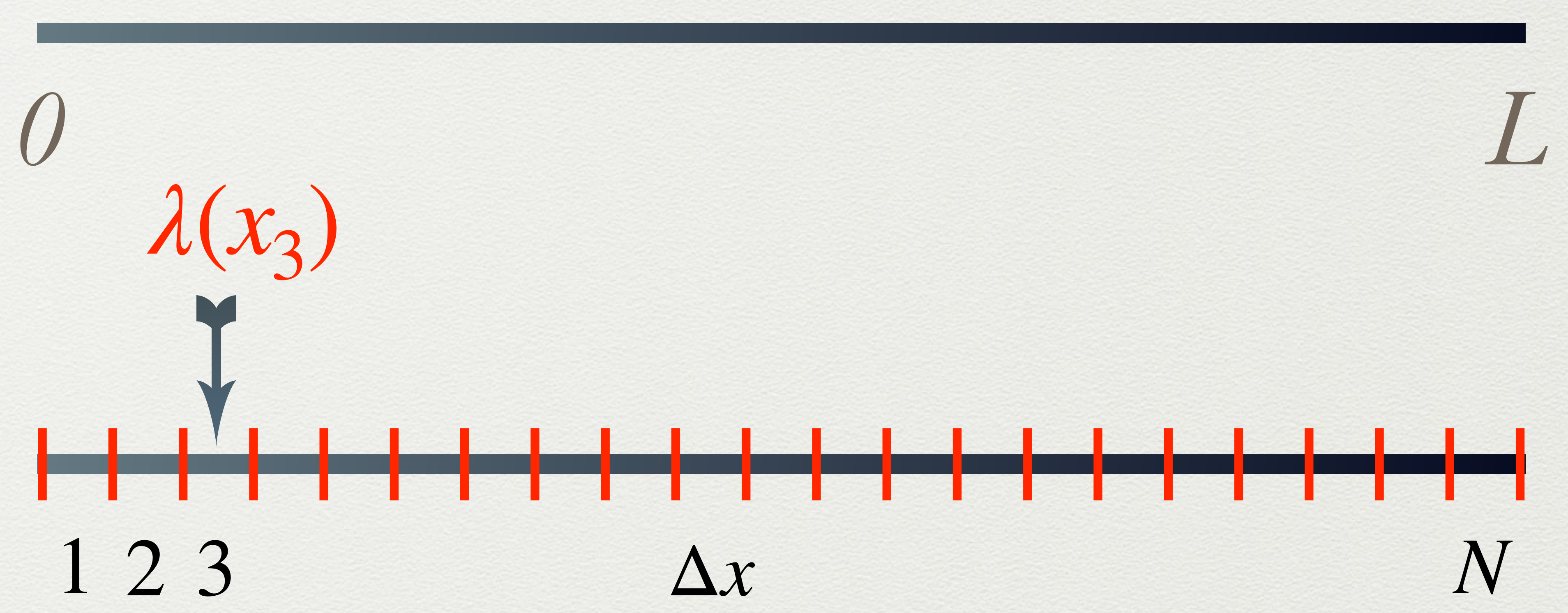
hmotnosť nehomogénneho telesa – 1D

- uvažujme nejaké jednorozmerné teleso (tyč) s premenlivou dĺžkovou hustotou $\lambda(x)$

- ak teleso rozdelíme na malé kúsky dĺžky Δx hmotnosť jednotlivých kúskov bude približne $\lambda(x)\,.\,\Delta x$ a hmotnosť celej tyče bude približne

$$m \approx \sum_{i=1}^{N} \lambda(x_i)\,.\,\Delta x$$

- presný výsledok dostaneme v limite $\Delta x \to 0$ a týmto výsledkom je určitý integrál



$$m = \int_0^L \lambda(x)\, dx$$

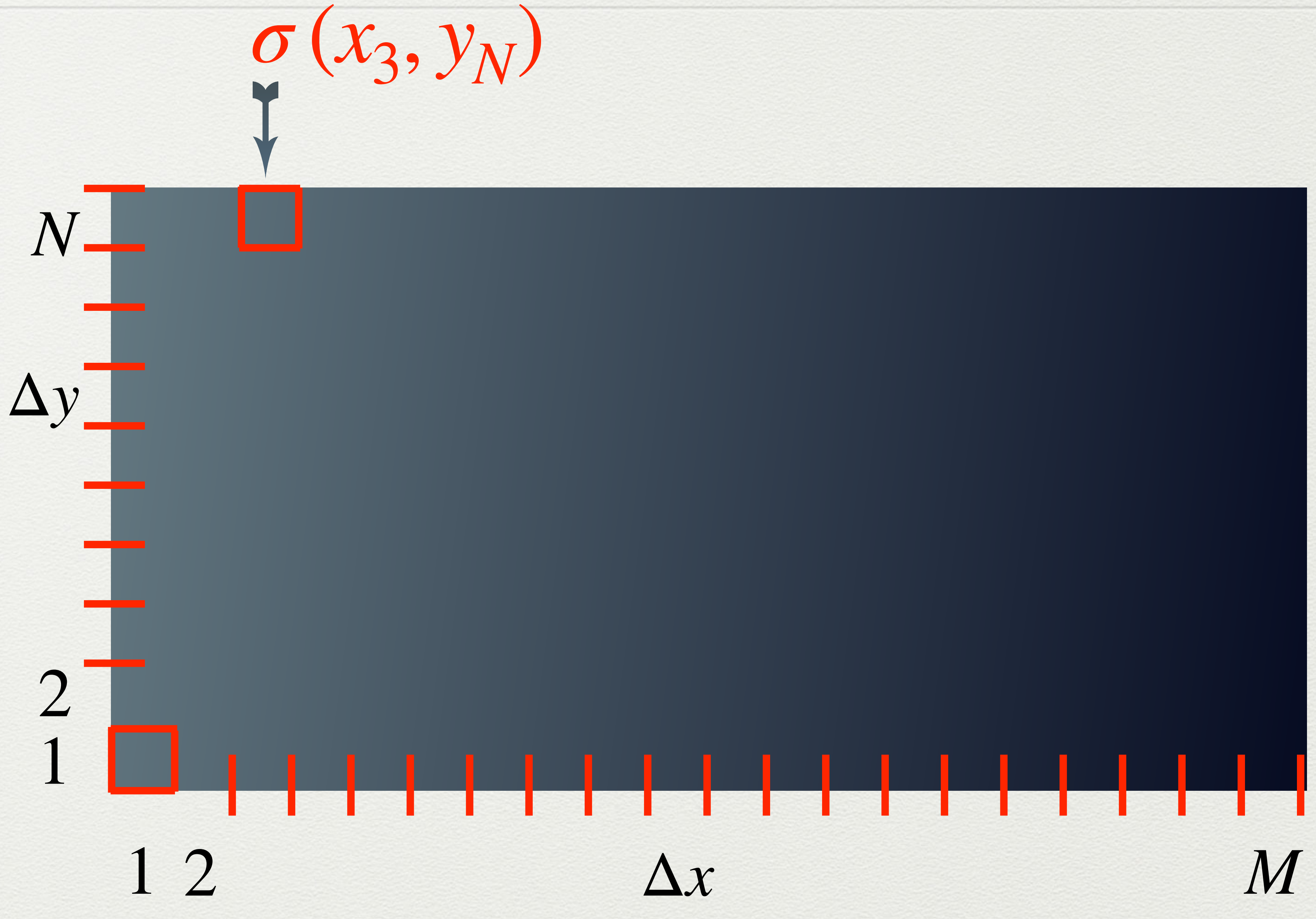
hmotnosť nehomogénneho telesa – 2D

- uvažujme nejaké dvojrozmerné teleso (dosku) s premenlivou plošnou hustotou $\sigma(x, y)$

- ak ho rozdelíme na malé kúsky (napr. obdĺžničky) s plochou $\Delta x \,.\, \Delta y$, hmotnosť jednotlivých kúskov bude približne $\sigma(x, y) \,.\, \Delta x \,.\, \Delta y$ a hmotnosť celej dosky bude približne

$$m \approx \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \sigma(x_i, y_j) \,.\, \Delta x \,.\, \Delta y$$

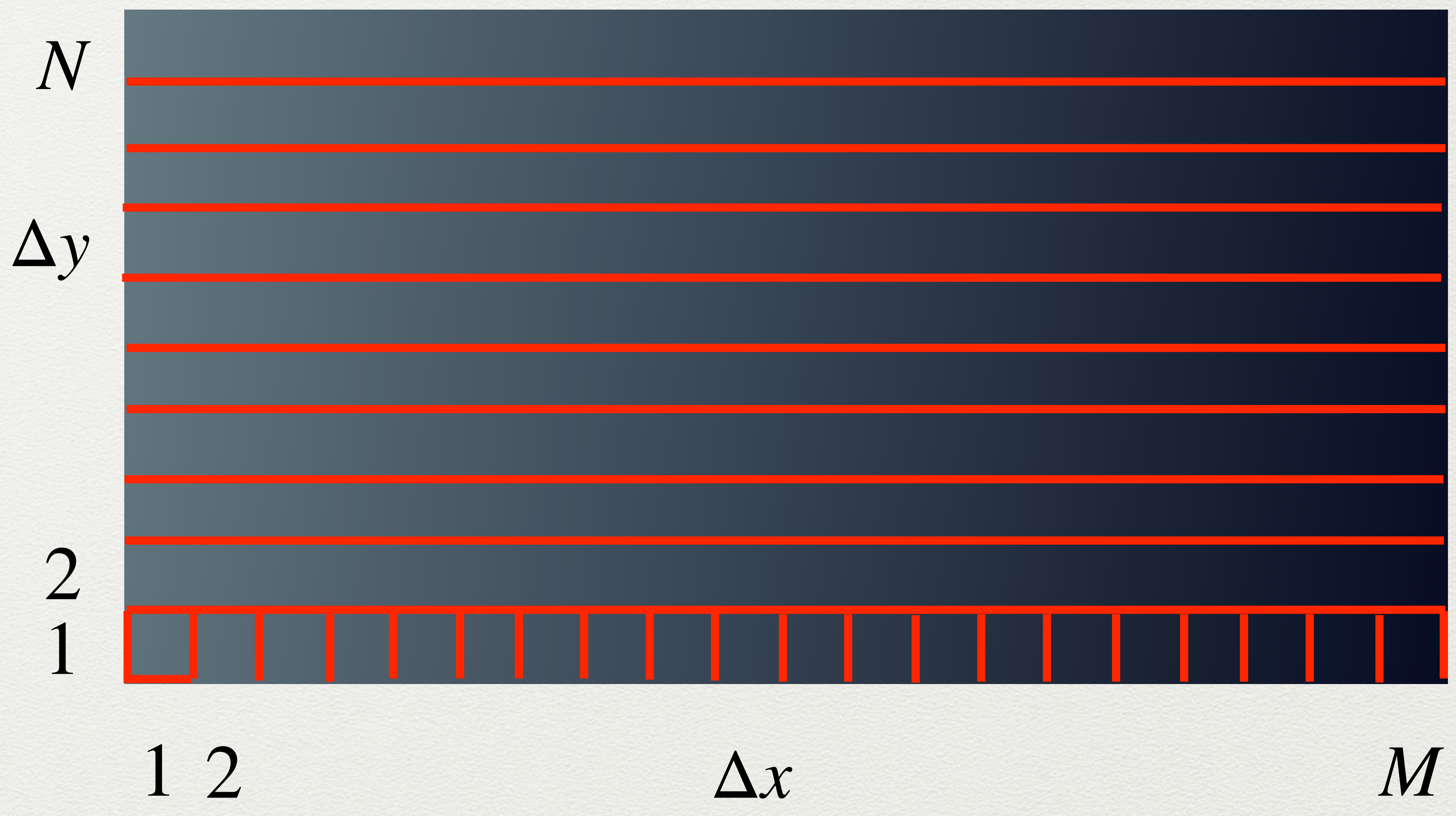
- presný výsledok dostaneme v limite $\Delta x, \Delta y \to 0$ a týmto výsledkom je dvojný určitý integrál



$$m = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \sigma(x, y)\, dx\, dy$$

ako sa počíta dvojný integrál

- ako dva obyčajné, jeden za druhým
- dosku si predstavíme ako niečo zložené z tyčí (na obrázku z horizontálnych, ale pokojne by mohli aj vertikálne, prípadne ešte nejaké iné)
- "hmotnosť" "tyče" nachádzajúcej sa vo výške y je
$$\mu(y) = \int_0^{L_x} \sigma(x, y)\, dx$$
- hmotnosť dosky je súčet (integrál) "hmotností" "tyčí"
$$m = \int_0^{L_y} \mu(y)\, dy$$



$$m = \int_0^{L_y} \left(\int_0^{L_x} \sigma(x, y)\, dx \right) dy$$

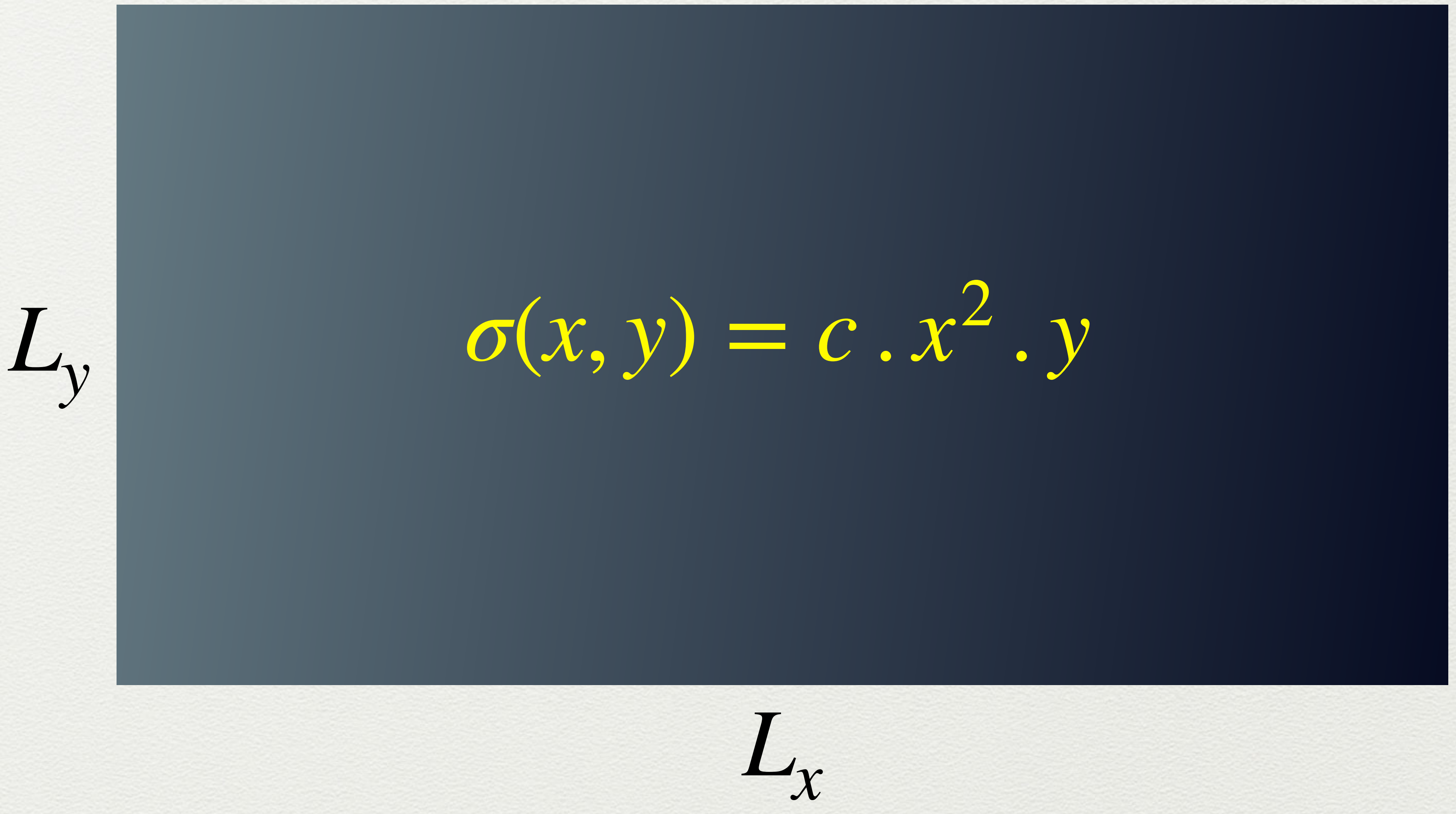
konkrétny príklad

- ako príklad si zoberme hustotu $\sigma(x, y) = c \,.\, x^2 \,.\, y$

$$m = \int_0^{L_y} \left(\int_0^{L_x} c \,.\, x^2 \,.\, y \; dx \right) dy$$

$$= \int_0^{L_y} \left[c \,.\, \frac{1}{3} x^3 \,.\, y \right]_0^{L_x} dy \;=\; \int_0^{L_y} \left[c \,.\, \frac{1}{3} L_x^3 \,.\, y \right] dy$$

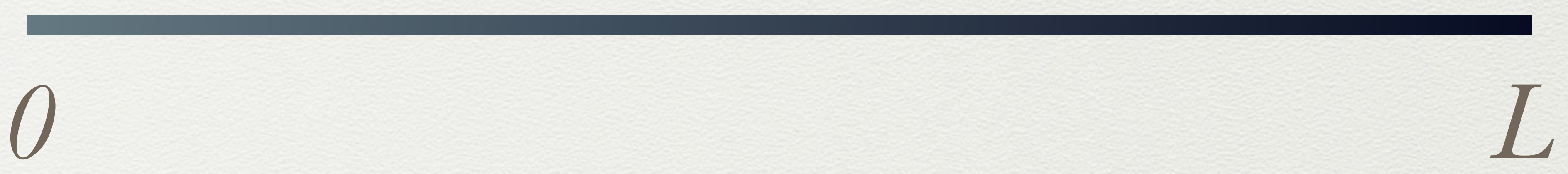
$$= \left[c \,.\, \frac{1}{3} L_x^3 \,.\, \frac{1}{2} y^2 \right]_0^{L_y}$$



$$m = \frac{1}{6} c \,.\, L_x^3 \,.\, L_y^2$$

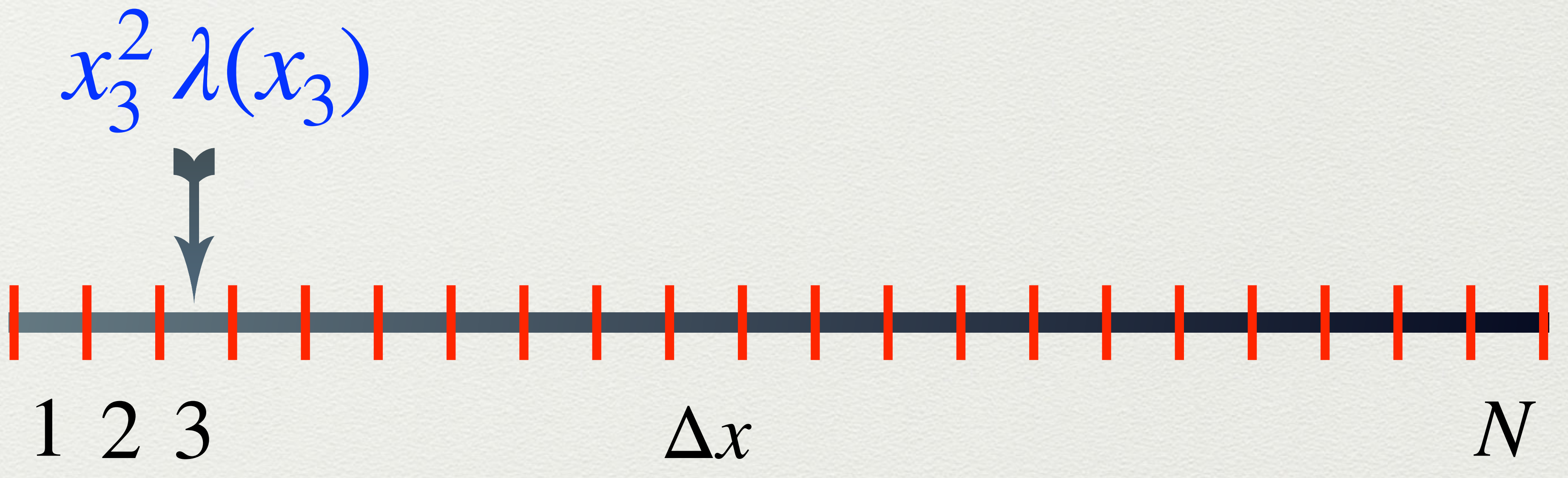
moment zotrvačnosti nehomogénneho telesa – 1D

- uvažujme jednorozmerné teleso (tyč) s nejakou dĺžkovou hustotou $\lambda(x)$, rotujúce v 2D priestore



- ak teleso rozdelíme na malé kúsky dĺžky Δx ich príspevok do momentu zotrvačnosti bude $\lambda(x)\,.\,\Delta x\,.\,x^2$ a moment zotrvačnosti celého telesa (vzhľadom k počiatku) bude

$$I \approx \sum_{i=1}^{N} x_i^2\,.\,\lambda(x_i)\,.\,\Delta x$$



- presný výsledok dostaneme v limite $\Delta x \to 0$ a týmto výsledkom je určitý integrál

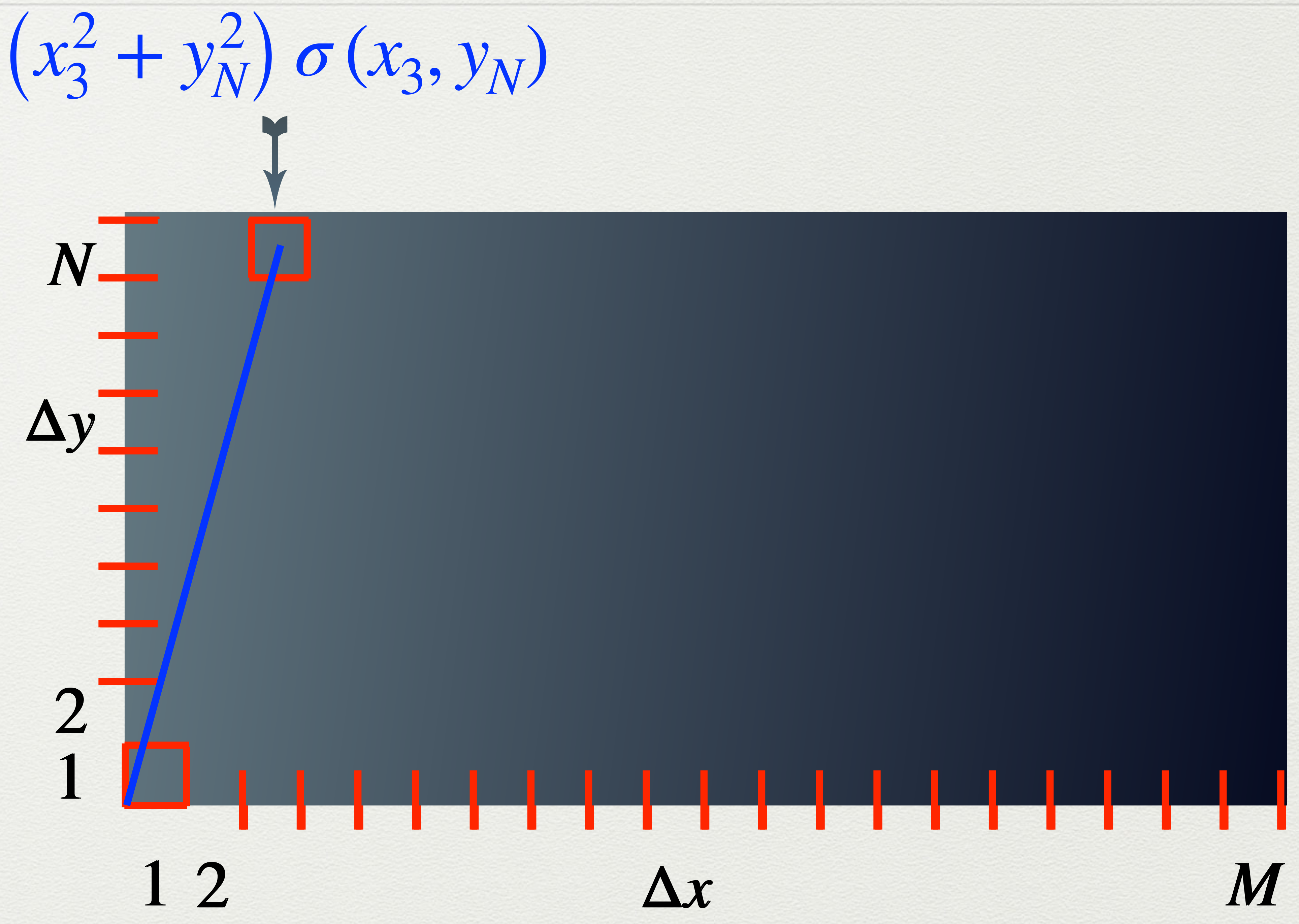
$$I = \int_0^L x^2\,\lambda(x)\,dx$$

moment zotrvačnosti nehomogénneho telesa – 2D

- moment zotrvačnosti dvojrozmerného telesa s plošnou hustotou $\sigma(x, y)$ vzhľadom k počiatku

- rozdelíme ho na malé kúsky (napr. obdĺžničky) s plochou $\Delta x \,.\, \Delta y$, ich príspevok k momentu zotrvačnosti bude $\sigma(x, y) \,.\, \Delta x \,.\, \Delta y \,.\, (x^2 + y^2)$
a moment zotrvačnosti celej dosky bude približne

$$I \approx \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \left(x_i^2 + y_j^2\right) . \,\sigma(x_i, y_j) \,.\, \Delta x \,.\, \Delta y$$



- presný výsledok dostaneme v limite $\Delta x, \Delta y \to 0$
a týmto výsledkom je dvojný určitý integrál

$$I = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left(x^2 + y^2\right) \, \sigma(x, y) \, dx \, dy$$

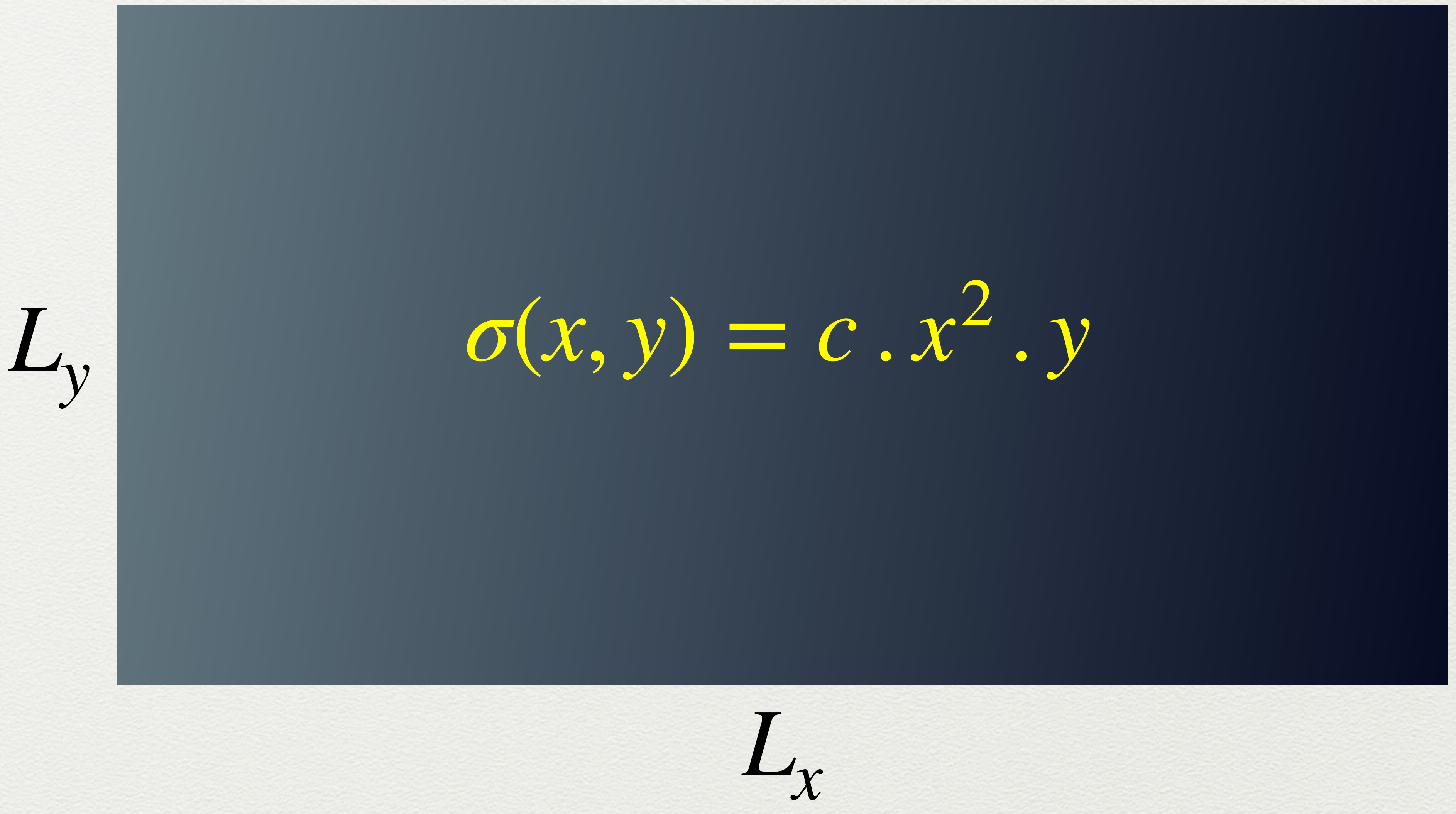
konkrétny príklad

- majme opäť hustotu $\sigma(x,y) = c\,.\,x^2\,.\,y$ a počítajme moment zotrvačnosti vzhľadom k počiatku (0,0)

$$I = \int_0^{L_y} \left(\int_0^{L_x} (x^2 + y^2)\, c\,.\,x^2\,.\,y\; dx \right) dy$$

$$= \int_0^{L_y} \left[c\,.\,\tfrac{1}{5}\,x^5\,.\,y + c\,.\,\tfrac{1}{3}\,x^3\,.\,y^3 \right]_0^{L_x} dy$$

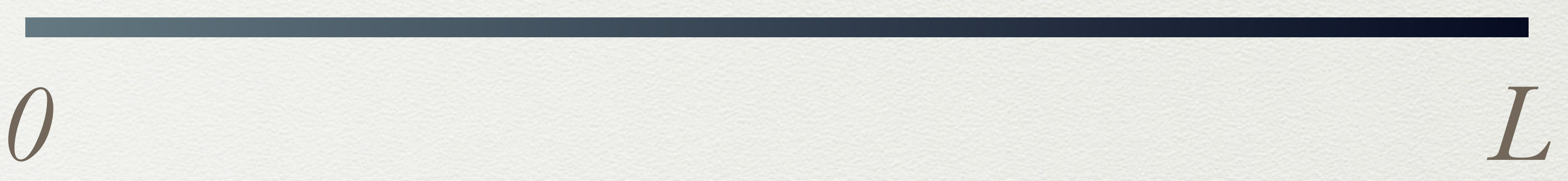
$$= \int_0^{L_y} \tfrac{c}{5}\,L_x^5 y + \tfrac{c}{3}\,L_x^3 y^3\, dy = \left[\tfrac{c}{10}\,L_x^5 y^2 + \tfrac{c}{12}\,L_x^3 y^4 \right]_0^{L_y}$$



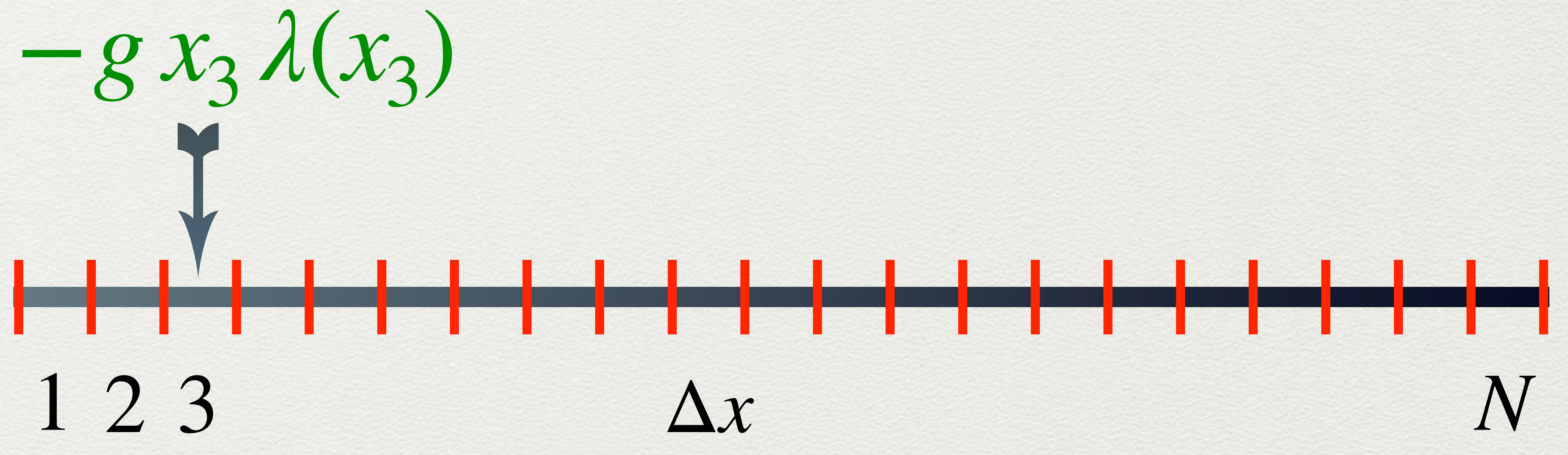
$$I = \frac{c}{10}\,L_x^5 L_y^2 + \frac{c}{12}\,L_x^3 L_y^4$$

moment gravitačnej sily pôsobiacej na tyč

- uvažujme jednorozmerné teleso (tyč) s dĺžkovou hustotou $\lambda(x)$ v homogénnom gravitačnom poli



- aký je moment grav. sily vzhľadom k počiatku?



- zložky gravitačnej sily pôsobiacej na malý kúsok sú $F_x = 0$ a $F_y \approx -\, g\, \lambda(x)\, \Delta x$, moment gravitačnej sily pôsobiaci na tento kúsok je $M \approx -\, x\, g\, \lambda(x)\, \Delta x$ takže celkový moment sily vzhľadom k počiatku bude

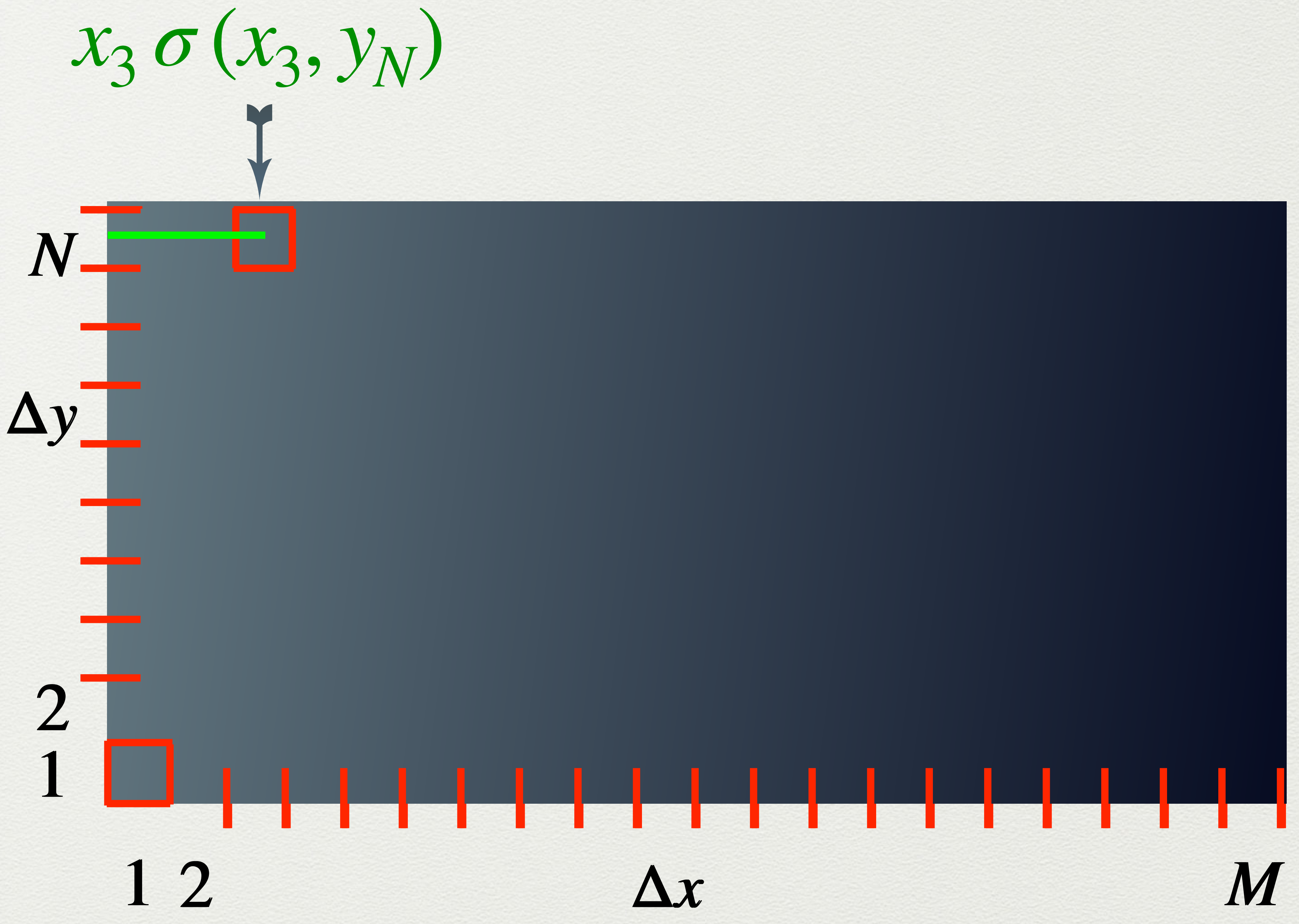
$$M \approx -\sum_{i=1}^{N} x_i\, g\, \lambda(x_i)\, .\, \Delta x$$

- presný výsledok dostaneme v limite $\Delta x \to 0$

$$M = -\int_0^L x\, g\, \lambda(x)\, dx$$

moment gravitačnej sily pôsobiacej na dosku

- už je to nuda a otrava, ale dajme ešte aj tú dosku
- úloha: ak to ešte potrebujete, urobte gymnastiku, ktorá by už mala byť rutinná, a napíšte približný výraz (sumu cez malé obdĺžničky) pre moment gravitačnej sily vzhľadom k počiatku
- ak už tú gymnastiku nepotrebujete, rovno napíšte výsledok v tvare integrálu
- a nakoniec ešte vypočítajte moment gravitačnej sily pre našu konkrétnu plošnú hustotu $\sigma(x, y) = c\,x^2\,y$



$$M = -\,g \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} x\,\sigma(x, y)\,dx\,dy$$

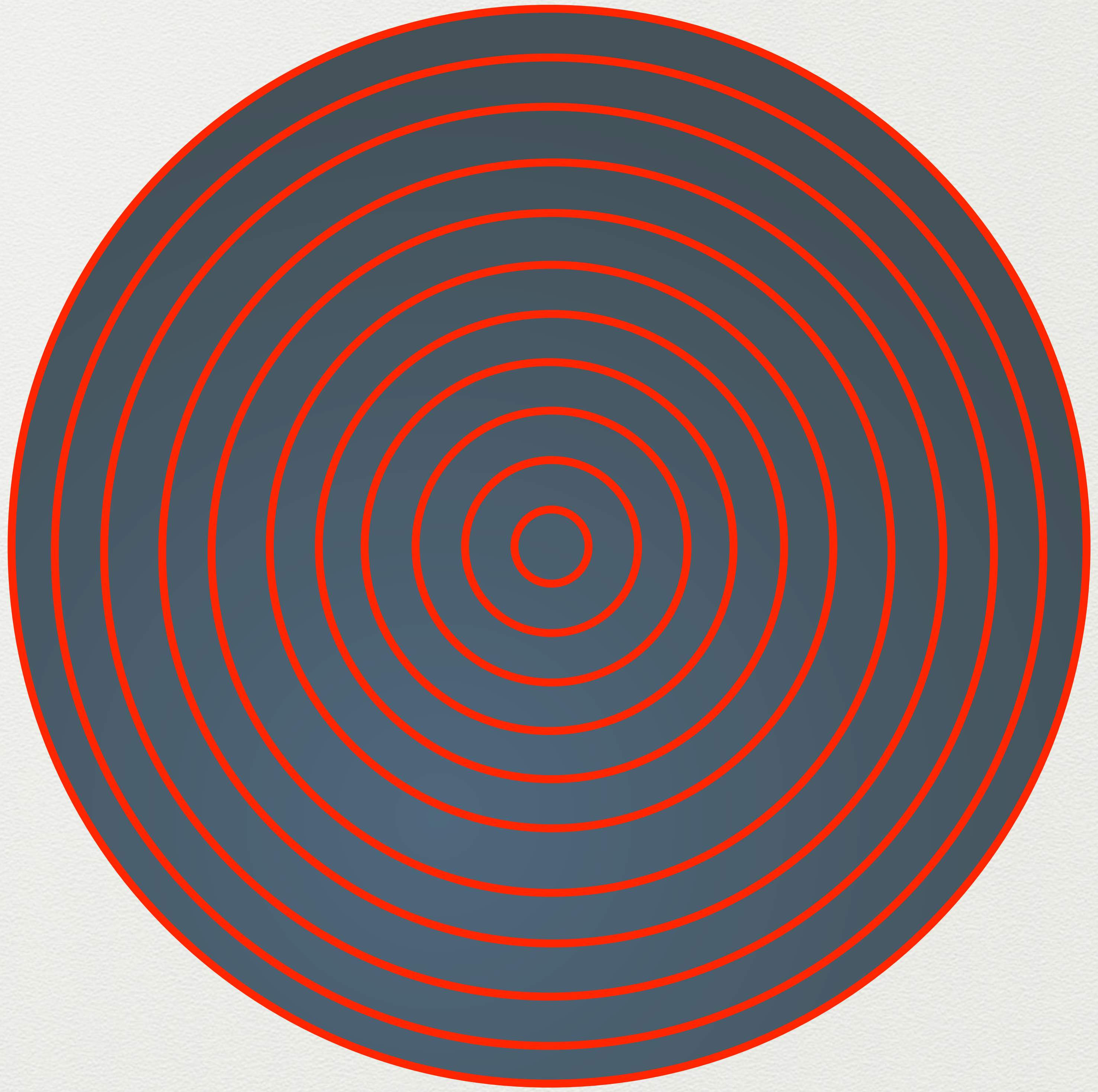
a teraz niečo nehranaté

- uvažujme rotačne symetrické koleso s polomerom R, ktorého plošná hustota σ závisí len od vzdialenosti r od stredu, čiže je funkciou jednej premennej: $\sigma(r)$

- hustotu môžeme zapísať ako $\sigma\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ a potom integrovať v kartézskych súradniciach, ale musíme správne zapísať hranice integrovania

- jednoduchší postup je rozdeliť si kruh na pásiky (medzikružia) dĺžky $2\pi r$ (s menacim sa r) a hrúbky Δr každý pásik má hmotnosť približne $\sigma(r)\, 2\pi r\, \Delta r$

- hmotnosti sčítame od $r = 0$ po $r = R$ a nakoniec Δr pošleme do nuly, čím dostaneme



$$m = 2\pi \int_0^R \sigma(r)\, r\, dr$$

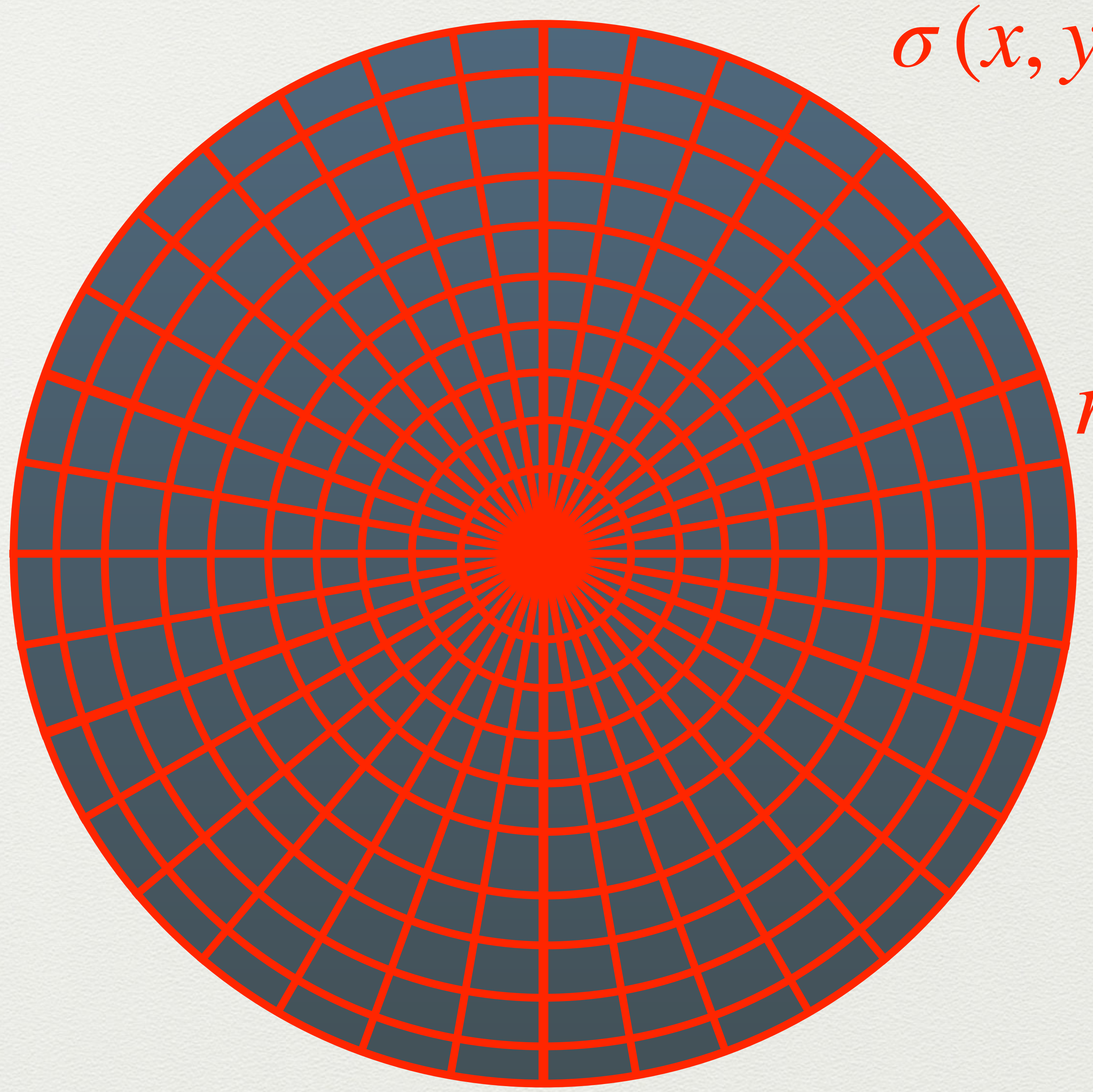
hmotnosť nesymetrického kolesa

- uvažujme teraz koleso, ktorého plošná hustota závisí od vzdialenosti r aj od uhla φ (tzv. polárne súradnice)

- tentoraz nestačí deliť kruh na pásiky, treba ho deliť jemnejšie, najrozumnejšie je to na "oblé obdĺžniky" s dĺžkami strán $r\,\Delta\varphi$ (oblá strana) a Δr (rovná strana)

- každý z "oblých obdĺžnikov" má hmotnosť približne $\sigma(r,\varphi)\,r\,\Delta r\,\Delta\varphi$, tieto hmotnosti teraz ako vždy sčítame, a to od $r = 0$ po $r = R$ a od $\varphi = 0$ po $\varphi = 2\pi$

- a nakoniec pošleme Δr aj $\Delta\varphi$ do nuly, čím dostaneme



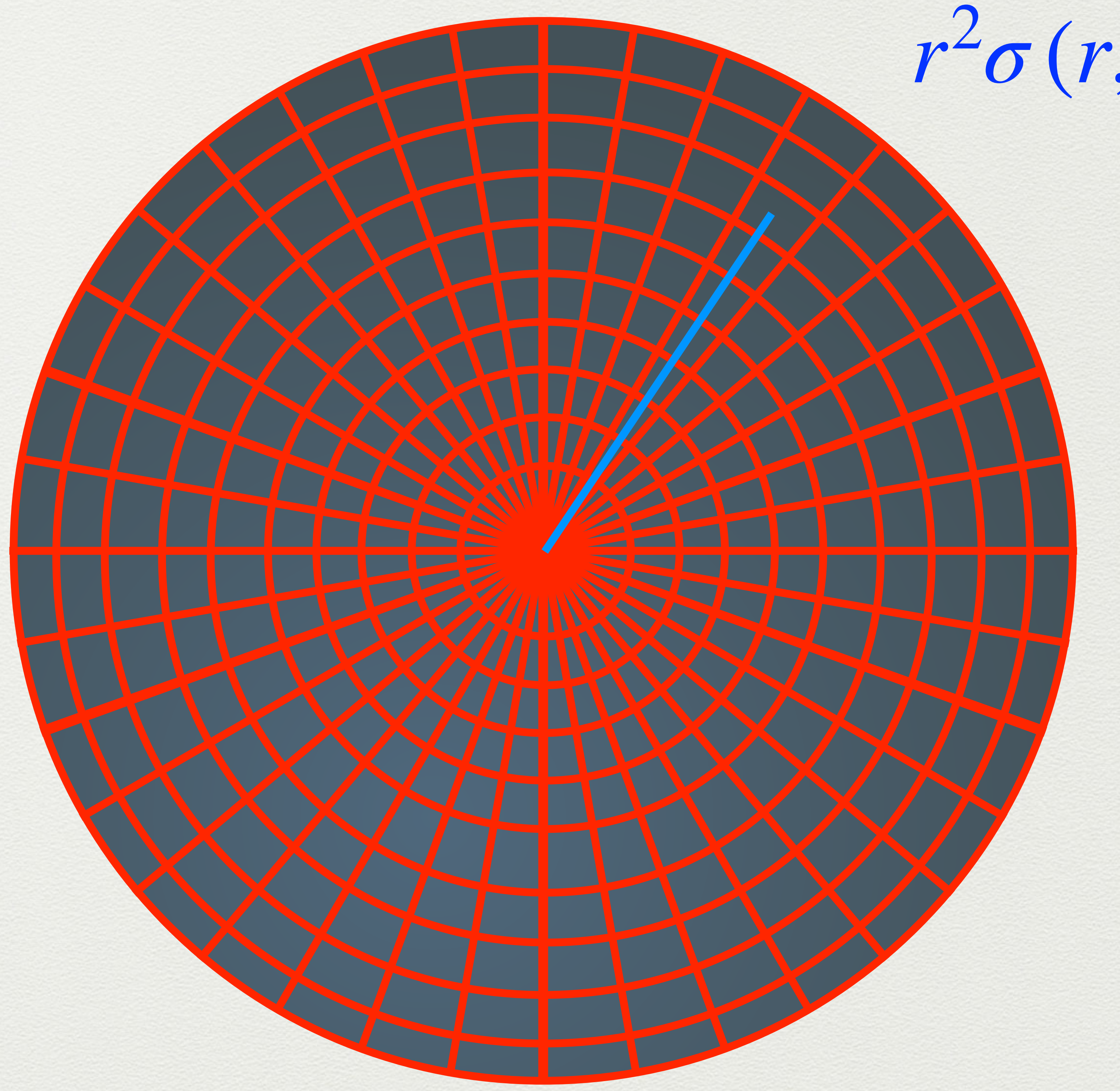
$$m = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma(r,\varphi)\, r\, dr\, d\varphi$$

moment zotrvačnosti kolesa

- ak rozumieme tomu, ako sa počítala hmotnosť kolesa s plošnou hustotou $\sigma(r,\varphi)$, malo by byť celkom jasné, akým integrálom je pre takéto koleso daný moment zotrvačnosti vzhľadom ku stredu

- každý "oblý obdĺžnik" prispieva svojou hmotnosťou $\sigma(r,\varphi)\, r\, \Delta r\, \Delta\varphi$ násobenou kvadrátom vzdialenosti od stredu kolesa r^2

- užitočná úloha: pre homogénne koleso ($\sigma = \text{const}$) vypočítajte jeho hmotnosť aj moment zotrvačnosti a ukážte, že $I = \frac{1}{2} m R^2$



$$I = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma(r,\varphi)\, r^3\, dr\, d\varphi$$

užitočné jednoduché cvičenia na záver

- dokážte Steinerovu vetu pre teleso so spojite rozloženou hmotou
- nájdite polohu hmotného stredu pre takéto teleso
- nájdite polohu hmotného stredu pre nehomogénne koleso, ktorého hustota je funkciou nielen vzdialenosti od stredu, ale aj uhla