

SPOJITÉ TUHÉ TELESÁ

od súm k integrálom

od diskrétnych hmotných bodov k spojitému telesu

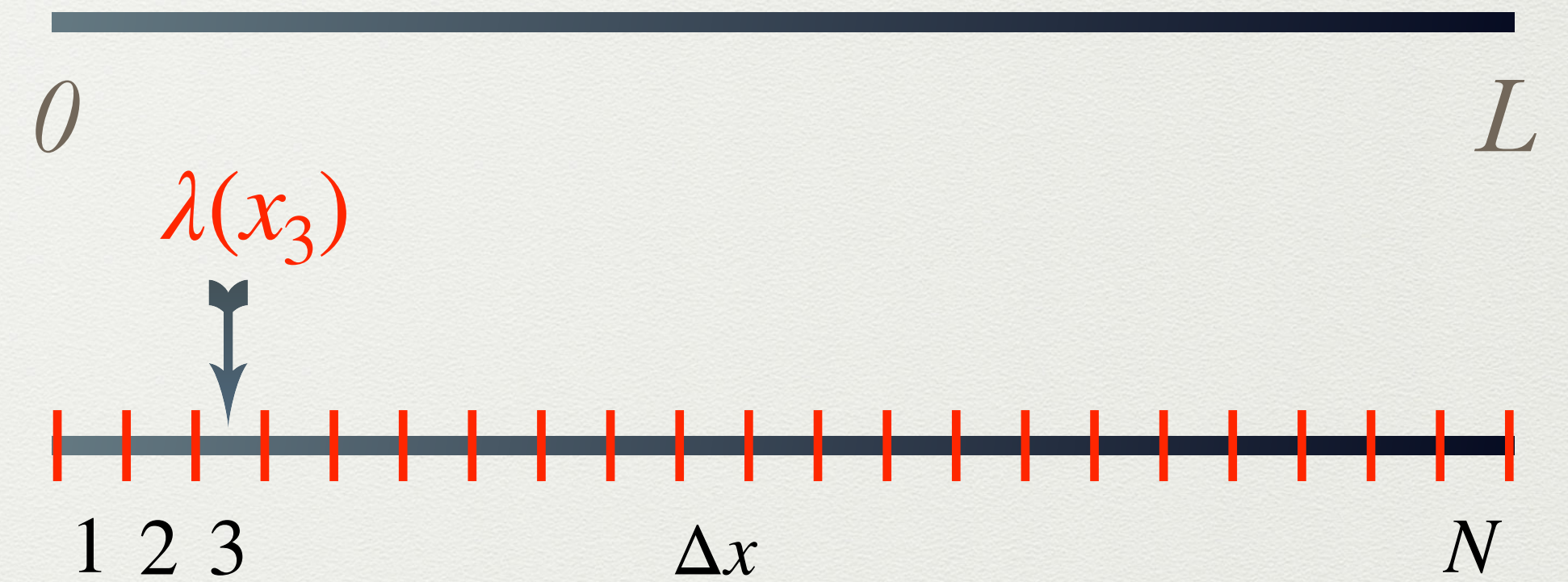
- dvojrozmerné tuhé teleso sme si zatiaľ predstavovali ako sústavu nejakých \mathcal{N} pevne pospájaných hmotných bodov (nie ako spojité rozloženie hmoty)
- momenty (zotrvačnosti a sily) boli definované ako súčty cez tieto body
- prirodzenejšou predstavou tuhého telesa je skôr spojité rozloženie hmoty charakterizované nejakou hustotou, ktorá vo všeobecnosti závisí od polohy
- označenie: dĺžkovú hustotu 1D telesa budeme označovať symbolom $\lambda(x)$, plošnú hustotu 2D telesa symbolom $\sigma(x, y)$ a objemovú hustotu $\rho(x, y, z)$
- pri prechode od diskrétného rozloženia hmoty k spojitému prejdú súčty na integrály (to platí všeobecne, nielen pre definície momentov)

hmotnosť nehomogénneho telesa – 1D

- uvažujme nejaké jednorozmerné teleso (tyč) s premenlivou dĺžkovou hustotou $\lambda(x)$
- ak teleso rozdelíme na malé kúsky dĺžky Δx hmotnosť jednotlivých kúskov bude približne $\lambda(x) \cdot \Delta x$ a hmotnosť celej tyče bude približne

$$m \approx \sum_{i=1}^N \lambda(x_i) \cdot \Delta x$$

- presný výsledok dostaneme v limite $\Delta x \rightarrow 0$ a týmto výsledkom je určitý integrál



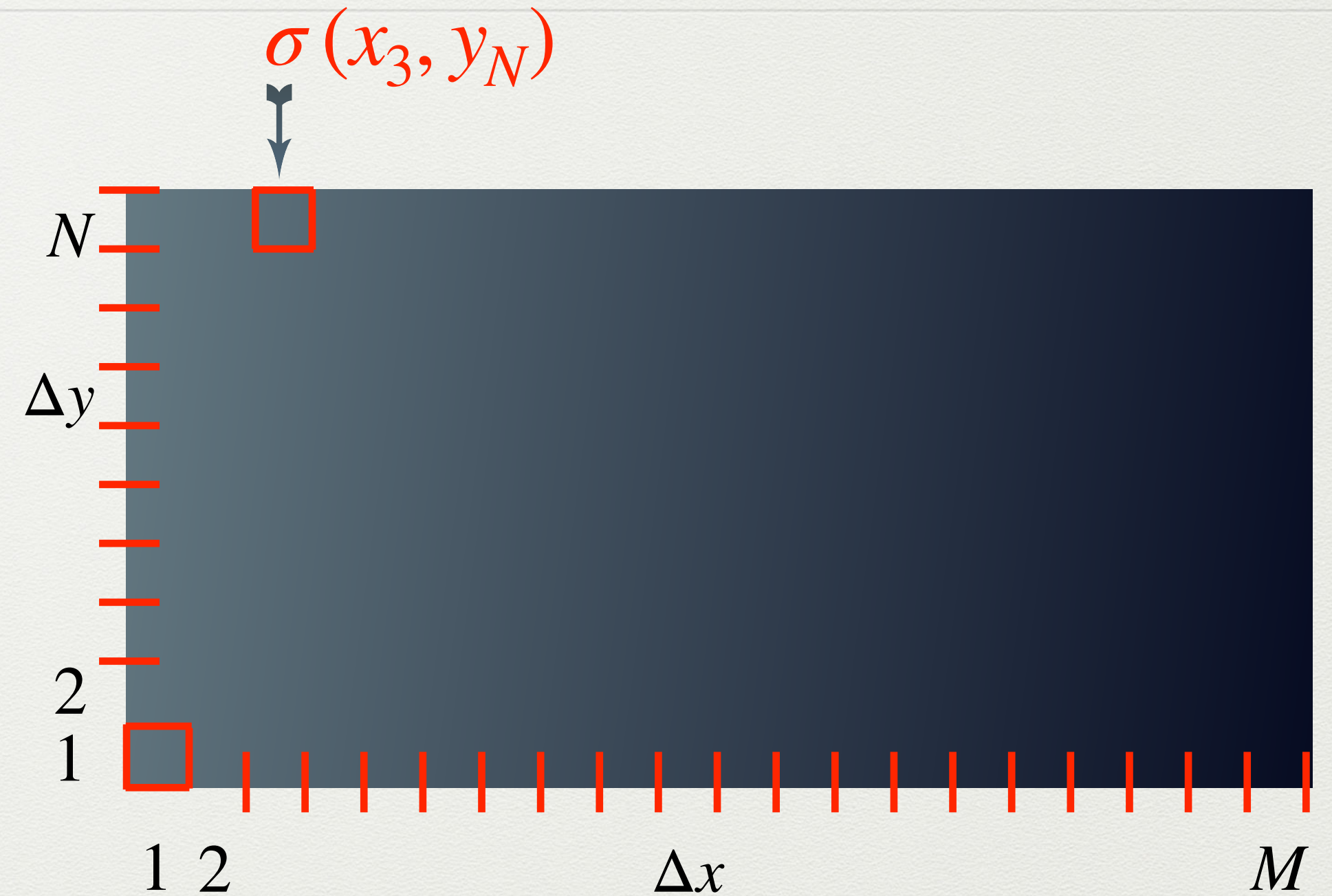
$$m = \int_0^L \lambda(x) dx$$

hmotnosť nehomogénneho telesa – 2D

- uvažujme nejaké dvojrozmerné teleso (dosku) s premenlivou plošnou hustotou $\sigma(x, y)$
- ak ho rozdelíme na malé kúsky (napr. obdĺžničky) s plochou $\Delta x \cdot \Delta y$, hmotnosť jednotlivých kúskov bude približne $\sigma(x, y) \cdot \Delta x \cdot \Delta y$ a hmotnosť celej dosky bude približne

$$m \approx \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sigma(x_i, y_j) \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

- presný výsledok dostaneme v limite $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ a týmto výsledkom je dvojný určitý integrál



$$m = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \sigma(x, y) dx dy$$

ako sa počíta dvojný integrál

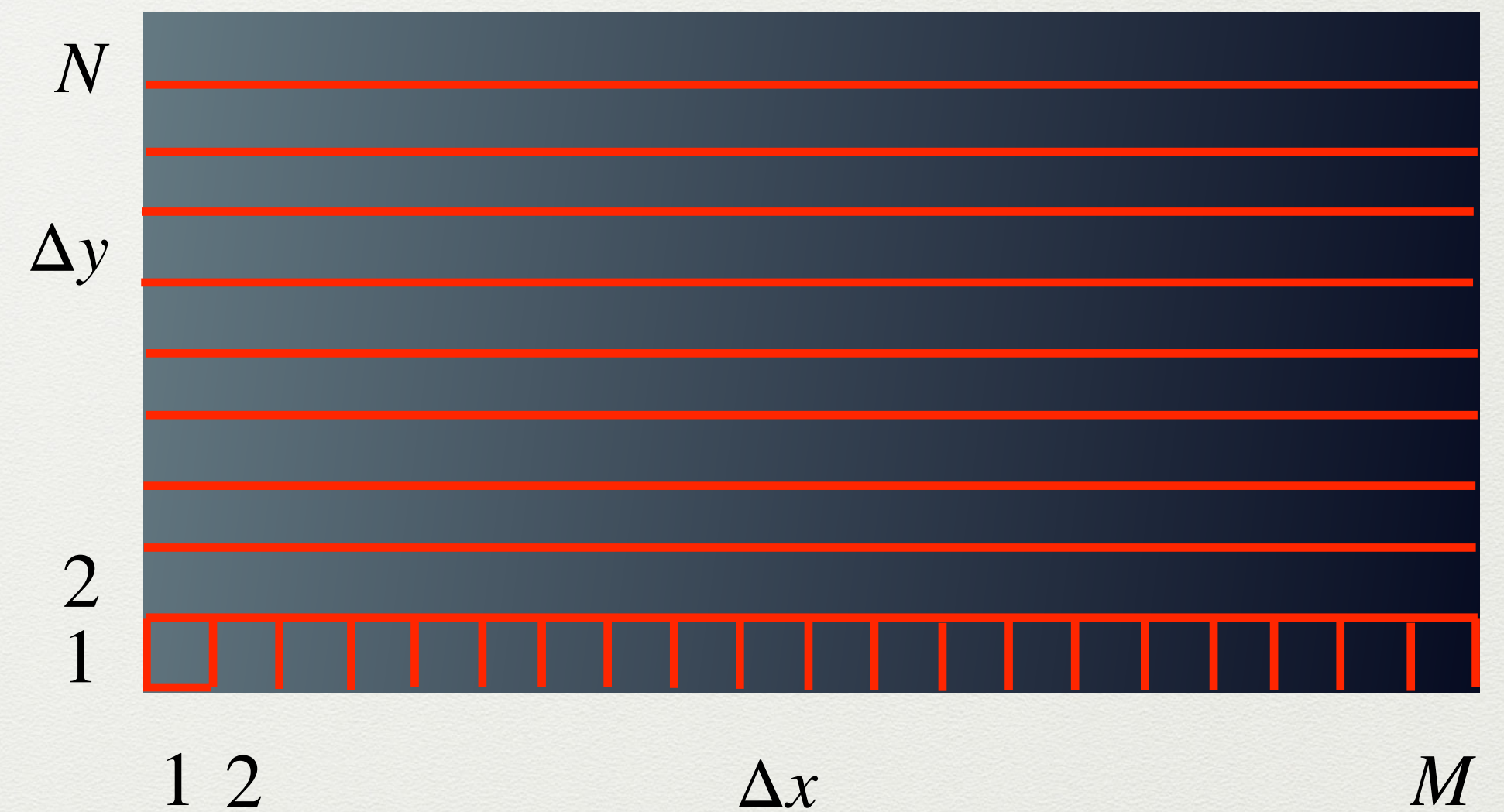
- ako dva obyčajné, jeden za druhým
- dosku si predstavíme ako niečo zložené z tyčí (na obrázku z horizontálnych, ale pokojne by mohli aj vertikálne, prípadne ešte nejaké iné)

- “hmotnosť” “tyče” nachádzajúcej sa vo výške y je

$$\mu(y) = \int_0^{L_x} \sigma(x, y) dx$$

- hmotnosť dosky je súčet (integrál) “hmotností” “tyčí”

$$m = \int_0^{L_y} \mu(y) dy$$



$$m = \int_0^{L_y} \left(\int_0^{L_x} \sigma(x, y) dx \right) dy$$

konkrétny príklad

- ako príklad si zoberme hustotu $\sigma(x, y) = c \cdot x^2 \cdot y$

$$m = \int_0^{L_y} \left(\int_0^{L_x} c \cdot x^2 \cdot y \, dx \right) dy$$

$$= \int_0^{L_y} \left[c \cdot \frac{1}{3} x^3 \cdot y \right]_0^{L_x} dy = \int_0^{L_y} \left[c \cdot \frac{1}{3} L_x^3 \cdot y \right] dy$$

$$= \left[c \cdot \frac{1}{3} L_x^3 \cdot \frac{1}{2} y^2 \right]_0^{L_y}$$

L_y

$$\sigma(x, y) = c \cdot x^2 \cdot y$$

L_x

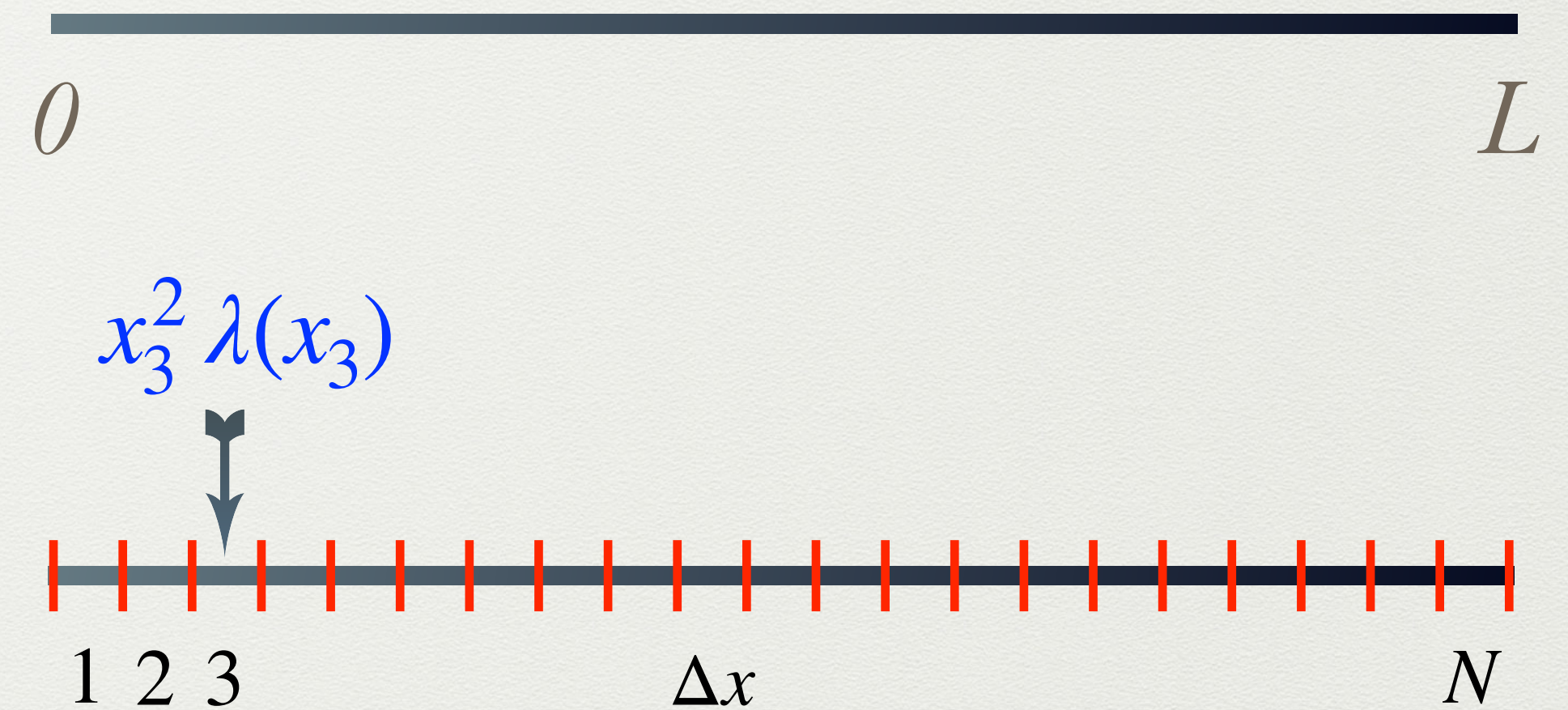
$$m = \frac{1}{6} c \cdot L_x^3 \cdot L_y^2$$

moment zotrvačnosti nehomogénneho telesa – 1D

- uvažujme jednorozmerné teleso (tyč) s nejakou dĺžkovou hustotou $\lambda(x)$, rotujúce v 2D priestore
- ak teleso rozdelíme na malé kúsky dĺžky Δx ich príspevok do momentu zotrvačnosti bude $\lambda(x) \cdot \Delta x \cdot x^2$ a moment zotrvačnosti celého telesa (vzhľadom k počiatku) bude

$$I \approx \sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot \lambda(x_i) \cdot \Delta x$$

- presný výsledok dostaneme v limite $\Delta x \rightarrow 0$ a týmto výsledkom je určitý integrál



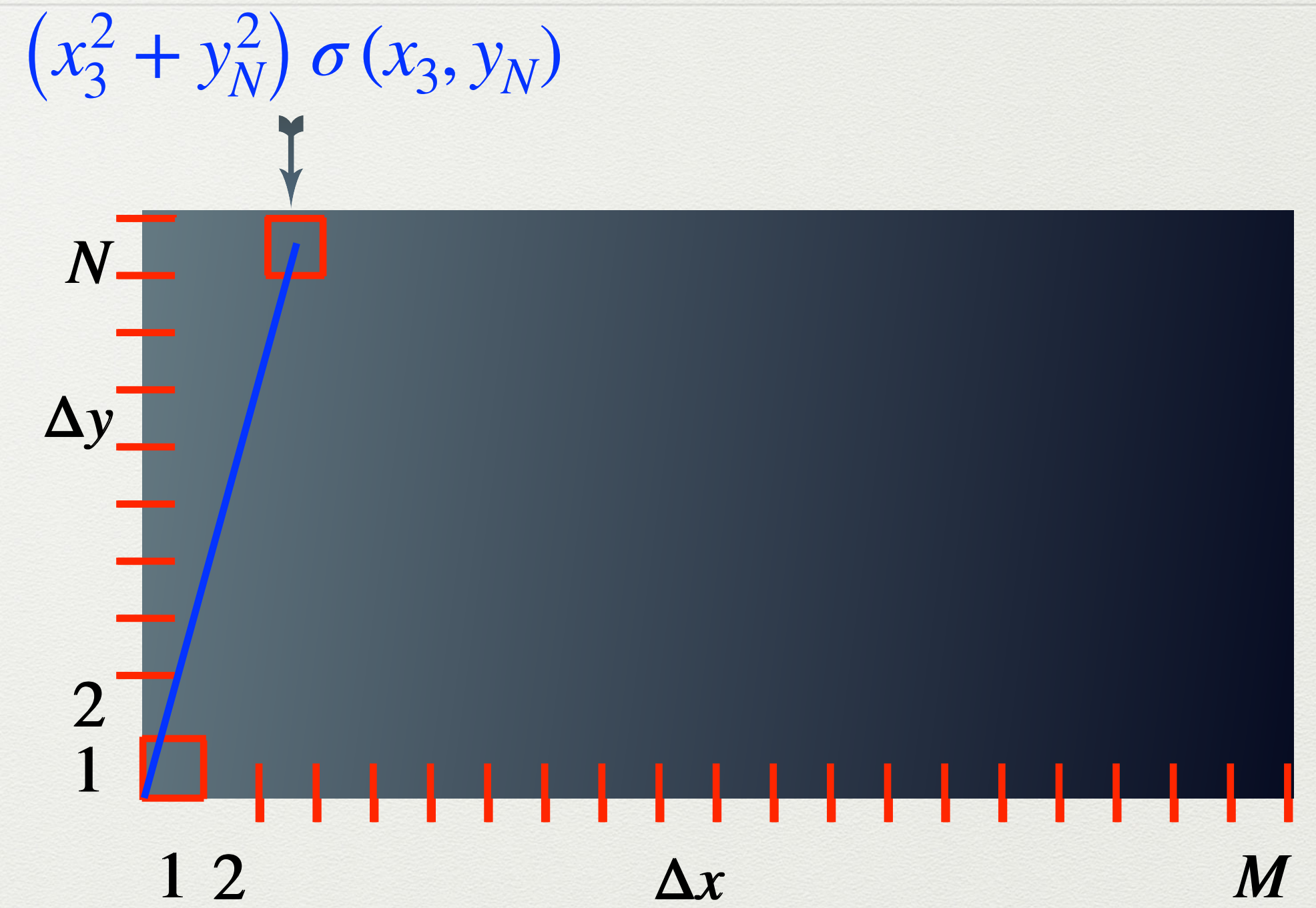
$$I = \int_0^L x^2 \lambda(x) dx$$

moment zotrvačnosti nehomogénneho telesa – 2D

- moment zotrvačnosti dvojrozmerného telesa s plošnou hustotou $\sigma(x, y)$ vzhľadom k počiatku
- rozdelíme ho na malé kúsky (napr. obdĺžničky) s plochou $\Delta x \cdot \Delta y$, ich príspevok k momentu zotrvačnosti bude $\sigma(x, y) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot (x^2 + y^2)$ a moment zotrvačnosti celej dosky bude približne

$$I \approx \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (x_i^2 + y_j^2) \cdot \sigma(x_i, y_j) \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

- presný výsledok dostaneme v limite $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ a týmto výsledkom je dvojný určitý integrál



$$I = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} (x^2 + y^2) \sigma(x, y) dx dy$$

konkrétny príklad

- majme opäť hustotu $\sigma(x, y) = c \cdot x^2 \cdot y$ a počítajme moment zotrvačnosti vzhľadom k počiatku (0,0)

$$I = \int_0^{L_y} \left(\int_0^{L_x} (x^2 + y^2) c \cdot x^2 \cdot y \, dx \right) dy$$

$$= \int_0^{L_y} \left[c \cdot \frac{1}{5} x^5 \cdot y + c \cdot \frac{1}{3} x^3 \cdot y^3 \right]_0^{L_x} dy$$

$$= \int_0^{L_y} \frac{c}{5} L_x^5 y + \frac{c}{3} L_x^3 y^3 \, dy = \left[\frac{c}{10} L_x^5 y^2 + \frac{c}{12} L_x^3 y^4 \right]_0^{L_y}$$

L_y

$$\sigma(x, y) = c \cdot x^2 \cdot y$$

L_x

$$I = \frac{c}{10} L_x^5 L_y^2 + \frac{c}{12} L_x^3 L_y^4$$

moment zotrvačnosti vzhľadom k ľubovoľnému bodu

- momenty máme zatiaľ definované vzhľadom k počiatku súradnicovej sústavy
- definície vzhľadom k bodu \vec{R} so súradnicami (X, Y) dostaneme tak, že polohové vektory nahradíme “polohovými vektormi vzhľadom k bodu \vec{R} ”
$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i - \vec{R}$$

- moment zotrvačnosti vzhľadom k bodu \vec{R}

pre teleso zložené z N hmotných bodov
$$I_{\vec{R}} = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i - \vec{R})^2$$

pre náš nehomogénny obdĺžnik
$$I_{\vec{R}} = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} ((x - X)^2 + (y - Y)^2) \sigma(x, y) dx dy$$

Steinerova veta (vcelku užitočné tvrdenie)

- moment zotrvačnosti vzhľadom k bodu \vec{R} sa dá jednoducho vyjadriť cez moment zotrvačnosti vzhľadom k hmotnému stredu

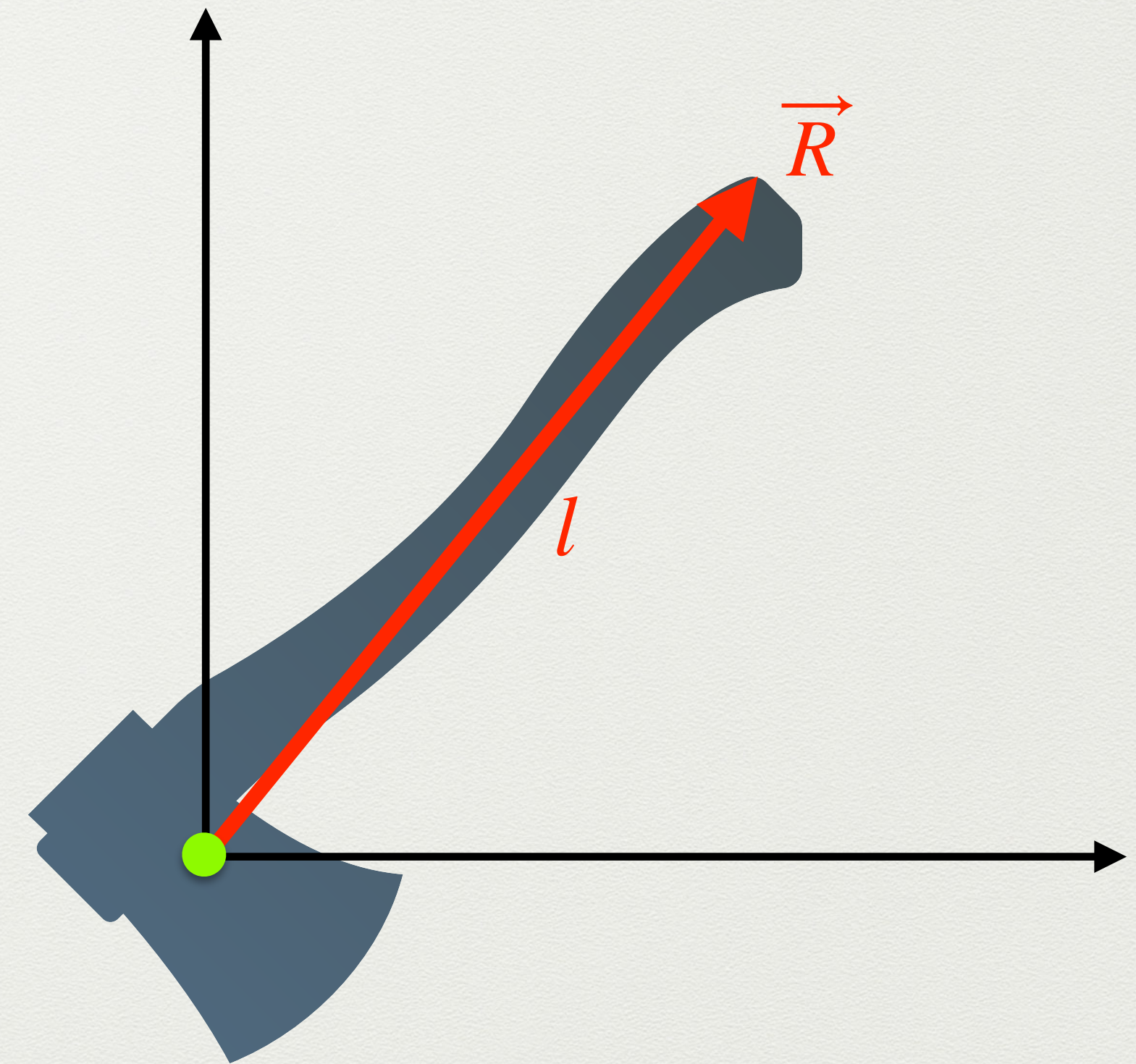
$$I_{\vec{R}} = I_{\text{h.s.}} + ml^2$$

kde m je hmotnosť telesa a l je vzdialenosť bodu \vec{R} od hmotného stredu telesa

dôkaz: $I_{\vec{R}} = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i - \vec{R})^2$ napíšeme ako

$$I_{\vec{R}} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i^2 - 2\vec{R} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i + \vec{R}^2 \sum_{i=1}^N m_i$$

a toto použijeme v sústave, ktorej počiatok je v hmotnom strede: $I_{\vec{R}} = I_{\text{h.s.}} - 2\vec{R} \cdot \vec{0} + l^2 m$



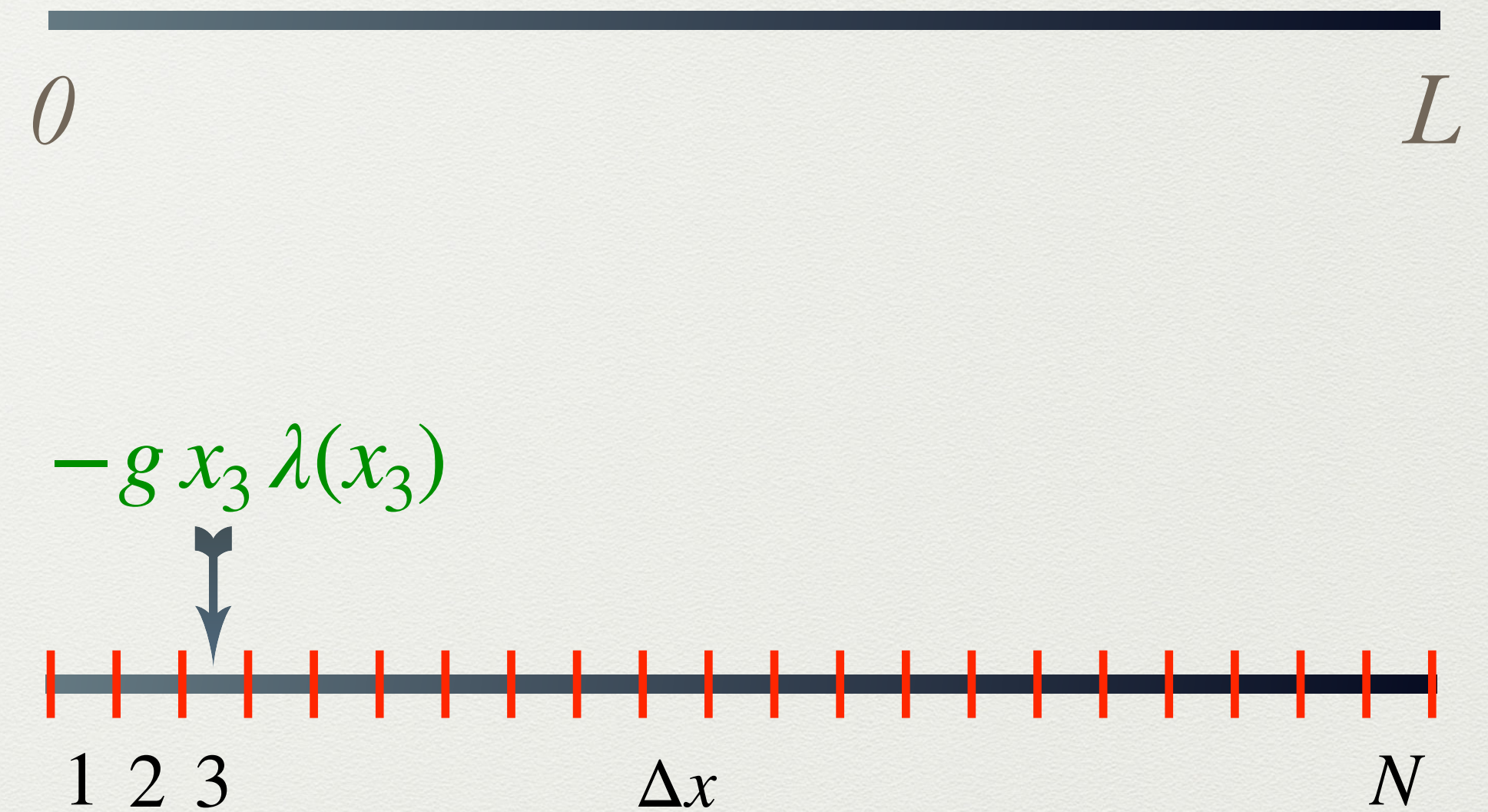
- úloha: dokážte Steinerovu vetu pre telesá so spojitou rozloženou hmotou

moment gravitačnej sily pôsobiacej na tyč

- uvažujme jednorozmerné teleso (tyč) s dĺžkovou hustotou $\lambda(x)$ v homogénnom gravitačnom poli
- aký je moment grav. sily vzhľadom k počiatku?
- zložky gravitačnej sily pôsobiacej na malý kúsok sú $F_x = 0$ a $F_y \approx -g \lambda(x) \Delta x$, moment gravitačnej sily pôsobiacej na tento kúsok je $M \approx -x g \lambda(x) \Delta x$ takže celkový moment sily vzhľadom k počiatku bude

$$M \approx - \sum_{i=1}^N x_i g \lambda(x_i) \cdot \Delta x$$

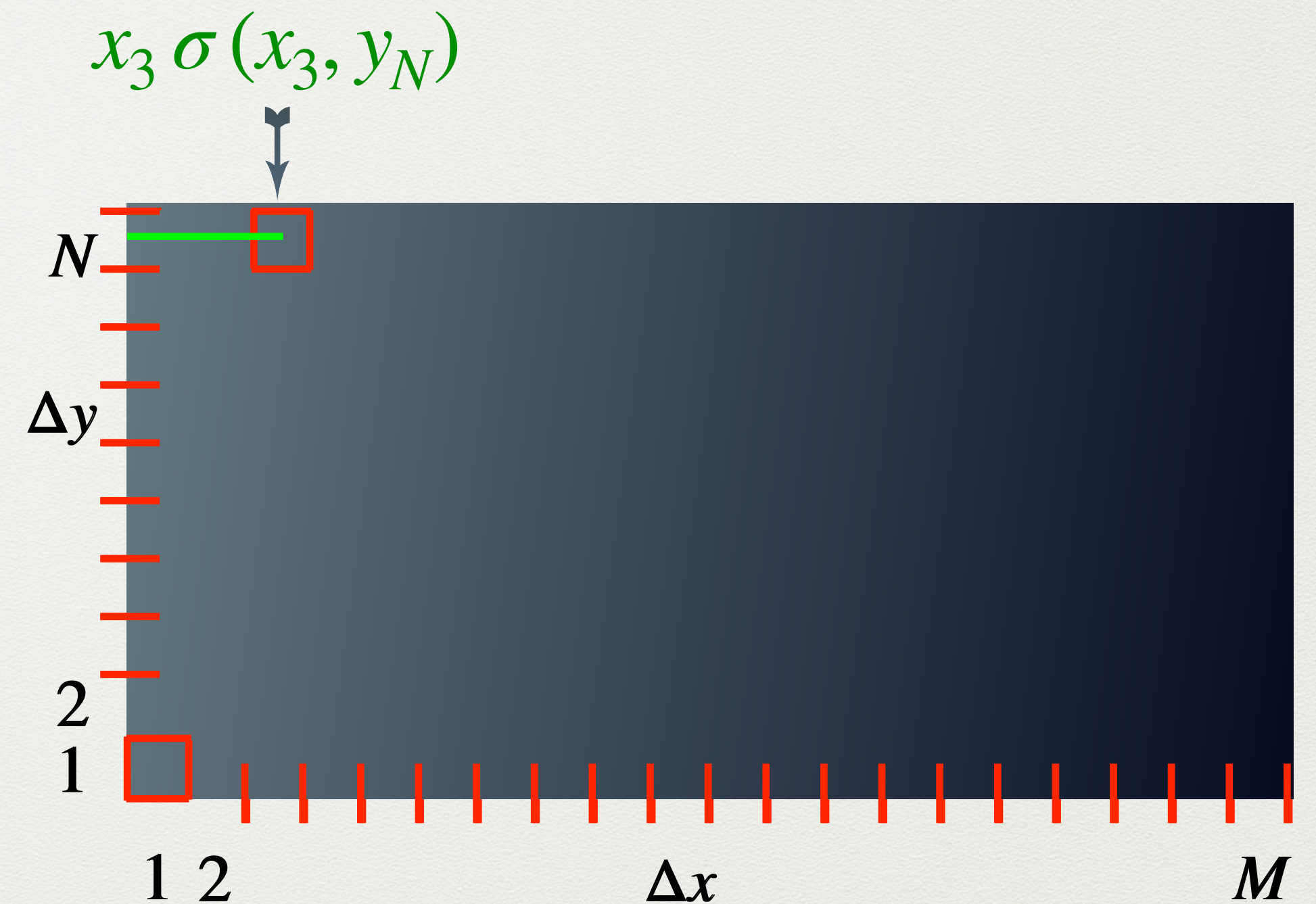
- presný výsledok dostaneme v limite $\Delta x \rightarrow 0$



$$M = - \int_0^L x g \lambda(x) dx$$

moment gravitačnej sily pôsobiacej na dosku

- už je to nuda a otrava, ale dajme ešte aj tú dosku
- úloha: ak to ešte potrebujete, urobte gymnastiku, ktorá by už mala byť rutinná, a napíšte približný výraz (sumu cez malé obdĺžničky) pre moment gravitačnej sily vzhľadom k počiatku
- ak už tú gymnastiku nepotrebujete, rovno napíšte výsledok v tvare integrálu
- a nakoniec ešte vypočítajte moment gravitačnej sily pre našu konkrétnu plošnú hustotu $\sigma(x, y) = c x^2 y$



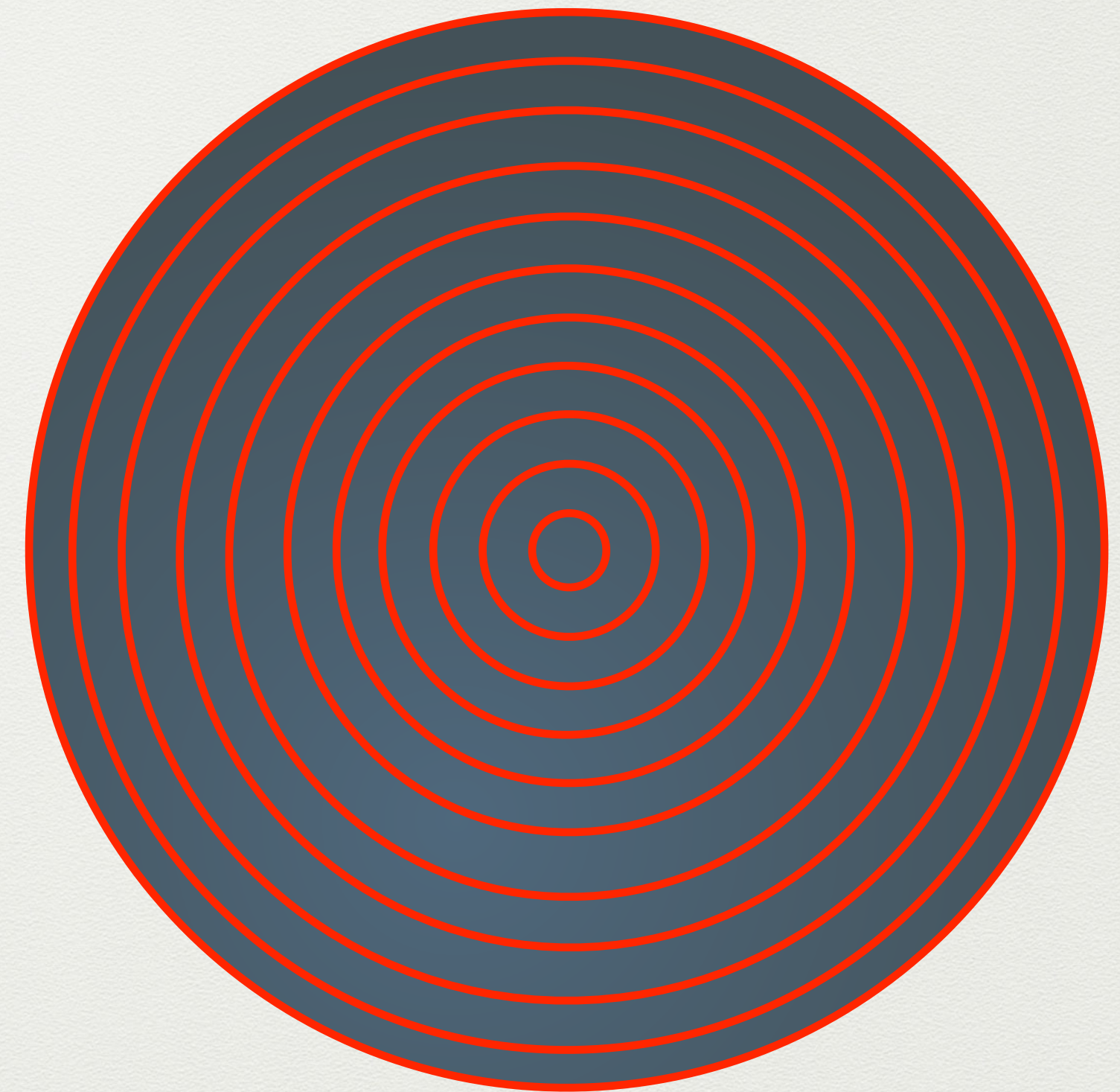
$$M = -g \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} x \sigma(x, y) dx dy$$

poloha hmotného stredu tyče a dosky

- úloha: nájdite výrazy pre polohu hmotného stredu tyče a dosky
- nájdite moment sily, ktorá je rovná celkovej gravitačnej sile a pôsobí v hmotnom strede telesa
- presvedčte sa, že tento moment je rovný celkovému momentu gravitačnej sily, ktorý sme vypočítali pred chvíľou
- poznámka: na budúcej prednáške dokážeme, že “správne pôsobisko” celkovej gravitačnej sily sa v prípade homogénneho gravitačného poľa nachádza vždy v hmotnom strede telesa (ak chcete, dokážte to už teraz)

a teraz niečo nehranaté

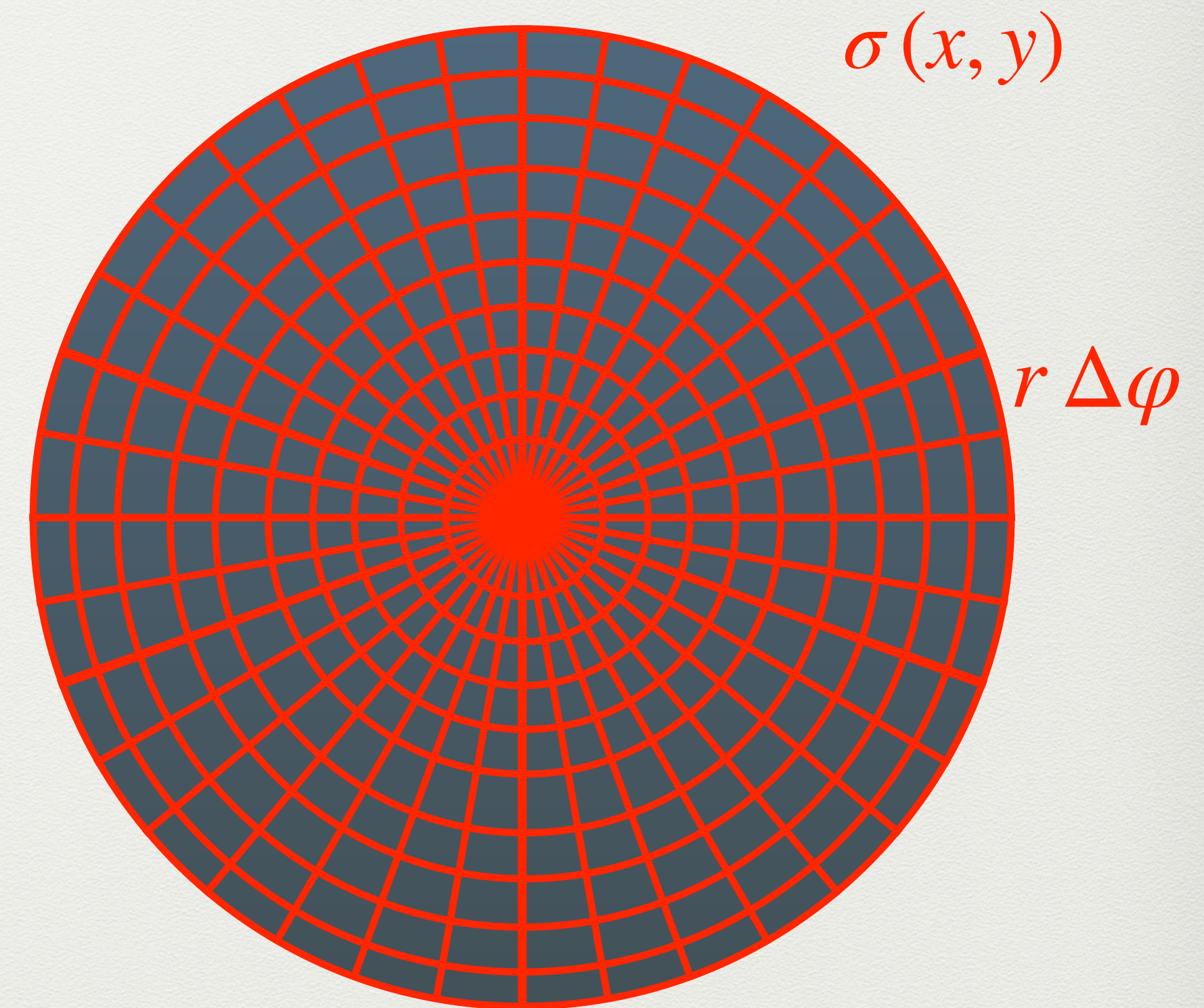
- uvažujme rotačne symetrické koleso s polomerom R , ktorého plošná hustota σ závisí len od vzdialenosti r od stredu, čiže je funkciou jednej premennej: $\sigma(r)$
- hustotu môžeme zapísať ako $\sigma\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ a potom integrovať v kartézskych súradniciach, ale musíme správne zapísať hranice integrovania
- jednoduchší postup je rozdeliť si kruh na pásiky (medzikružia) dĺžky $2\pi r$ (s menacim sa r) a hrúbky Δr každý pásik má hmotnosť približne $\sigma(r) 2\pi r \Delta r$
- hmotnosti sčítame od $r = 0$ po $r = R$ a nakoniec Δr pošleme do nuly, čím dostaneme



$$m = 2\pi \int_0^R \sigma(r) r dr$$

hmotnosť nesymetrického kolesa

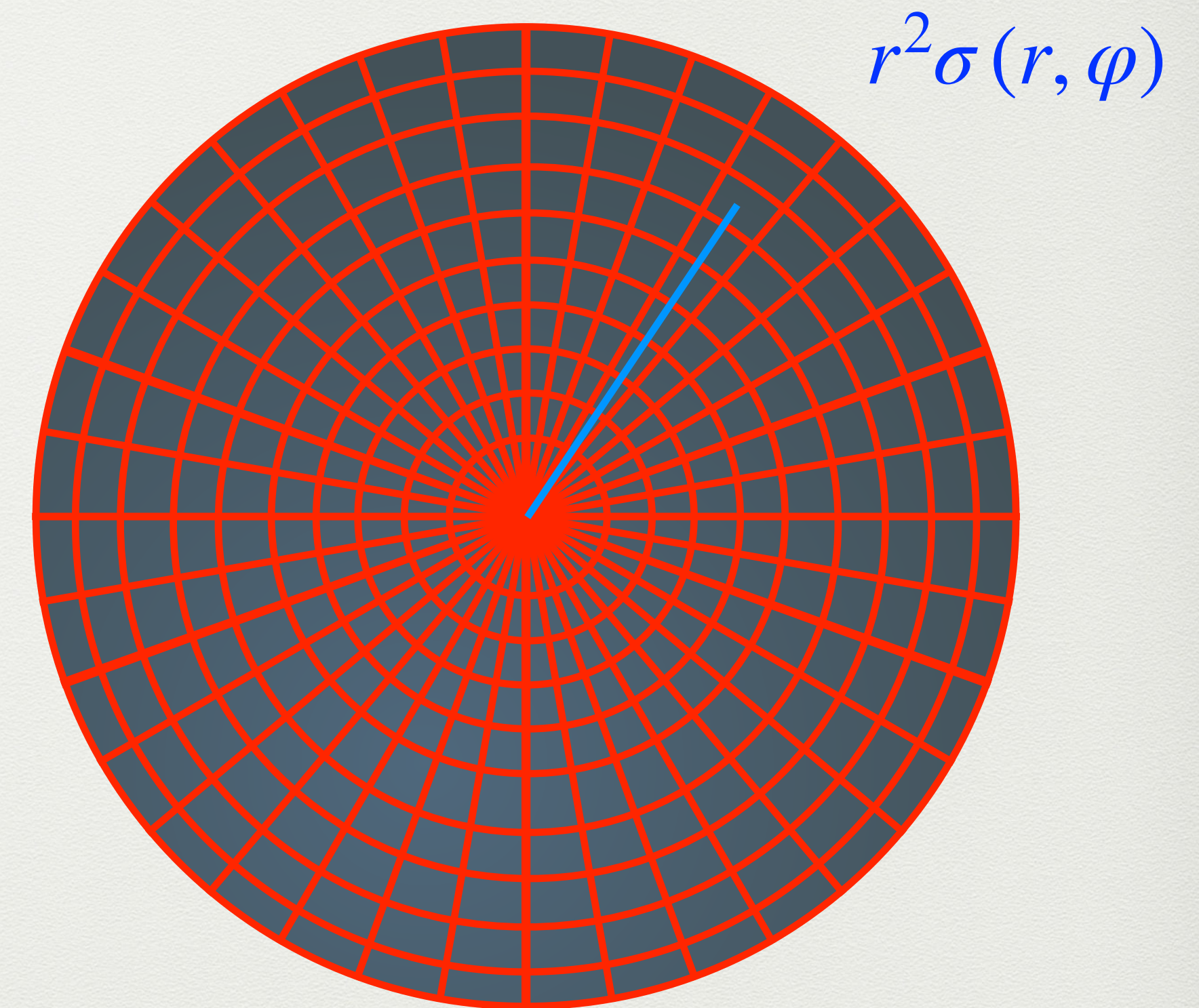
- uvažujme teraz koleso, ktorého plošná hustota závisí od vzdialenosti r aj od uhla φ (tzv. polárne súradnice)
- tentoraz nestačí deliť kruh na pásiky, treba ho deliť jemnejšie, najrozumnejšie je to na “oblé obdĺžniky” s dĺžkami strán $r \Delta\varphi$ (oblá strana) a Δr (rovná strana)
- každý z “oblých obdĺžnikov” má hmotnosť približne $\sigma(r, \varphi) r \Delta r \Delta\varphi$, tieto hmotnosti teraz ako vždy sčítame, a to od $r = 0$ po $r = R$ a od $\varphi = 0$ po $\varphi = 2\pi$
- a nakoniec pošleme Δr aj $\Delta\varphi$ do nuly, čím dostaneme



$$m = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma(r, \varphi) r dr d\varphi$$

moment zotrvačnosti kolesa

- ak rozumieme tomu, ako sa počítala hmotnosť kolesa s plošnou hustotou $\sigma(r, \varphi)$, malo by byť celkom jasné, akým integrálom je pre takéto koleso daný moment zotrvačnosti vzhľadom ku stredu
- každý “oblý obdĺžnik” prispieva svojou hmotnosťou $\sigma(r, \varphi) r \Delta r \Delta \varphi$ násobenou kvadrátom vzdialenosti od stredu kolesa r^2
- užitočná úloha: pre homogénne koleso ($\sigma = \text{const}$) vypočítajte jeho hmotnosť aj moment zotrvačnosti a ukážte, že $I = \frac{1}{2}mR^2$



$$I = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma(r, \varphi) r^3 dr d\varphi$$

poznámka k nepravidelným tvarom na záver

- všetky integrály počítané v tejto prednáške by sme vedeli jednoducho zapísať aj pre trojuholníkové dvojrozmerné telesá (vyskúšajte si to)
- pre menej pravidelné telesá môže byť problém s integračnými hranicami (čo treba integrovať, to by malo byť po tejto prednáške celkom jasné, odkiaľ pokiaľ treba integrovať, to už také jasné byť nemusí)
- ak však vieme zapísať hranice pomocou nejakých funkcií, potom vieme aj integračné hranice zapísať pomocou týchto funkcií
- užitočná úloha: zapíšte integrály pre koleso v kartézskych súradniciach