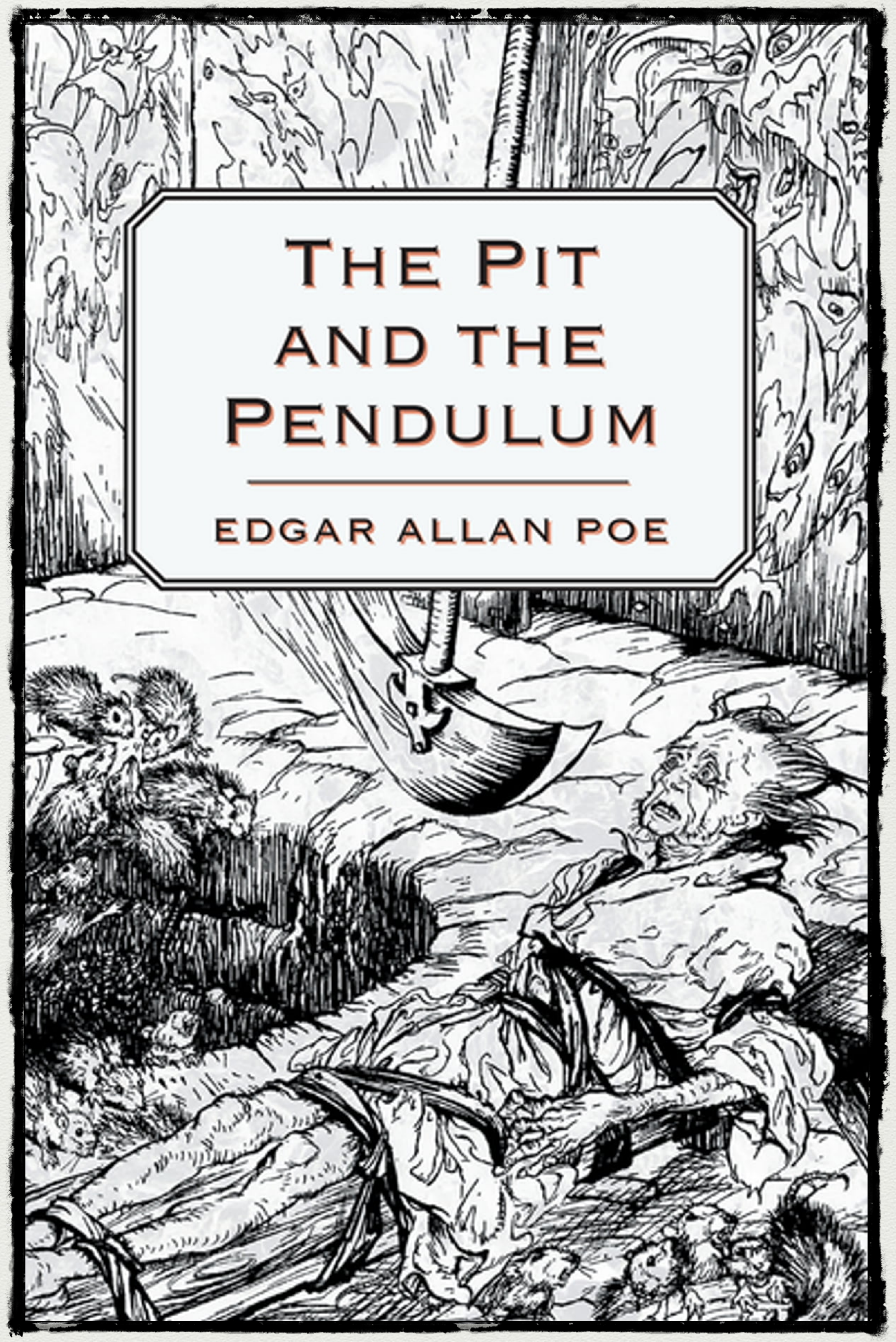
JAMA a KYVADLO
časť prvá: jama

statika tuhého telesa

mechanika 30

nijaký pohyb tuhého telesa

- nepohybujúce sa telesá skúma tzv. statika, ktorá je v prípade hmotného bodu triviálna (výsledná sila musí byť nulová), ale v prípade tuhého telesa sa stáva prekvapujúco netriviálnou
- v tejto prednáške preskúmame niekoľko dôležitých prípadov rovnováhy tuhého telesa, ktoré zhodou okolností všetky nejako súvisia s jamou
- v ďalšej prednáške potom preskúmame rotáciu (otáčanie) tuhého telesa okolo upevneného bodu, typickým prípadom takéhoto pohybu je kyvadlo



statika

- vyšetrovanie rovnováhy telies, väčšinou v homogénnom gravitačnom poli (terminologická poznámka: v gravitačnom poli sa “nepohybu” hovorí rovnováha)
- základná otázka statiky: aké ďalšie sily (okrem gravitačnej) musia pôsobiť, aby sa teleso nepohybovalo?
- odpoveď závisí od toho, koľkými silami (okrem gravitačnej) a v koľkých bodoch môžeme na teleso pôsobiť
- pozoruhodný fakt, na ktorý veľmi rýchlo narazíme: veľa úloh zo statiky sa nebude dať jednoznačne vyriešiť v rámci mechaniky (dokonale) tuhého telesa (bude sa to dať, až keď uvážime aj pružnosť telies)

podmienky rovnováhy tuhého telesa (á la Aristoteles)

Aristotelovské uvažovanie (<u>nesprávne</u>):

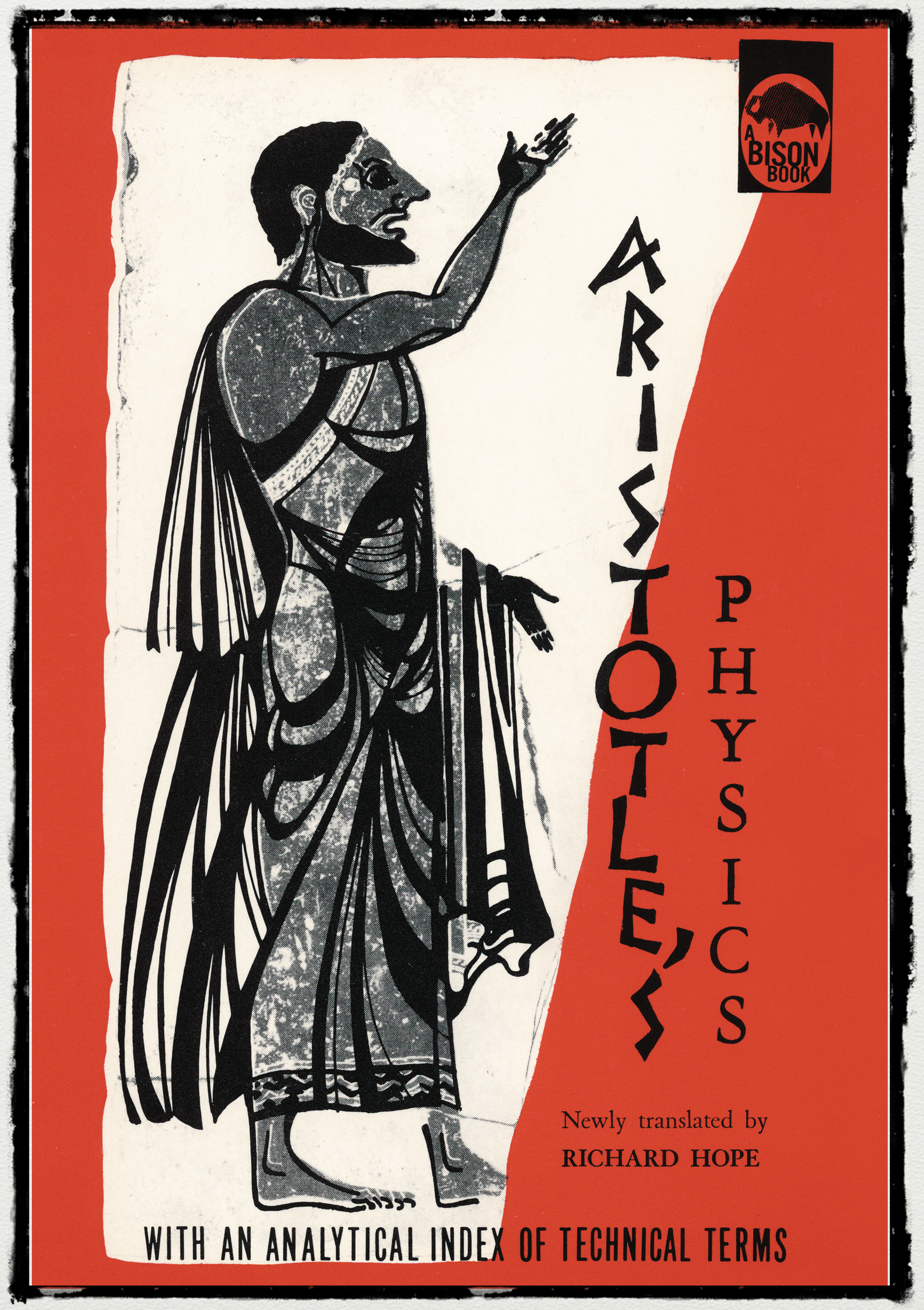
- pohyb je spôsobovaný silou, podmienkou rovnováhy je teda nulová celková sila

$$\vec{F} = \vec{0}$$

- rotačný pohyb je spôsobovaný momentom sily, celkový moment sily teda musí byť v rovnováhe nulový

$$M = 0$$

- výsledky sú správne, argumentácia úplne nesprávna



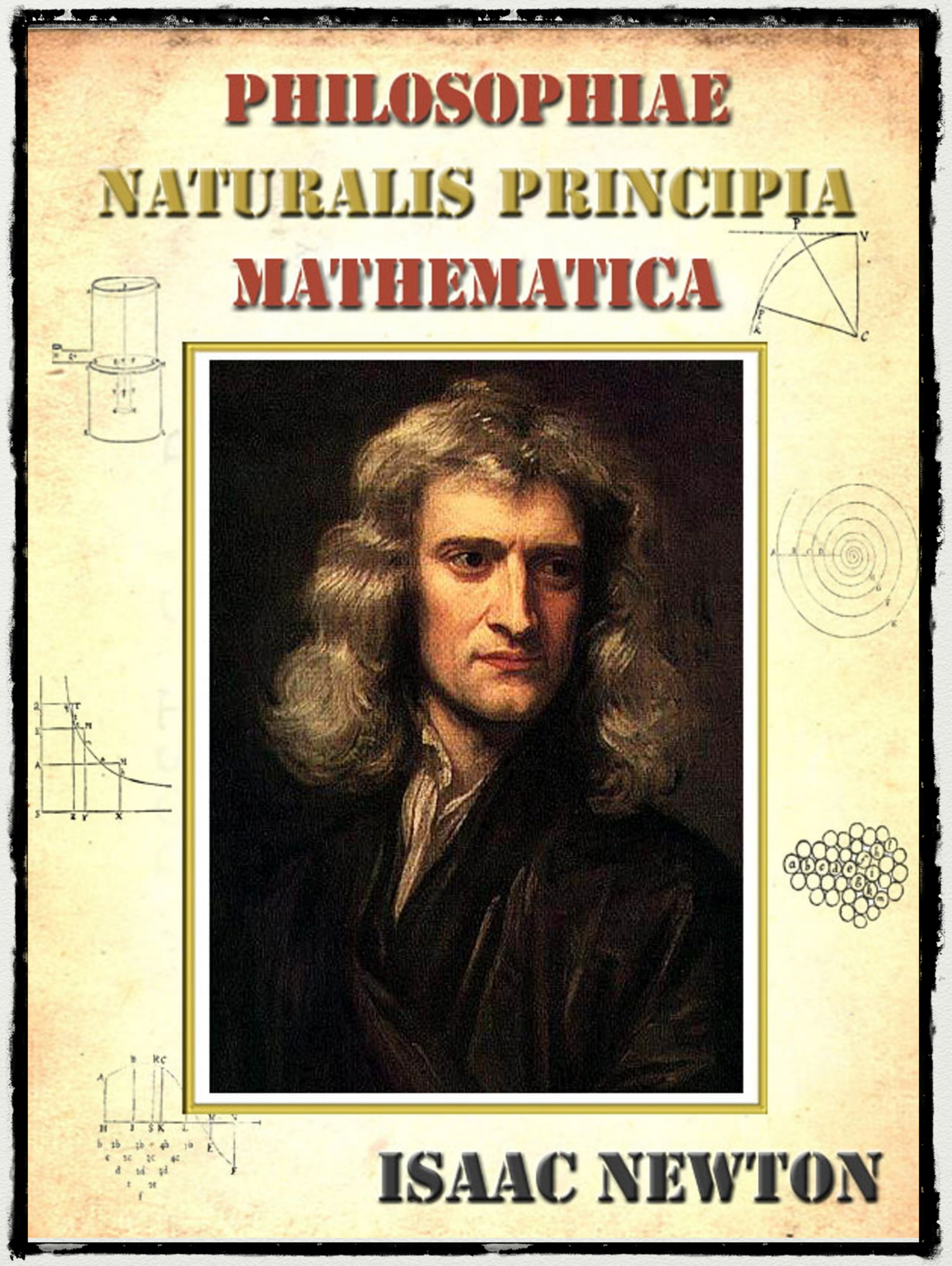
podmienky rovnováhy tuhého telesa (á la Newton)

Newtonovské uvažovanie (správne)

- aké podmienky musia byť splnené, aby sa teleso nepohybovalo?
- počiatočné podmienky: $\vec{v} = 0 \qquad \omega = 0$ (poč. rýchlosti nulové)
- ak majú rýchlosti zostať nulové, musia byť nulové aj zrýchlenia
- z pohybových rovníc $m\dot{\vec{v}} = \vec{F}$ a $I\dot{\omega} = M$ teda vyplýva

$$\vec{F} = 0 \qquad\qquad M = 0$$

- rovnaký výsledkok ako sme dostali aristotelovským uvažovaním, ale u Newtona je argumentácia iná (tentoraz správna)



nulový moment sily vzhľadom ku ktorému bodu?

- moment sily závisí od bodu, vzhľadom ku ktorému ho počítame
- takže vzniká prirodzená otázka: vzhľadom ku ktorému bodu má byť výsledný moment sily nulový?
- príjemná odpoveď:
  vzhľadom k ľubovoľnému bodu, pretože ak je výsledná sila nulová, potom je moment sily vzhľadom ku všetkým bodom rovnaký

- dôkaz:

$$M_{X,Y} = \sum_{i=1}^{N} (x_i - X)\,F_{y,i} - (y_i - Y)\,F_{x,i}$$

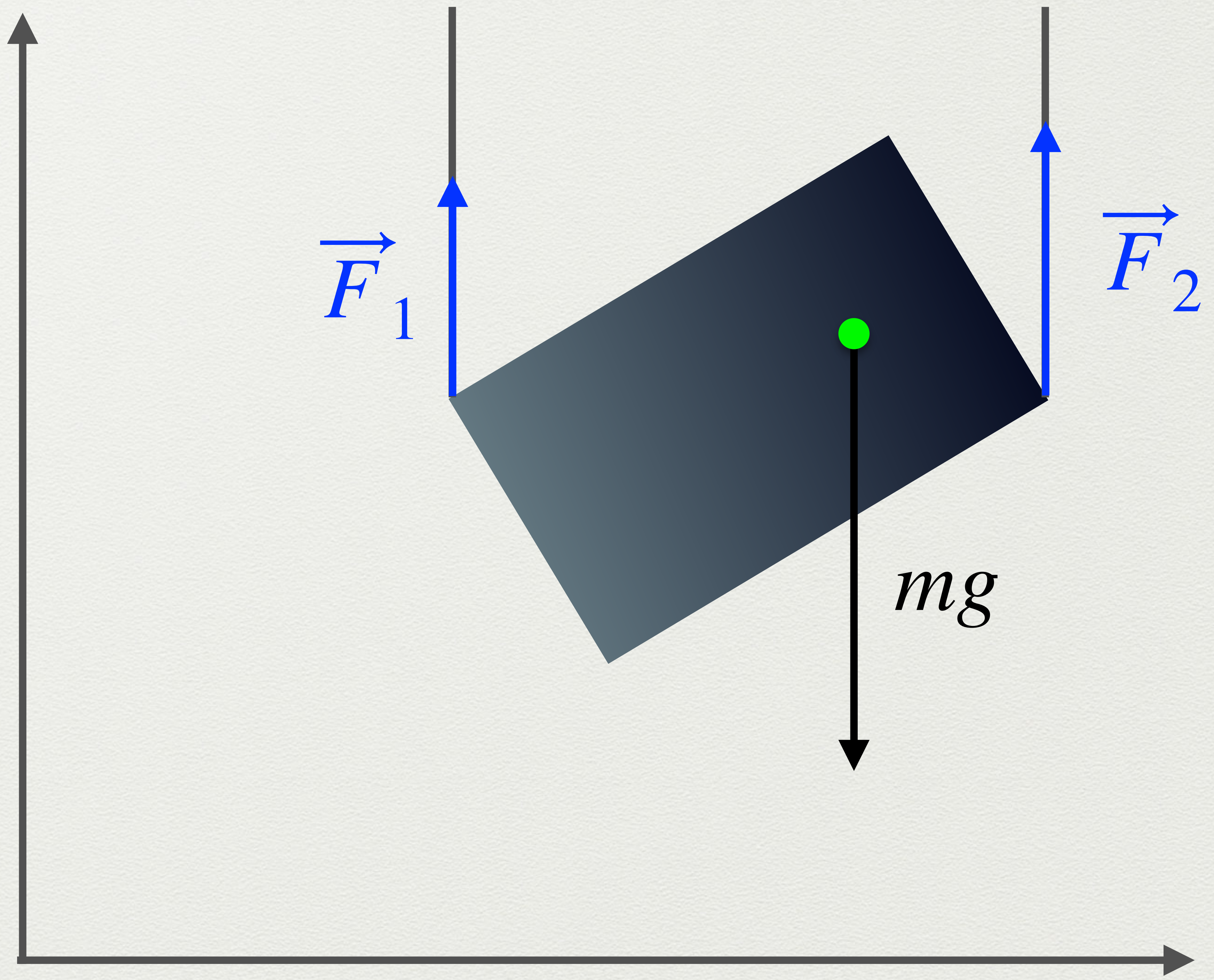
$$= \sum_{i=1}^{N} x_i\,F_{y,i} - y_i\,F_{x,i} - X\sum_{i=1}^{N} F_{y,i} + Y\sum_{i=1}^{N} F_{x,i}$$

$$= \quad M_{0,0} \quad - \quad X\,F_y \quad + \quad Y\,F_x$$

$$= \quad M_{0,0} \quad (\text{lebo } F_x = 0 \text{ aj } F_y = 0)$$

sily a ich pôsobiská

- väčšina síl, ktoré budeme uvažovať v statike, budú kontaktné sily pôsobiace v konkrétnom bode
- uvažujme napríklad dosku zavesenú v dvoch bodoch
- pôsobiská síl, ktorými pôsobia na dosku jednotlivé lanká, sú jasné
- výsledná gravitačná sila má správny moment sily – rovný súčtu momentov gravitačných síl pôsobiacich na jednotlivé časti telesa – vtedy, ak ju umiestnime do hmotného stredu (dôkaz tohto tvrdenia urobíme na nasledujúcom slide)



ak chceme počítať momenty síl, potrebujeme poznať ich pôsobiská

dôkaz tvrdenia o momente gravitačnej sily

- $M = \vec{M}_z$

  $$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i\vec{g} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i \times \vec{g}$$

- drobný trik:
  vynásobíme a vydelíme celkovou hmotnosťou

  $$\vec{M} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i \ \times\ m\vec{g} = \vec{r}_{h.s.} \times \vec{G}$$

  kde $m = \sum m_i$ je celková hmotnosť sústavy a
  $\vec{G} = m\vec{g}$ je celková (výsledná) gravitačná sila

- celkový moment homogénnej gravitačnej sily (pôsobiacej na jednotlivé časti telesa) je rovný momentu celkovej gravitačnej sily (t.j. súčtu gravitač. síl pôsobiacich na jednotlivé časti) pôsobiacej v hmotnom strede telesa

- to isté inými slovami:
  správny moment homogénnej gravitačnej sily dostaneme vtedy, ak výslednú gravitačnú silu umiestnime do hmotného stredu

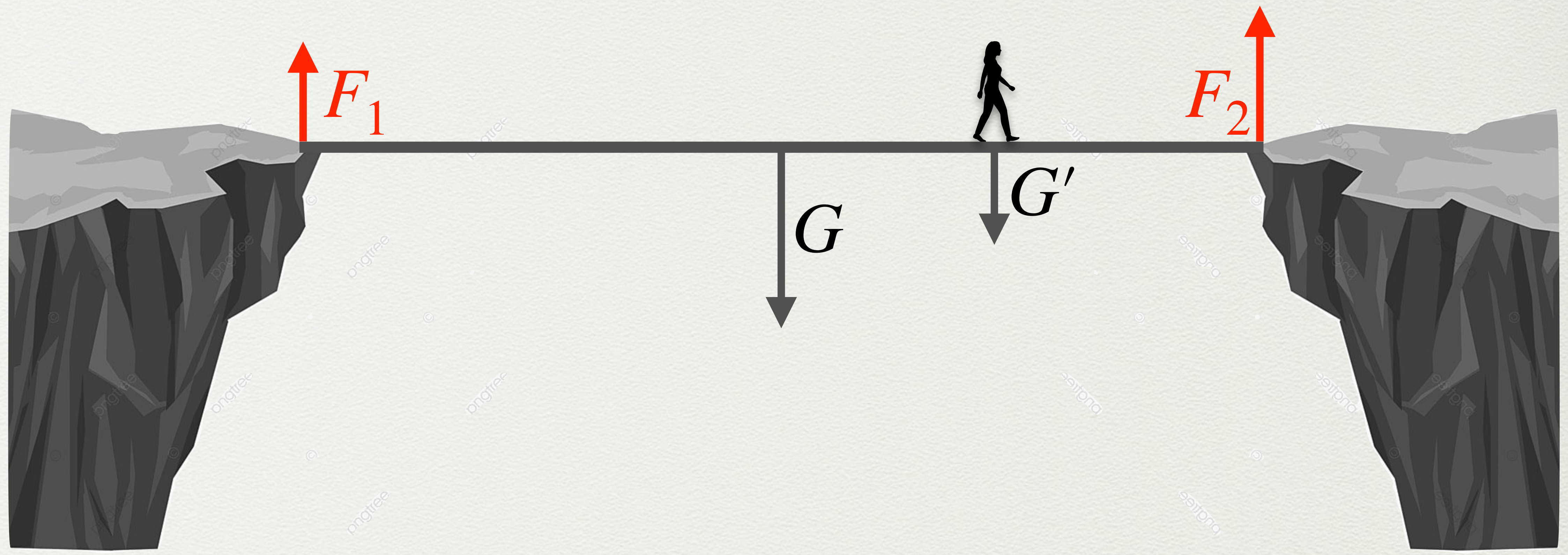
- dôsledok: moment homogénnej gravitačnej sily vzhľadom k hmotnému stredu je nulový (pretože $\vec{r}_{h.s.}$ je v tomto prípade nulové)

rovnováha telies upevnených vo viacerých bodoch

- ako prvé vyšetríme telesá podoprené či upevnené vo viacerých bodoch
- takéto telesá potrebujeme, keď sa chceme dostať cez jamu (lávka, most) alebo z jamy (rebrík)
- základná úloha: dané sú gravitačné sily a my máme zistiť, aké sily pôsobia v miestach podopretia či upevnenia, ak sa teleso nehýbe
- asi najzaujímavejšie na týchto úlohách je, že (ako o chvíľu uvidíme) mnohé z nich nemajú jednoznačné riešenie

lávka

- tiaž lávky podpretej v dvoch bodoch pôsobisko tej tiaže poznáme, to isté platí aj pre tiaž človeka; máme nájsť sily F_1 a F_2



- označme dĺžku lávky l a polohu človeka vzhľadom k pôsobisku sily F_1 označme x

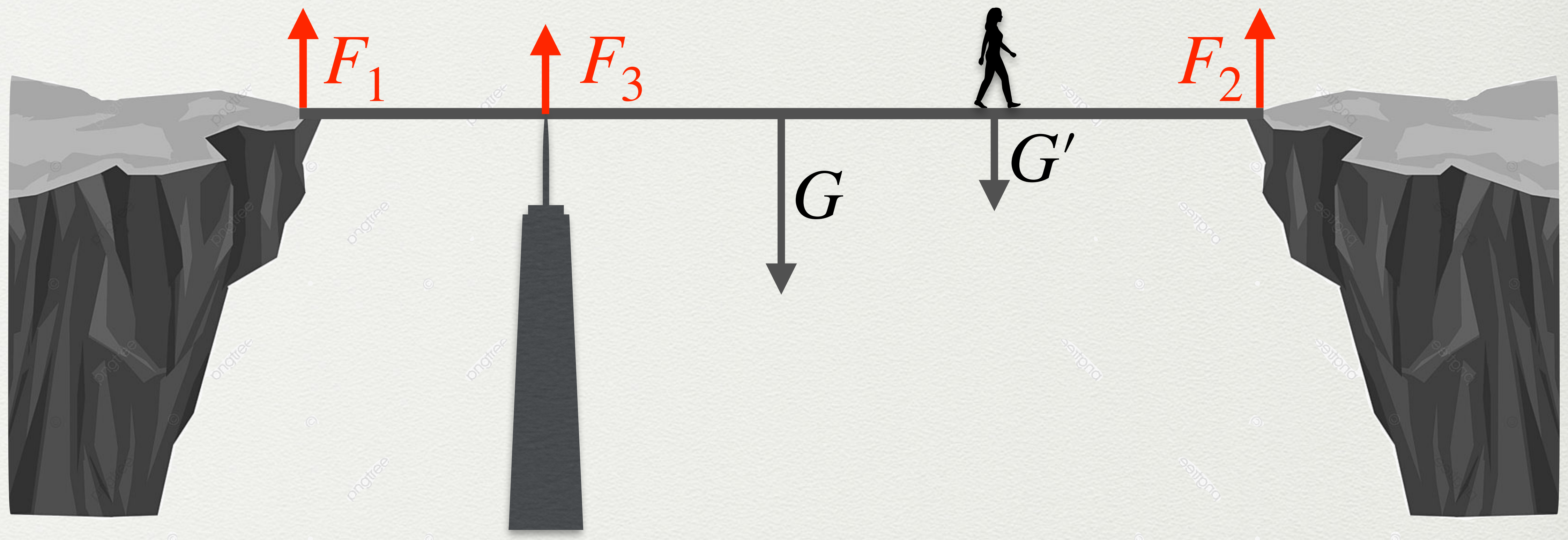
- podmienky rovnováhy:
  $0 = F_1 - G - G' + F_2$
  $0 = 0.F_1 - \frac{l}{2} . G - x . G' + l . F_2$

- dve rovnice o dvoch neznámych:
  $F_1 = \frac{1}{2}G + \frac{l - x}{l}G' \quad F_2 = \frac{1}{2}G + \frac{x}{l}G'$

- užitočná (aj keď vlastne zbytočná) úloha: vypočítajte sily F_1 a F_2 z podmienky nulovosti celkového momentu sily vzhľadom k nejakému inému bodu

- musíte dostať to isté (prečo?)

lávka s podperným stĺpom



- tiaž lávky podopretej v <u>troch bodoch</u> pôsobisko tej tiaže poznáme, to isté platí aj pre tiaž človeka; hľadáme sily F_1, F_2 a F_3

- podporný stĺp nech je (napríklad) v jednej štvrtine dĺžky lávky

- podmienky rovnováhy:
  $0 = F_1 - G - G' + F_2 + F_3$
  $0 = 0.F_1 - \frac{l}{2}\,.\,G - x\,.\,G' + l\,.\,F_2 + \frac{l}{4}\,.\,F_3$

- <u>dve</u> rovnice o <u>troch</u> neznámych nemajú jednoznačné riešenie

- toto je prvý príklad dôležitej skutočnosti: rovnice statiky tuhých telies nemajú vždy jednoznačné riešenie (neznámych síl môže byť viac ako je rovníc rovnováhy)

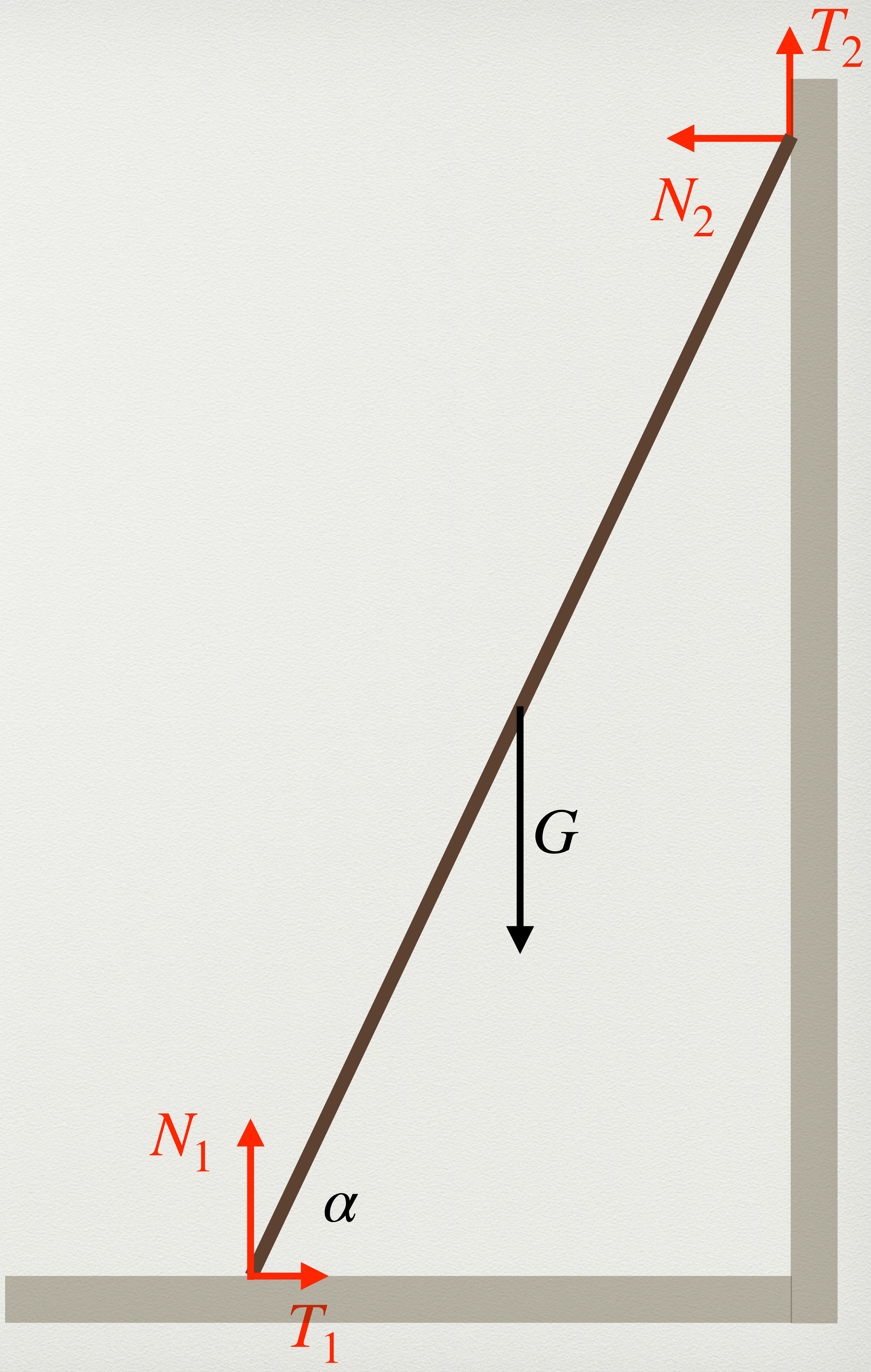
- v takom prípade treba uvážiť pružnosť

rebrík

- homogénna doska (alebo rebrík) dĺžky l
  momenty sily budeme počítať napríklad vzhľadom k spodnému bodu dotyku

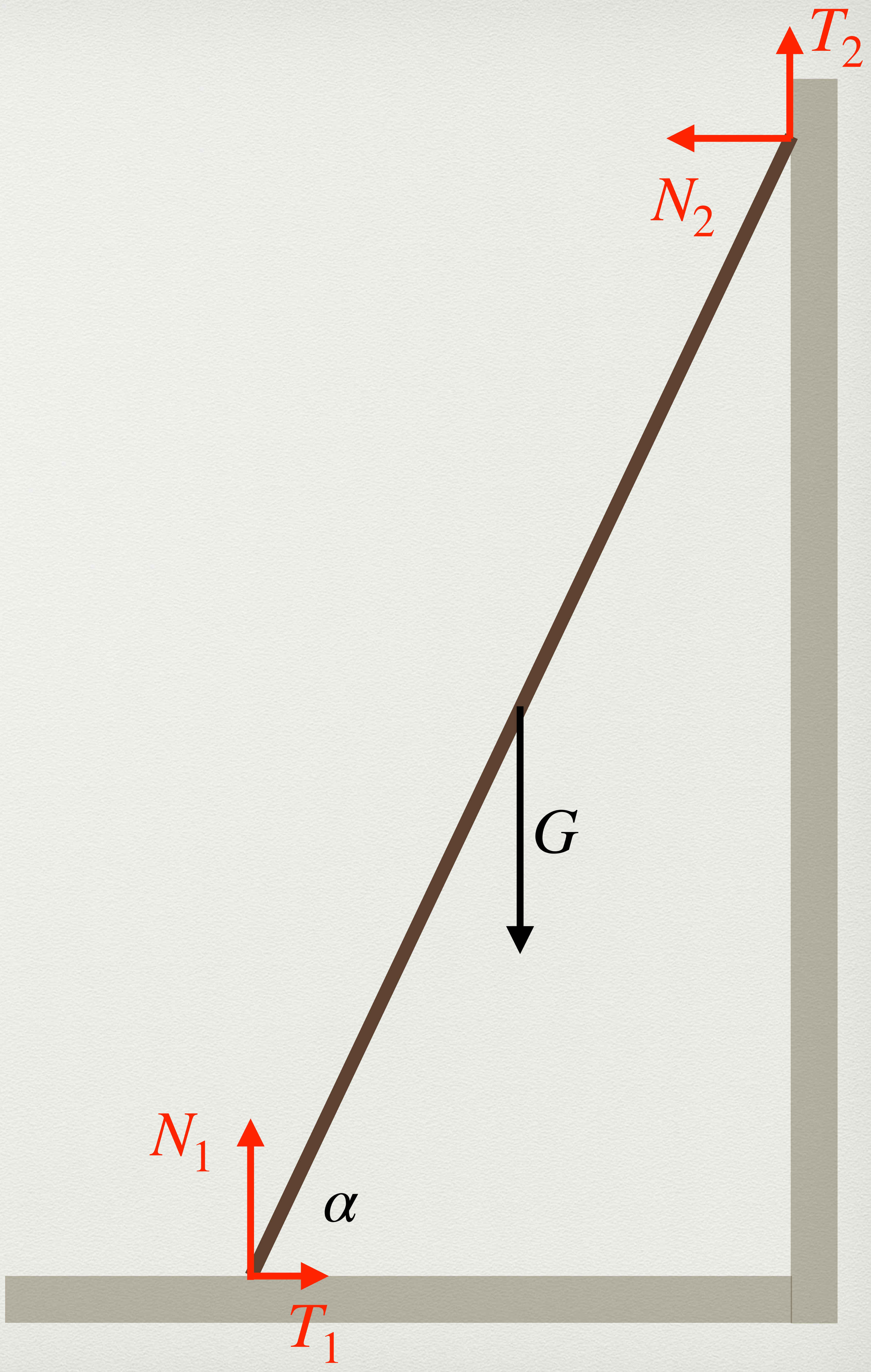
- podmienky rovnováhy:
  $0 = T_1 - N_2$
  $0 = N_1 - G + T_2$
  $0 = -\frac{l}{2} \,.\, G \cos\alpha + l \,.\, N_2 \sin\alpha + l \,.\, T_2 \cos\alpha$
  $T_1 \leq f_1 N_1$
  $T_2 \leq f_2 N_2$

- 3 rovnice a 2 nerovnosti o 4 neznámych
  ani táto úloha nemá jednoznačné riešenie



poznámka k hraničnému prípadu

- úloha je riešiteľná, ak nás zaujíma, pri akom uhle α sa už doska zrúti, t.j. kedy jedna zo síl statického trenia "prestane vládať"
- v takom prípade prejde jedna z nerovností pre statické trenie na rovnosť, čiže máme buď $T_1 = f_1 N_1$ alebo $T_2 = f_2 N_2$
- to sú 4 rovnice a 1 nerovnosť o 4 neznámych
- rovnice vyriešime (obidve sady), preveríme splnenie nerovnosti a ak je splnená, máme riešenie pre kritický uhol



rovnováha telies upevnených jednom bode

- ako druhé vyšetríme telesá podopreté či upevnené len v jednom bode
- také potrebujeme napríklad vtedy, keď jamu kopeme (rýľ, čiže páka) alebo keď do nej spúšťame či z nej vyťahujeme veci (kladka)
- páku aj kladku používame na to, aby sme predmetmi pohybovali, ale základom býva skoro vždy rovnovážna poloha, pričom pohyb dosahujeme malým narušením tejto rovnováhy – práve preto má dobrý význam vyšetriť rovnováhu na páke a na kladke
- o rovnováhe jednoduchých strojov sa učia deti už na základnej škole, ale to sú len úplné základy, my sa to tu naučíme poriadnejšie

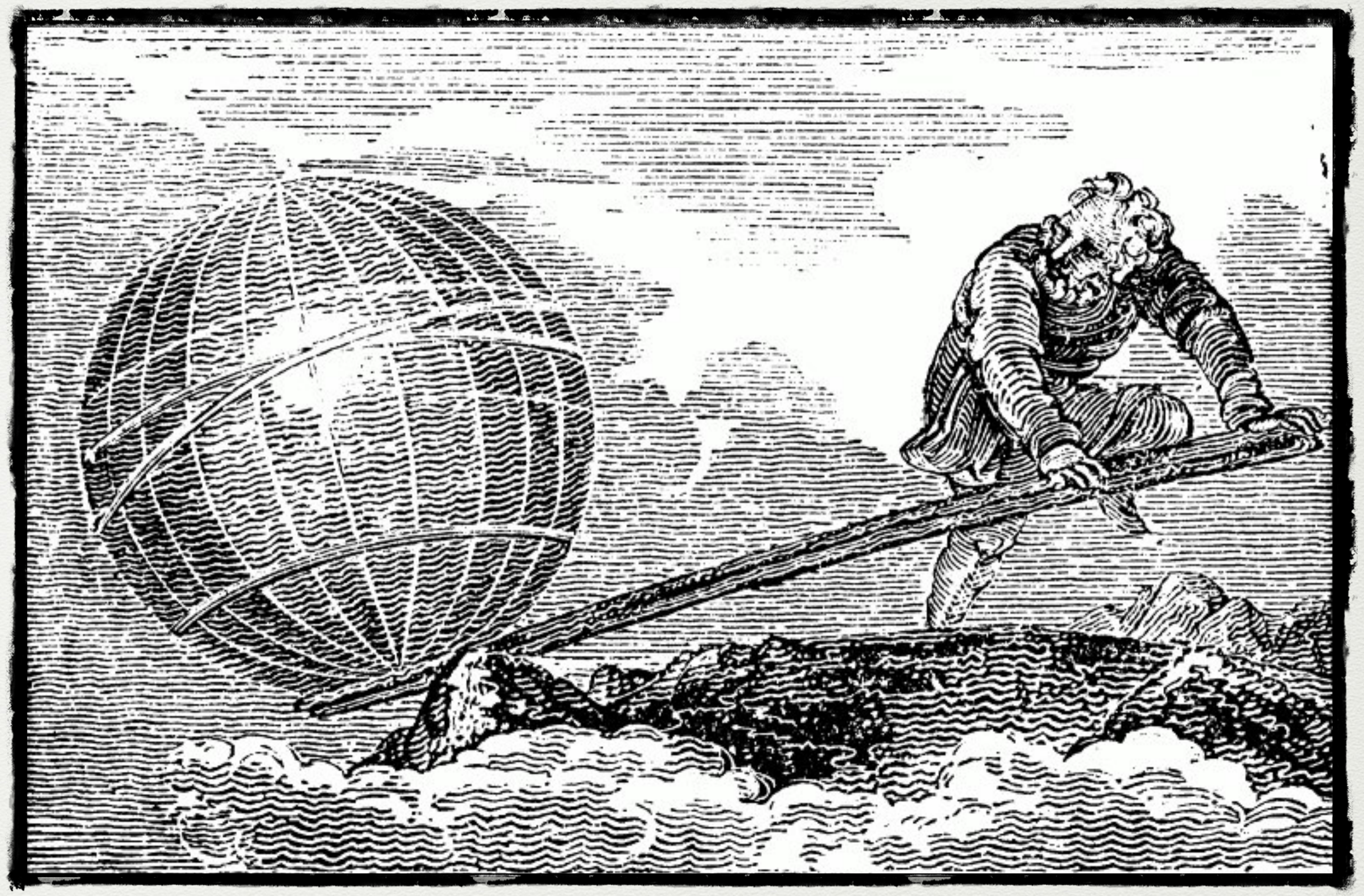
ľahká páka (ZŠ)

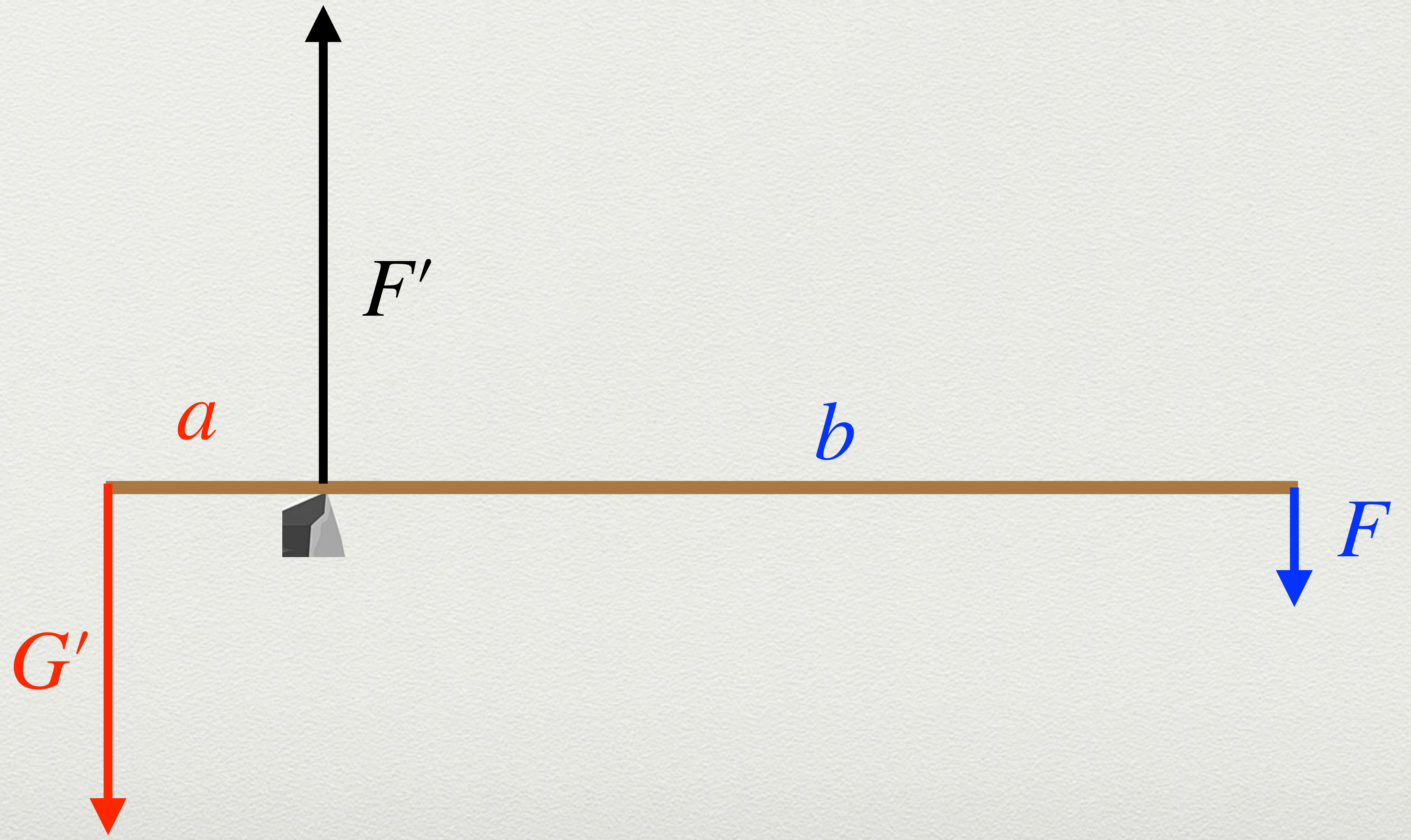
- *Dajte mi dostatočne dlhú páku a jeden bod, o ktorý ju môžem oprieť, a pohnem Zemou.* Archimedes

- *Tú Zem smerom dolu nič nepriťahuje, takže nijakú páku v skutočnosti netreba.* Mojžiš

- ak na obrázku nie je Zem, ale glóbus (na ktorý pôsobí gravitačná sila Zeme), ak je hmotnosť páky zanedbateľná a ak Archimedes tlačí iba na konci páky, potom podmienky rovnováhy sú :
$-G' + F' - F = 0 \qquad aG' - bF = 0$

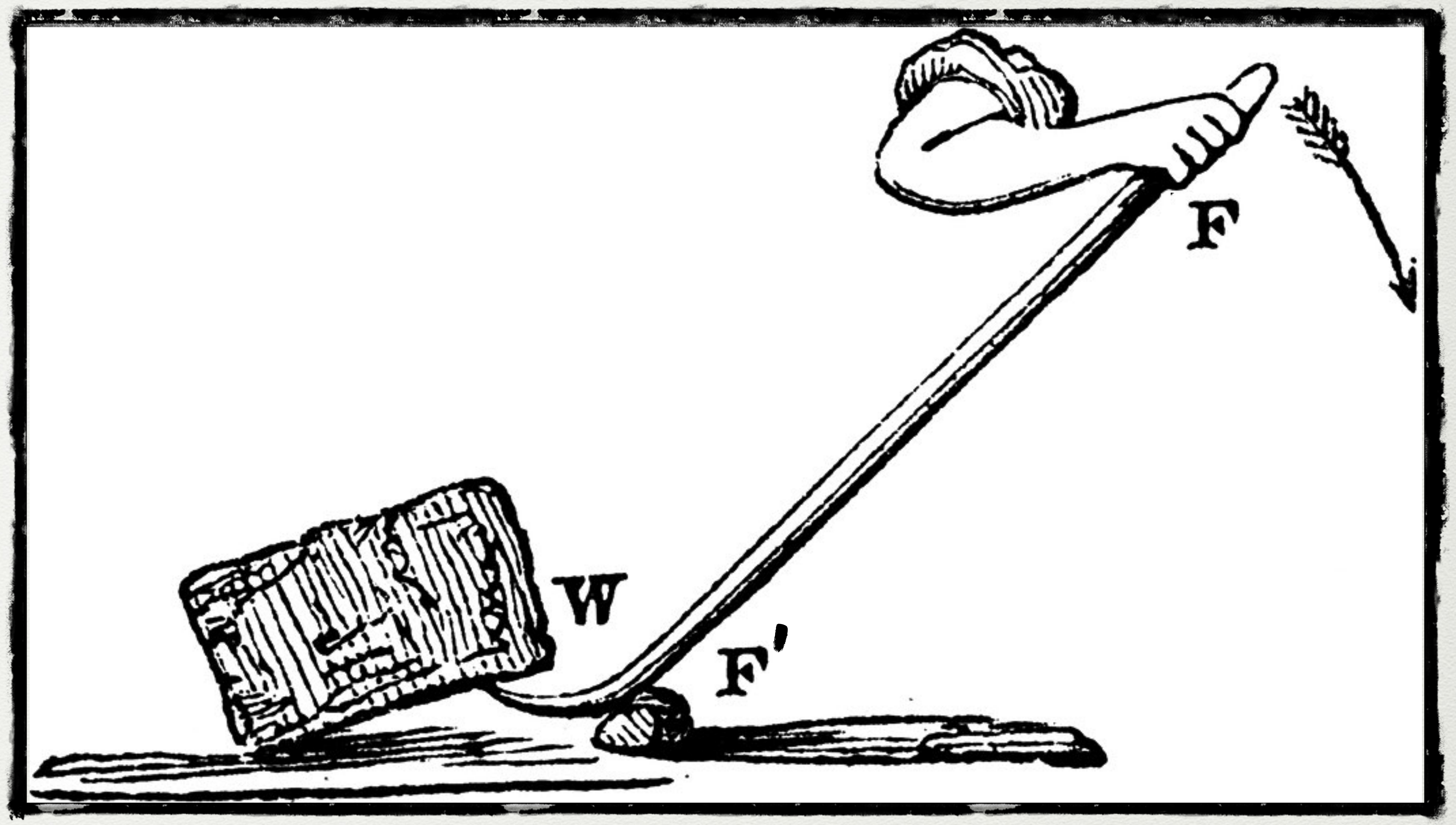
- čiže $F = \frac{a}{b} G'$





reálna páka

- na akých zjednodušeniach je postavený školský (na základnej aj strednej škole) prístup k páke:
- hmotnosť páky je zanedbateľná
- páka je jednorozmerná tyč (ktorú geometricky chápeme ako úsečku)
- páka je v horizontálnej polohe (zväčša)
- sila, ktorou pôsobí na páku tzv. bremeno, je explicitne zadaná

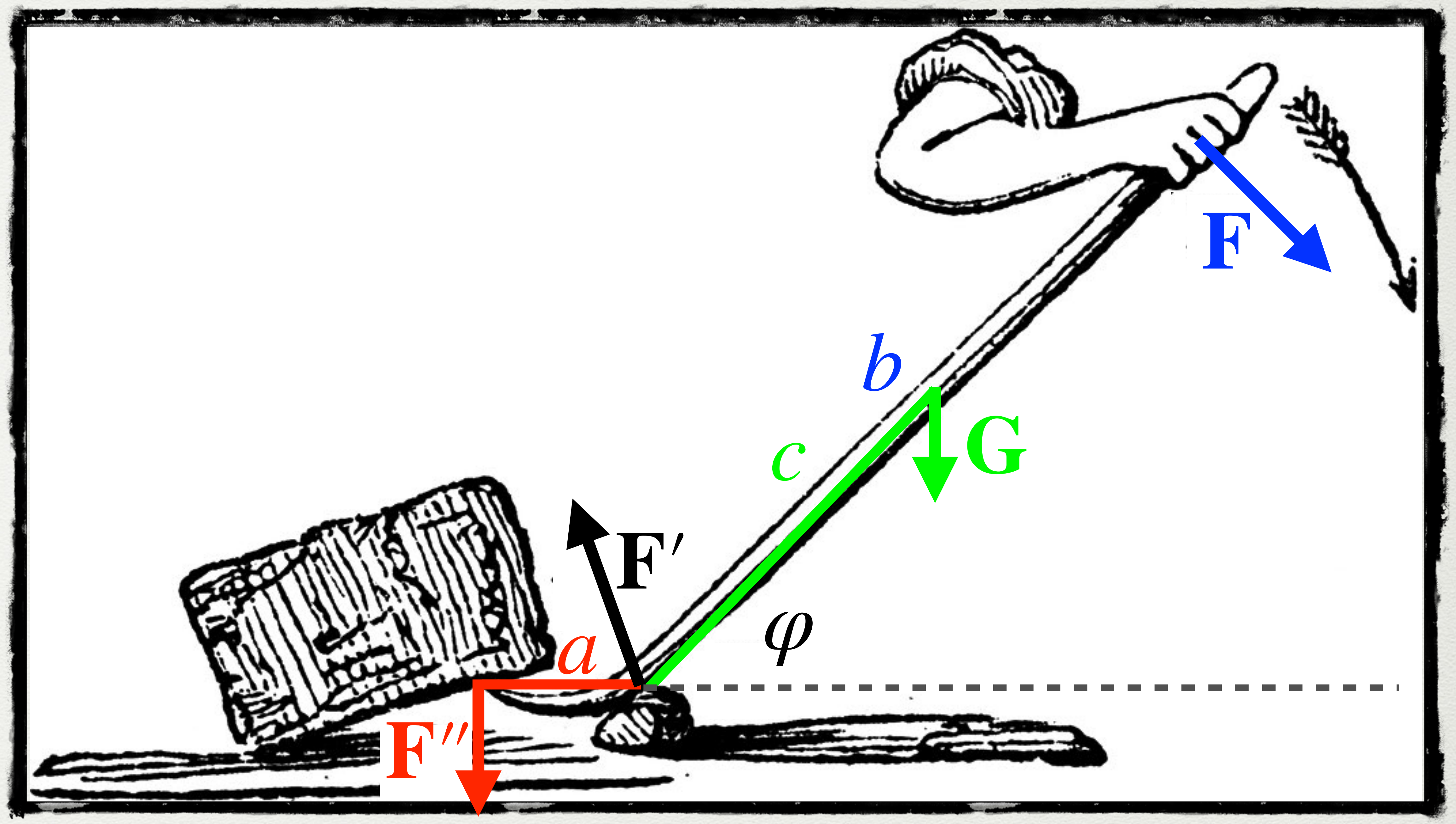


jednoduchá úloha, pri ktorej neplatí ani jedno zo zjednodušení školského prístupu:

Akou silou *F* treba pôsobiť na páku, aby sme pohli bremenom, ktorého hmotnosť je porovnateľná s hmotnosťou páky?

rovnováha reálnej páky

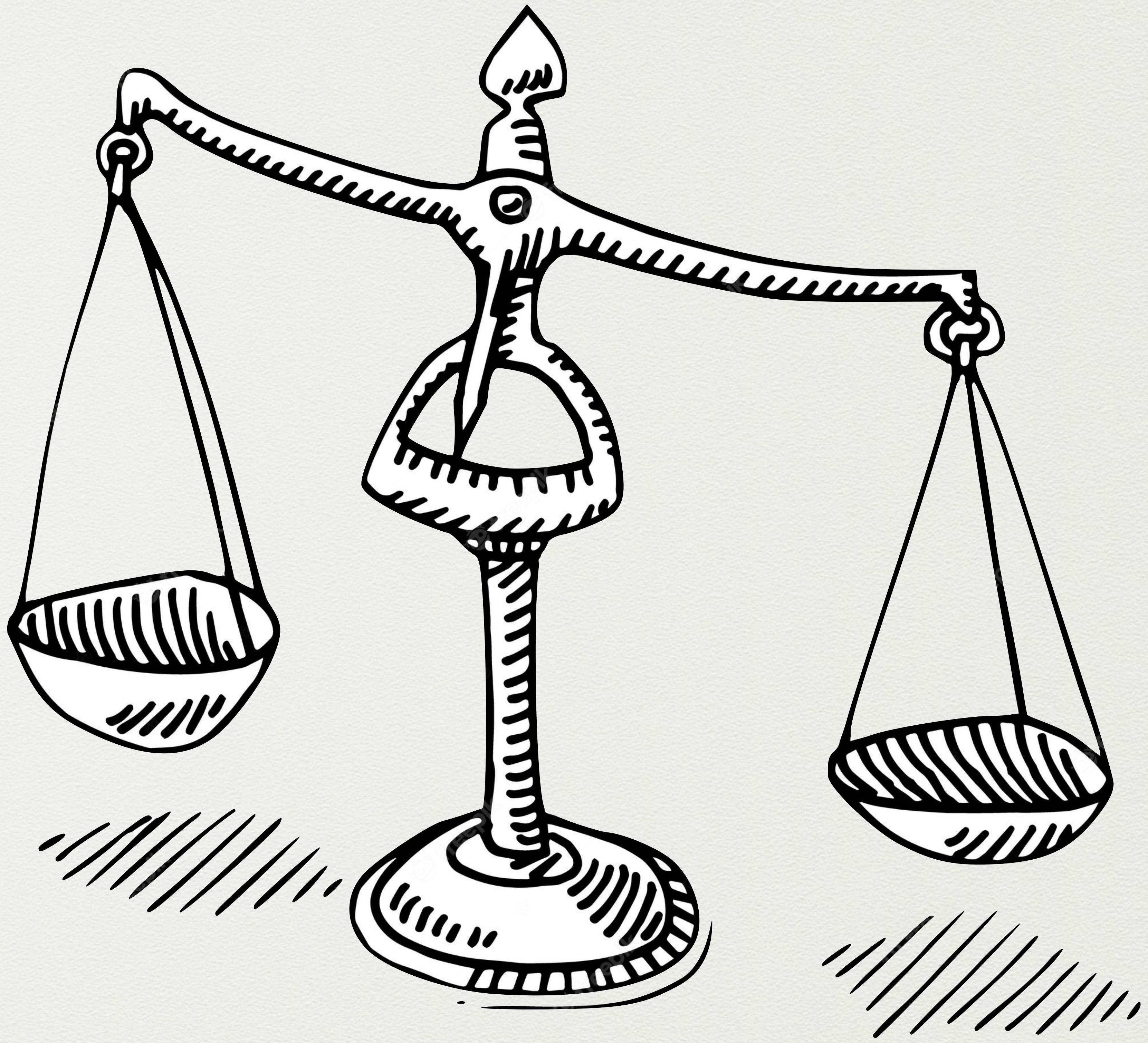
- tiaž páky pôsobí v jej hmotnom strede
- silu F'', ktorou pôsobí na páku bremeno, vypočítame tak, ako sme počítali sily pre lávku podopretú v dvoch bodoch
- podmienka rovnováhy:
$$F'' a - G c \cos\varphi - F b = 0$$
kde a, b a c sú vzdialenosti pôsobísk príslušných síl od oporného bodu
- čiže $\quad F = F'' \frac{a}{b} - G \frac{c}{b} \cos\varphi$



nepovinná, ale užitočná úloha:
ukážte, že ak "červená časť" páky nie je vodorovná, podmienka rovnováhy znie:
$$-F'' a \cos(\varphi + \alpha) - G c \cos\varphi - F b = 0$$
(α je uhol medzi zelenou a červenou čiarou)
kde sa vzalo to mínus pred prvým členom?

dvojramenné váhy

- “jednorozmerná školská páka” neumožňuje ani porozumieť váženiu na dvojramenných váhach
- jednorozmerná páka je v rovnováhe práve vtedy, keď je uchytená presne v hmotnom strede (prečo?)
- ale ak je uchytená v hmotnom strede, potom je v rovnováhe pri ľubovoľnom sklone ramien
- pre “jednorozmernú školskú páku” by vychýlená ručička znamenala jednu z mnohých rovnovážnych polôh, pre reálnu páku (váhy) to znamená, že misky (aj s obsahom) nie sú presne vyvážené



porozumenie váham nezískame pomocou vzťahu pre školskú páku, ale z pohybovej rovnice fyzikálneho kyvadla (na budúcej prednáške)

pár slov o kladke na záver

- spolu s pákou sa na základnej či strednej škole zvykne preberať aj kladka, pre ktorej rovnováhu platí taký istý vzťah pre sily ako platí v prípade páky s rovnako dlhými ramenami
- z toho môže vzniknúť dojem, že kladka je nejakou formou páky
- v skutočnosti to tak nie je, kladka totiž vôbec nie je tuhé teleso
- je to sústava tuhého telesa (prípadne viacerých tuhých telies, ak ide o kladkostroj) a lana, ktoré rozhodne nie je tuhé
- kladka je zložitý systém, bude jej venovaná samostatná prednáška