JAMA a KYVADLO
časť druhá: kyvadlo

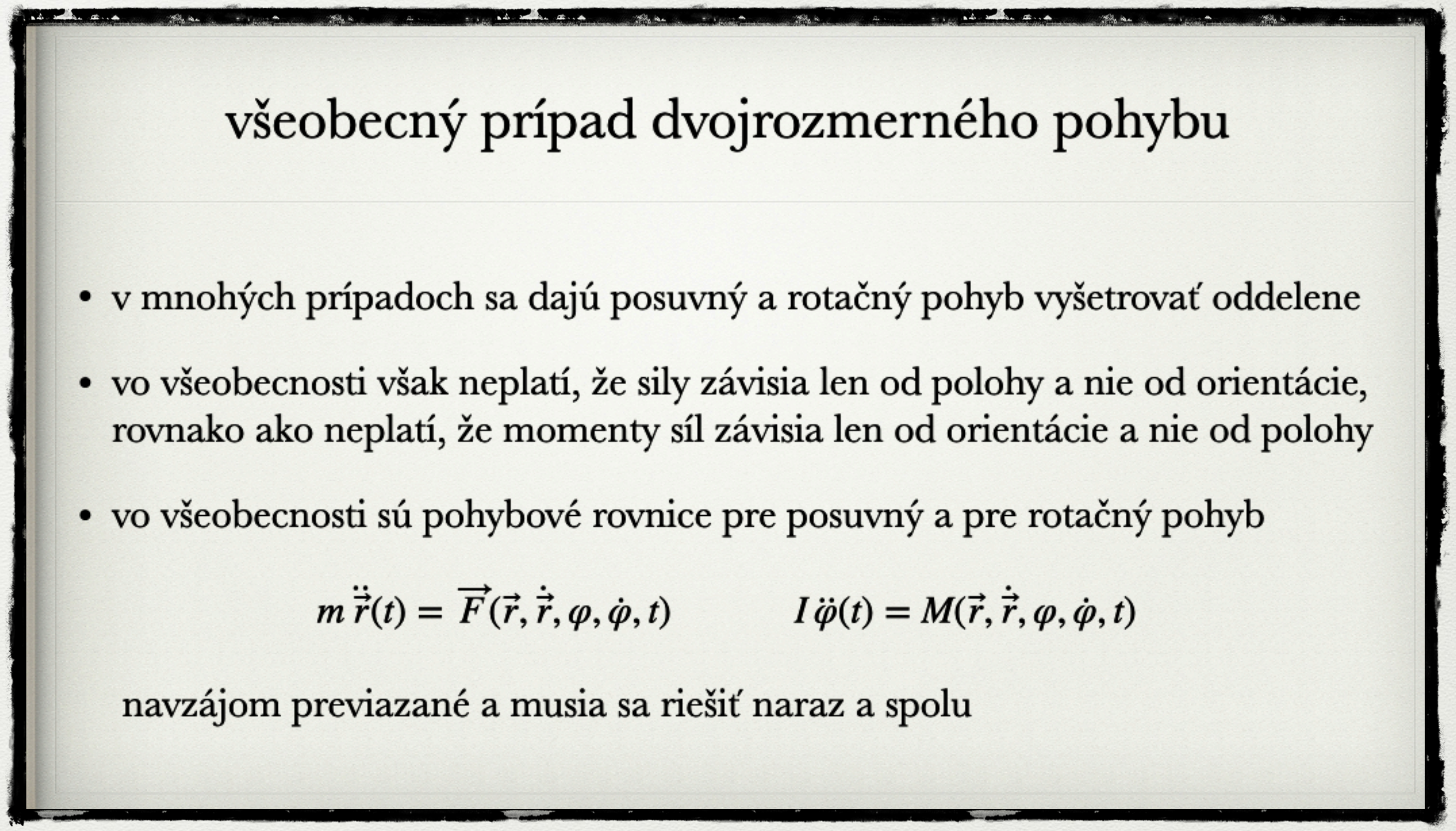
pohyb tuhého telesa s jedným upevneným bodom

špeciálny prípad dvojrozmerného pohybu

- na minulej prednáške sme vyšetrovali rovnováhu tuhých telies upevnených aspoň v jednom bode, teraz vyšetríme pohyb takýchto telies

- všeobecný pohyb 2D tuhého telesa vyšetrujeme ako pohyb referenčného bodu a ako rotáciu okolo tohto bodu

- ak je jeden z bodov telesa upevnený, potom je práve tento bod najlepším výberom referenčného bodu



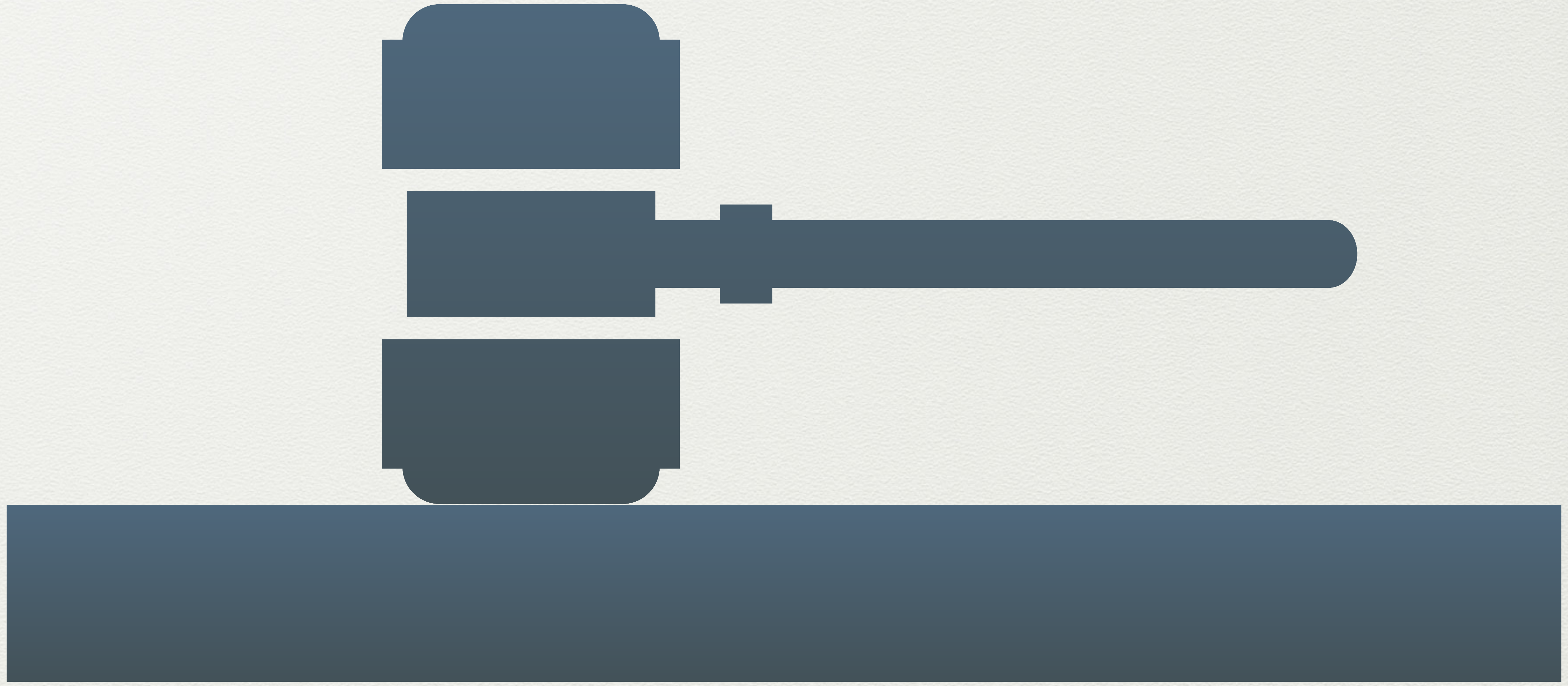
ak je teleso upevnené v jednom bode, zostane nám z dvoch rovníc na riešenie len jedna

upevnený bod ako referenčný bod

- upevnený bod po prvý raz:
  pre upevnený bod nemusíme riešiť pohybovú rovnicu, pretože riešenie poznáme: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0$

- upevnený bod po druhý raz:
  moment sily upevnenia vzhľadom k bodu upevnenia je nulový (keďže je nulové rameno tejto sily)

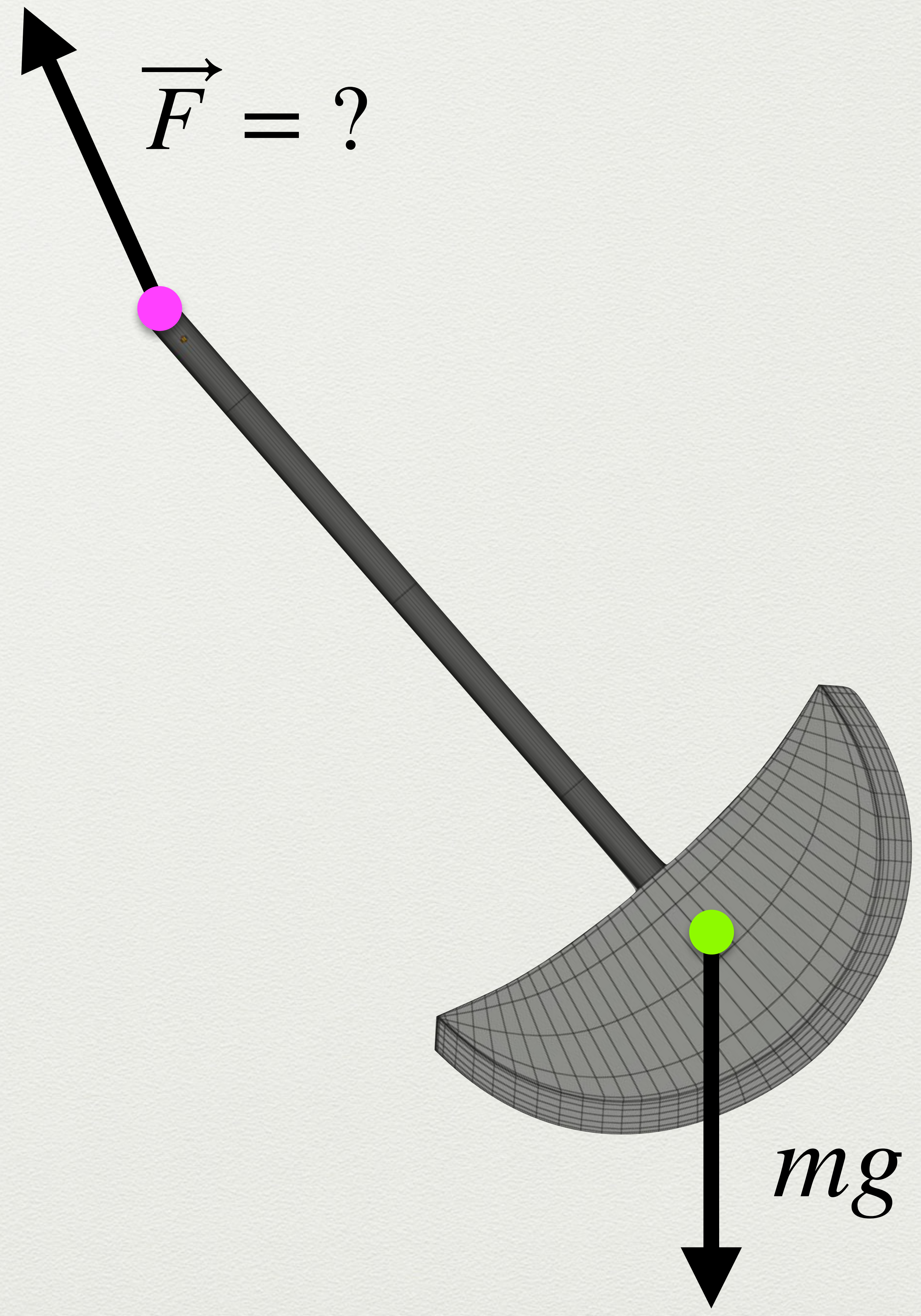
- upevnený bod po tretí raz:
  moment zotrvačnosti vzhľadom k bodu upevnenia (čo je jeden z bodov telesa) sa v čase nemení



- odklepnuté:
  ak je nejaký bod tuhého telesa upevnený, potom ako referenčný bod vystupujúci v pohybových rovniciach berieme práve tento upevnený bod

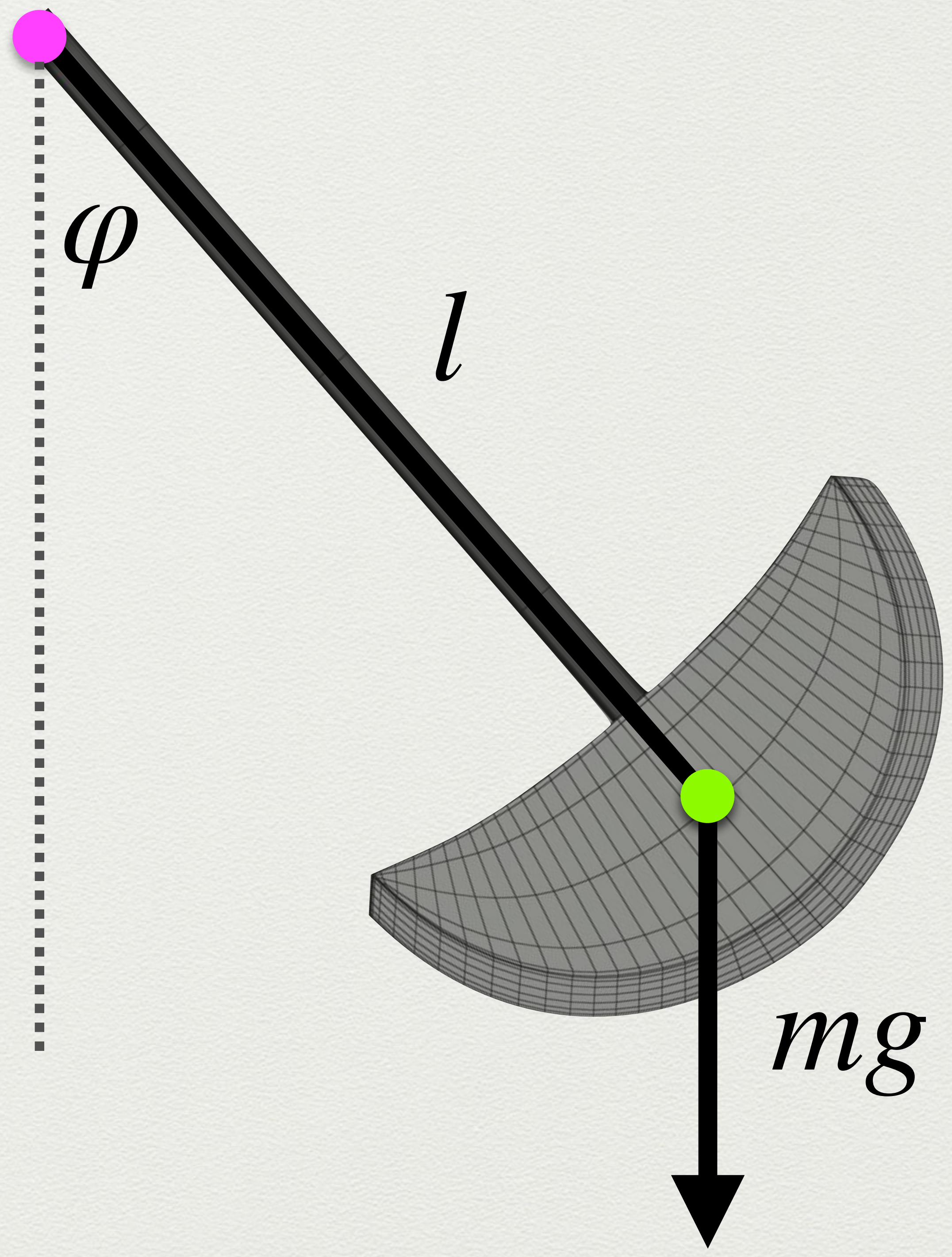
sily pôsobiace na fyzikálne kyvadlo

- na fyzikálne kyvadlo (t.j. teleso zavesené v gravitačnom poli) pôsobia dve sily: gravitačná a nejaká sila v bode závesu
- sila v bode závesu zabezpečí, že bod upevnenia sa nezačne pohybovať
- túto silu nepoznáme, ale jej moment vzhľadom k bodu závesu poznáme: je nulový
- výsledná gravitačná sila má veľkosť *mg* a moment tejto sily je taký, ako keby pôsobila v hmotnom strede telesa



pohybová rovnica pre kyvadlo

- φ je uhol od vertikály meraný v kladnom smere (proti smeru chodu hodinových ručičiek)
- I je moment zotrvačnosti vzhľadom k bodu závesu
- l je vzdialenosť hmotného stredu od bodu závesu
- moment gravitačnej sily vzhľadom k bodu závesu:
$$M = -mgl\sin\varphi$$
(premyslite si, prečo je tam záporné znamienko)
- pohybová rovnica je nelineárna diferenciálna rovnica:



$$\boxed{I\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi}$$

poznámka: dvojramenné váhy

- dvojramenné váhy sú vlastne kyvadlo, pri ktorom nás nezaujíma jeho pohyb, ale jeho rovnováha

- rovnováha (čiže nepohyb) nastáva vtedy, keď je moment sily nulový – vtedy je nulové uhlové zrýchlenie, a ak bola nulová počiatočná rýchlosť, tak sa uhol v čase nemení

- moment výslednej gravitačnej sily je nulový, ak je uhol φ nulový – a ten je nulový vtedy, ak pôsobisko gravitačnej sily (hmotný stred) leží na zvislej priamke prechádzajúcej bodom upevnenia (uvedomte si, že obrázok zodpovedá uhlu $\varphi = 0$)

hmotný stred váh leží
pod bodom upevnenia
len pri jednom sklone váh

malé kmity fyzikálneho kyvadla

- pod malými kmitmi sa myslia kmity s uhlom φ do $5°$ (zhruba 0.1 rad)
- $\sin 0.1 = 0.0998$ a pre menšie uhly platí $\sin \varphi \approx \varphi$ s ešte lepšou presnosťou
- pre malé kmity ($\varphi \leq 5°$) teda dostávame približnú rovnicu $I\ddot{\varphi} = -mgl\varphi$
- toto už je lineárna diferenciálna rovnica, ktorú vieme riešiť
- navyše je to dôverne známa rovnica LHO, ktorú už máme vyriešenú
- nič iné sa ani nedalo čakať – všetko v okolí stabilnej rovnováhy je LHO

rovnaká rovnica
rovnaké riešenie

- riešením pohybovej rovnice LHO $m\ddot{x} + kx = 0$ je $x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$ kde $\omega = \sqrt{k/m}$ a konštanty A, α sa určia z počiatočných podmienok

- riešením pohybovej rovnice kyvadla $I\ddot{\varphi} + mgl\varphi = 0$ je $\varphi(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$ kde $\omega = \sqrt{mgl/I}$ a konštanty A, α sa určia z počiatočných podmienok

- vybavené, nič nové tu nie je

pohyb telesa na ktoré pôsobí sila $F = -kx$

- pohybová rovnica: $m\,.\,\ddot{x}(t) = -k\,.\,x(t)$ respektíve $m\,.\,\ddot{x}(t) + k\,.\,x(t) = 0$
- je to lineárna dif. rovnica s konšt. koef. a s nulovou pravou stranou
- recept na riešenie týchto rovníc poznáme: riešenie hľadaj v tvare $e^{\alpha t}$
- dosadením do rovnice dostaneme: $m\alpha^2 + k = 0$
- riešenie: $\alpha = \sqrt{-\frac{k}{m}}$ odmocnina zo záporného čísla, čo s tým?
- pripomienka : $i^2 = -1$ $\alpha = \sqrt{-\frac{k}{m}} = \sqrt{-1}\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega$ kde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

nepovinná, ale užitočná domáca úloha

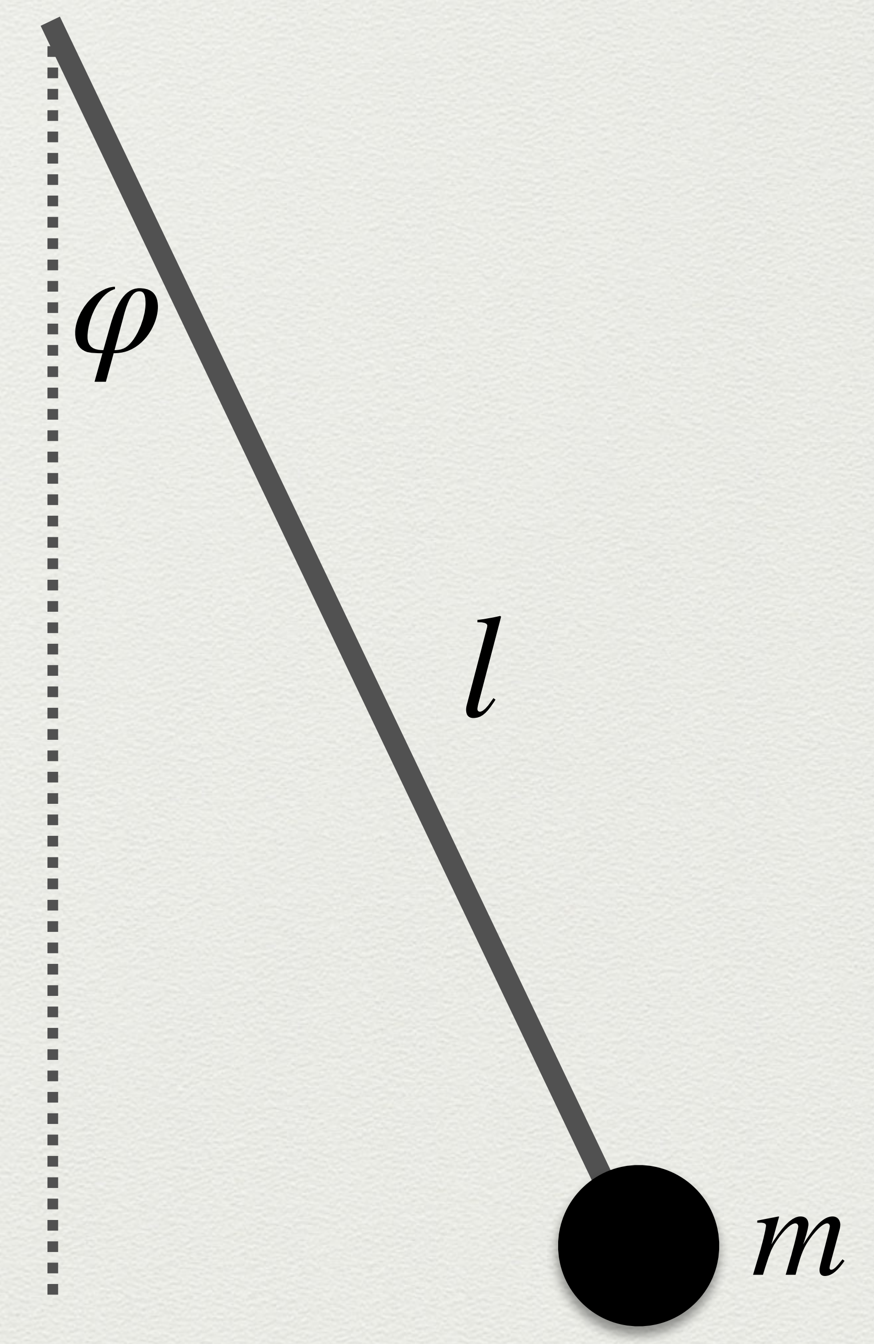
- ukážte, že naše riešenie sa dá napísať aj v tvare $x(t) = a\cos(\omega t + \varphi)$
- vyjadrite konštanty a, φ zo zadaných počiatočných podmienok
- pomocou pythonu alebo iného programu nakreslite pre rôzne hodnoty parametrov m, k, x_0, v_0 grafy závislostí polohy a rýchlosti od času
- napíšte a vyriešte pohybovú rovnicu pre lineárny harmonický oscilátor, ktorého rovnovážna poloha nie je v bode $x = 0$, ale v bode $x = l$

poznámka
o matematickom kyvadle

- teliesku na špagátiku alebo na tyčke (ktoré majú zanedbateľnú hmotnosť) sa hovorí matematické kyvadlo

- matematické kyvadlo môžeme chápať buď ako hmotný bod alebo ako tuhé teleso, pre ktoré $I = ml^2$ (prečo?)

- matematické kyvadlo je zároveň fyzikálnym kyvadlom, takže pre jeho malé kmity platí $\varphi(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$ kde $\omega = \sqrt{g/l}$



veľké kmity fyzikálneho kyvadla

- ak chceme zistiť, ako vyzerajú väčšie kmity fyzikálneho kyvadla, musíme sa naučiť riešiť nelineárnu diferenciálnu rovnicu $I\,\ddot{\varphi}(t) = -\,mgl\sin\varphi(t)$

- kvôli tejto rovnici je dobré oprášiť starú dobrú metódu "krok za krokom"

- zopakujme si, čo je jadrom tejto metódy:

- uhlové zrýchlenie v n-tom kroku $\quad \varepsilon_n = -\,mgl/I\ \sin\varphi_n$

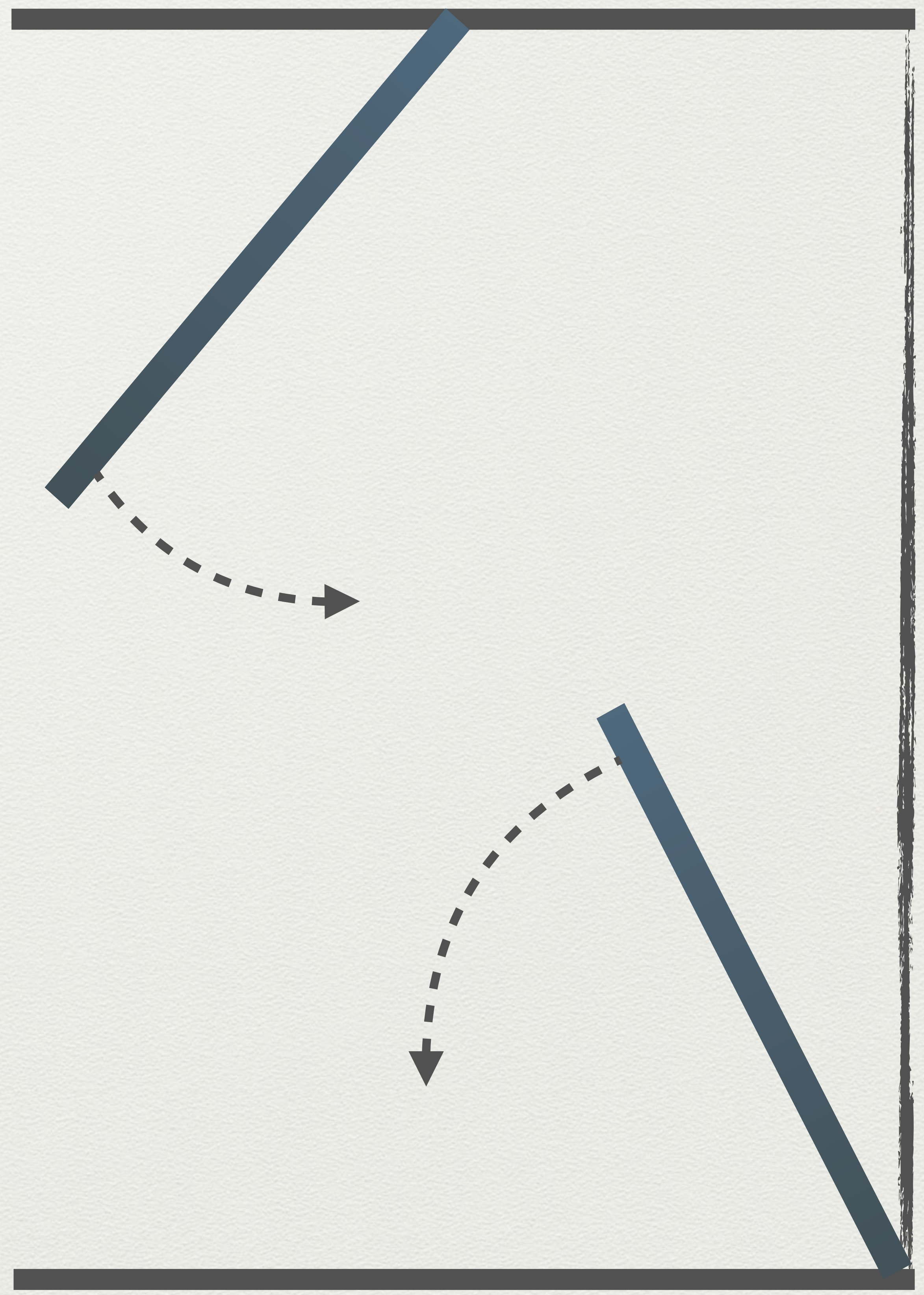
- základný (dookola opakovaný) krok

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \omega_n\,.\,dt$$
$$\omega_{n+1} = \omega_n + \varepsilon_n\,.\,dt$$

skúsme napríklad takéto otázky

metóda krok za krokom nám umožní odpovedať na takéto otázky:

- ako sa líši frekvencia veľkých kmitov konkrétneho fyzikálneho kyvadla od frekvencie jeho malých kmitov?
- ako dlho padá rebrík, ktorého spodný koniec je opretý o stenu?
- ako padá rebrík, ktorý je opretý len o podlahu (stena tam nie je)?



$L = 2\ m$ dĺžka homogénnej tyče

$m = 12\ kg$ hmotnosť tyče

$l = 1\ m$ hmotný stred od bodu závesu

$I = 16\ kg\, m^2$ moment zotrvačnosti

$g = 10\ m\, s^{-2}$

$\varphi_0 = \pi/2$ počiatočná výchylka

$\omega_0 = 0$ počiatočná rýchlosť

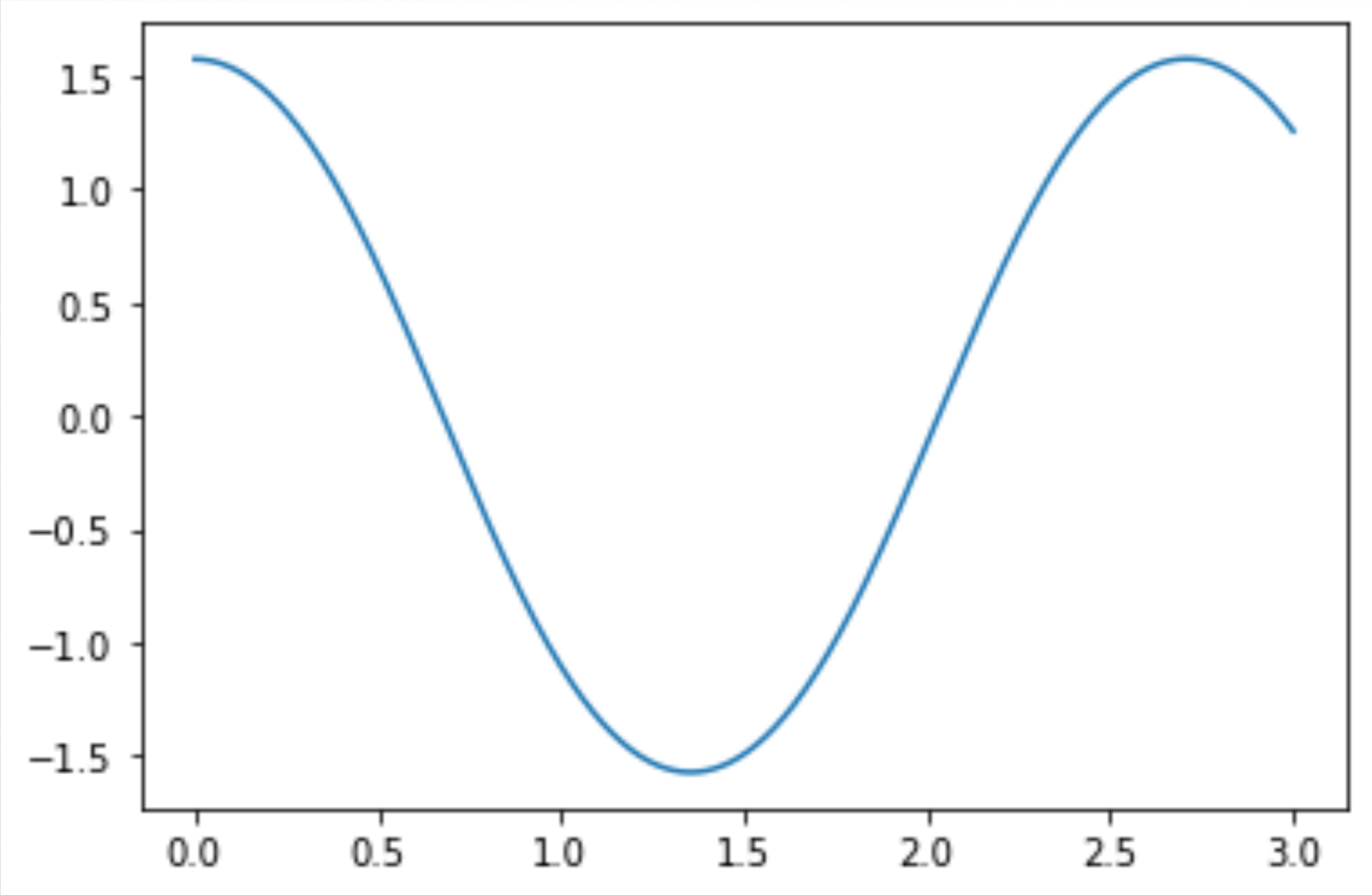
$$\varepsilon_n = -\, mgl/I\ \sin\varphi_n$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \omega_n\, .\, dt$$

$$\omega_{n+1} = \omega_n + \varepsilon_n\, .\, dt$$

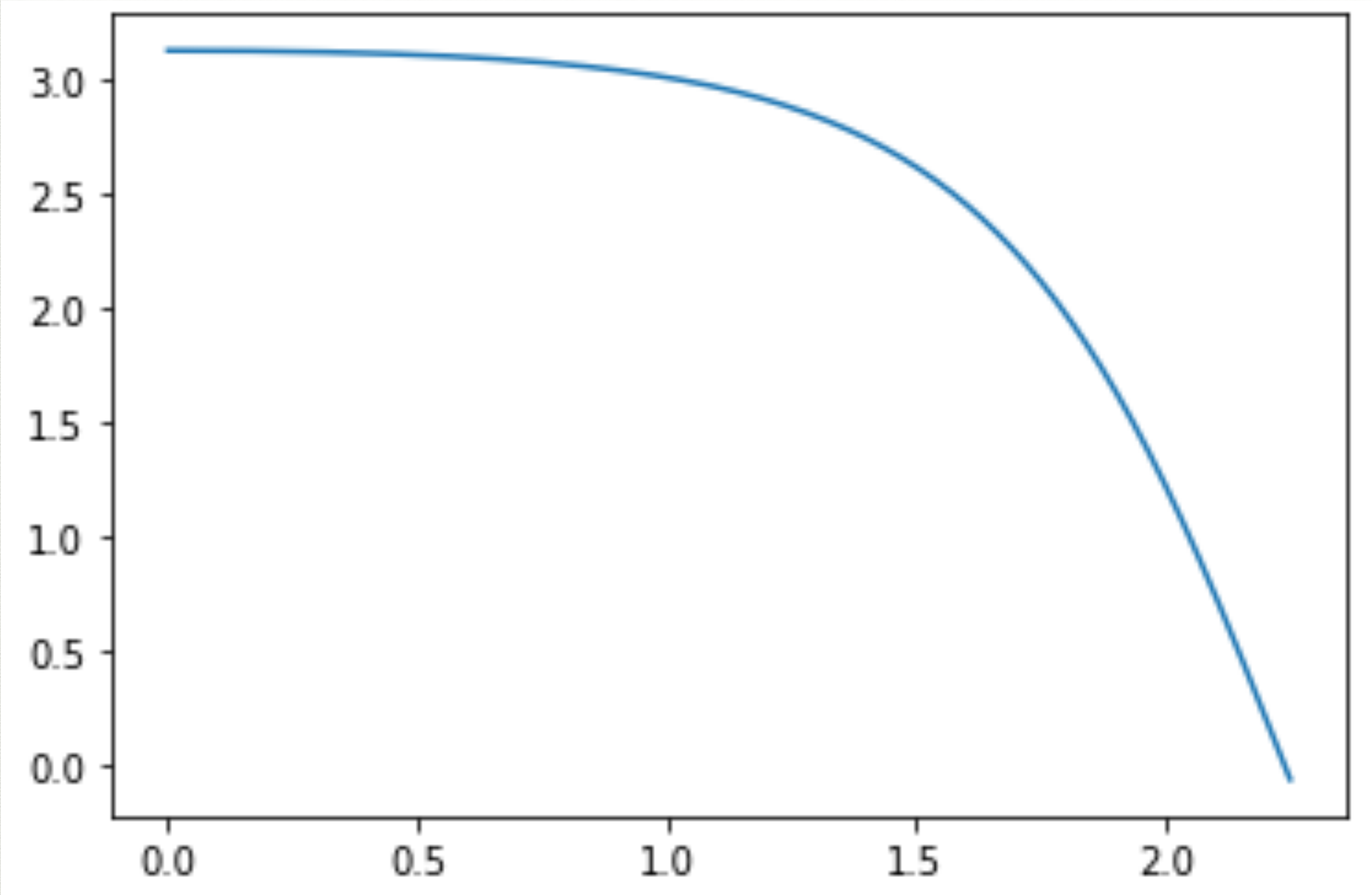
```
from pylab import *
from numpy import *

dt=0.0001
N=30000

t=empty(N+1)
phi=empty(N+1)
omega=empty(N+1)
epsilon=empty(N+1)

m = 12.
l = 1.
I = 16.
g = 10.

t[0]=0
phi[0]=pi/2
omega[0] = 0.

for n in range(0,N):
    epsilon[n] = - m*g*l*sin(phi[n])/I
    t[n+1]=t[n]+dt
    phi[n+1]=phi[n]+omega[n]*dt
    omega[n+1]=omega[n]+epsilon[n]*dt

    if abs(omega[n+1])<0.001: print(t[n+1])

plot(t,phi)
```

kmity s počiatočnou výchylkou 90°



- perióda kmitov: $T = 2.7\,s$
- pre malé kmity: $T = 2.3\,s$
- nepovinná domáca úloha: vyšetriť závislosť periódy od amlitúdy
- ak je $\varphi_0 > \pi/2$ a pohyb skúmame len po $\varphi = \pi/2$, tak vlastne vyšetrujeme pád tyče respektíve dosky či rebríka

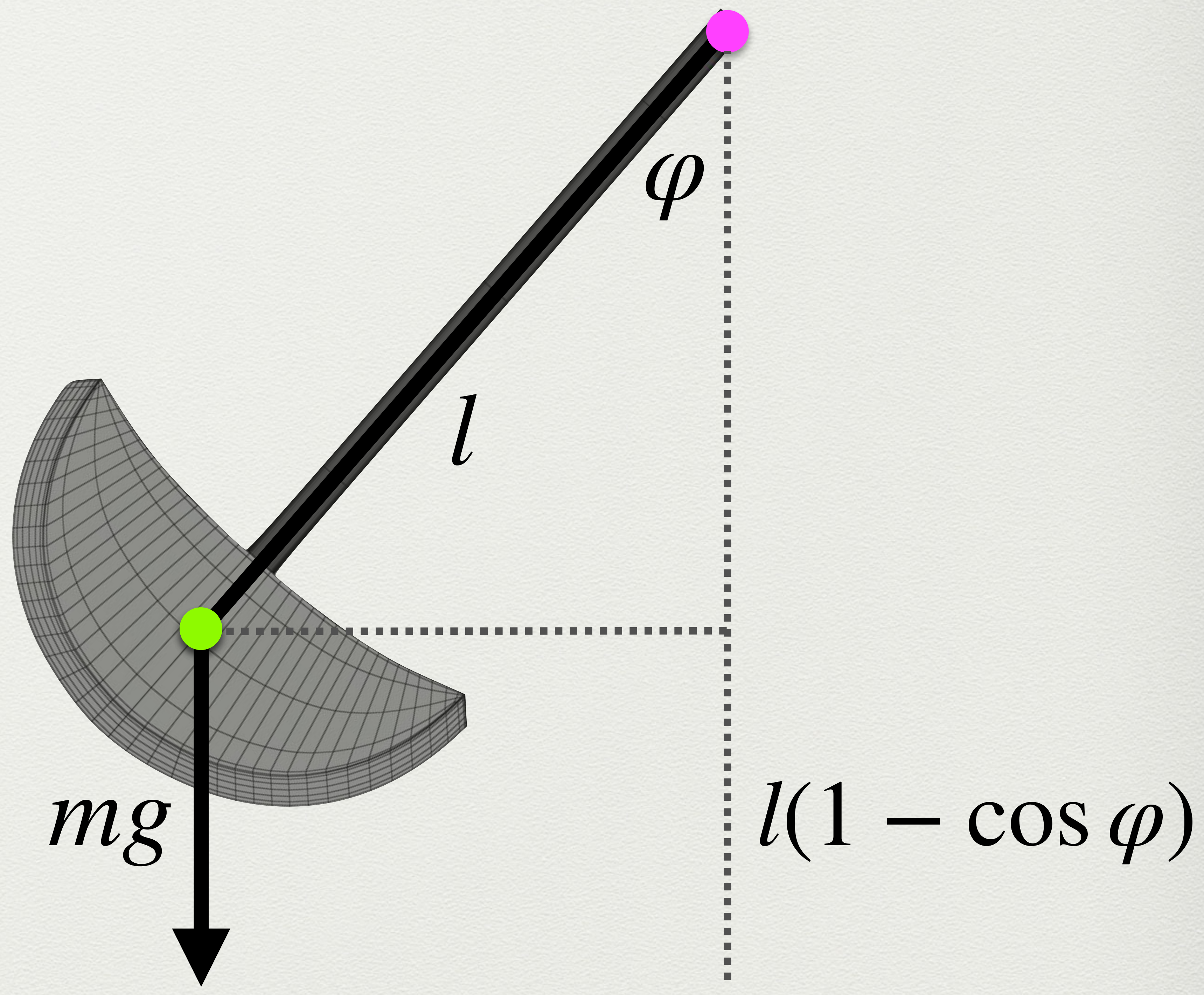
pád s počiatočnou výchylkou 179°



- doba pádu: $t = 2.24\,s$
- pre voľný pád: $t = 0.63\,s$
  ($t = \sqrt{2h/g}$ pre výšku $h = 2\,m$)
- padajúce tyče sa vyskytujú zhruba rovnako často, ako padajúce poháre
- vzorec pre dobu voľného pádu sa skúša už na strednej škole, na dobu pádu tyče sa nás nikto nepýta
  (čo je škoda, lebo ho vieme vypočítať)

zákon zachovania energie

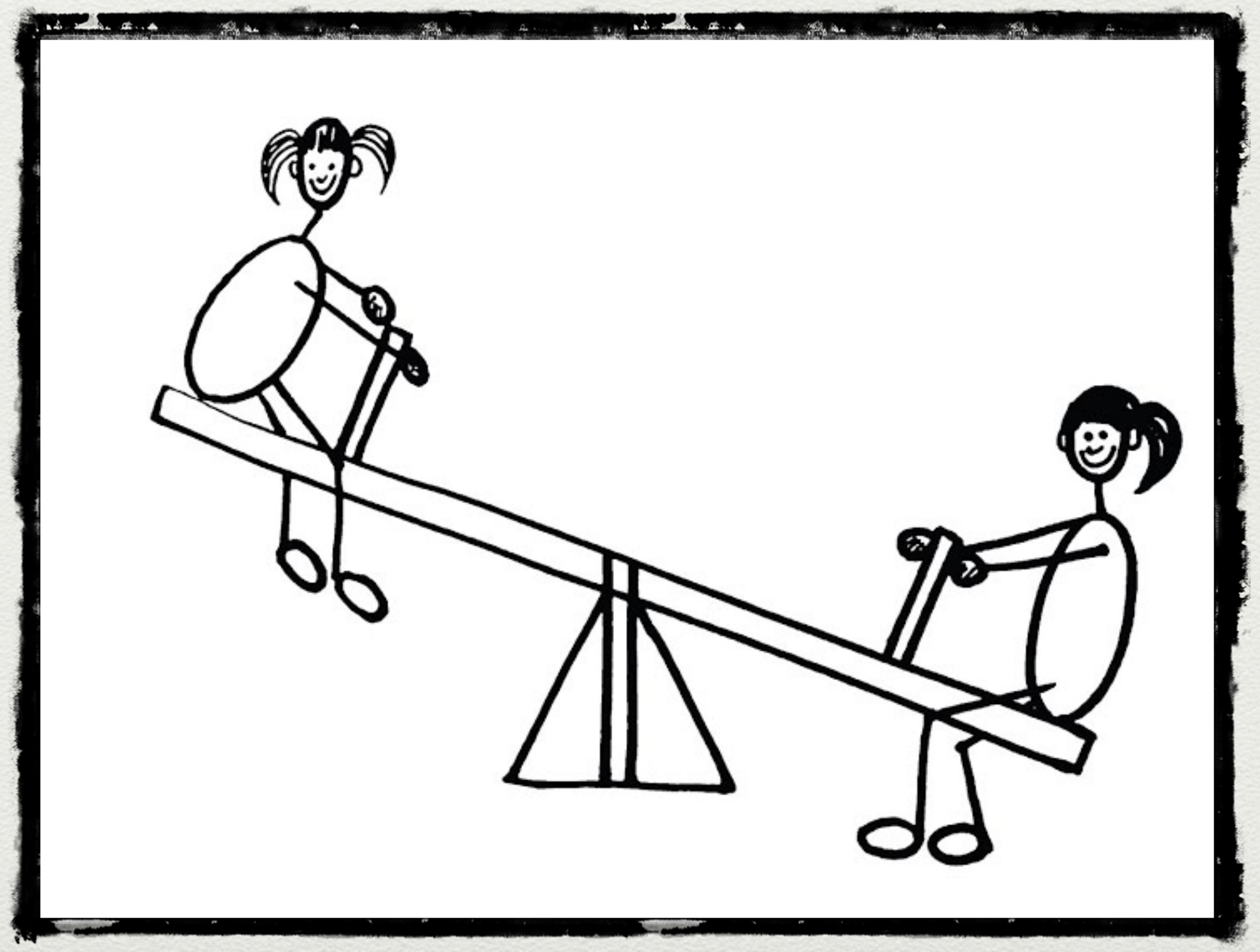
- ak nevieme presne riešiť pohybovú rovnicu, môžeme sa všeličo dozvedieť o jej riešeniach zo zákonov zachovania
- kinetická energia kyvadla: $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$
- potenciálna energia gravitačnej sily: $E_p = mgl(1 - \cos\varphi)$
- potenciálna energia sily závesu: $E'_p = 0$
  (nijaké premiestnenie, nijaká práca)
- zákon zachovania energie: $\frac{1}{2} I\omega^2 + mgl(1 - \cos\varphi) = E$
- závislosť $\omega = \dot{\varphi}$ od φ: $\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2}{I}\left(E - mgl(1 - \cos\varphi)\right)}$



ZZE nám dáva diferenciálnu rovnicu prvého rádu

poznámka k hojdačkám

- fyzikálne kyvadlo pripomína hojdačky z detských ihrísk
- ale je tu jeden významný rozdiel:
  hojdačka v skutočnosti nie je tuhé teleso
  (deti sa na hojdačke hýbu a menia svoj tvar)
- tvar sa ale zvykne prudko meniť len v bodoch obratu,
  čiže hojdačku môžeme modelovať ako tuhé teleso, ktoré
  v bodoch obratu mení svoj moment zotrvačnosti
- ak by sa tvar nemenil takmer skokom, ale skôr spojito,
  moc by sme si s mechanikou tuhého telesa nepomohli
  (pomalé zmeny tvaru by sme síce mohli modelovať
  meniacim sa momentom zotrvačnosti – to už by ale bola
  mechanika tuhého telesa použitá pre netuhé teleso)



nepovinná domáca úloha na záver

- pre hojdačku typu swing odhadnite moment zotrvačnosti hojdačky s dieťaťom sediacim v dvoch typických polohách
- pre hojdačku typu see-saw odhadnite moment zotrvačnosti hojdačky s dvomi deťmi sediacimi v dvoch typických polohách
- napíšte program pre numerické riešenie (krok za krokom) pohybových rovníc týchto hojdačiek založený na modelovom predpoklade, že moment zotrvačnosti sa mení skokom v bode obratu
- porovnajte výsledky s tým, čo sa dá vidieť (odmerať) na detskom ihrisku