KOLO, KOLO ~~mlynské~~
časť prvá: koleso

pohyb tuhého telesa bez upevneného bodu

mechanika 32

pohyb kolesa

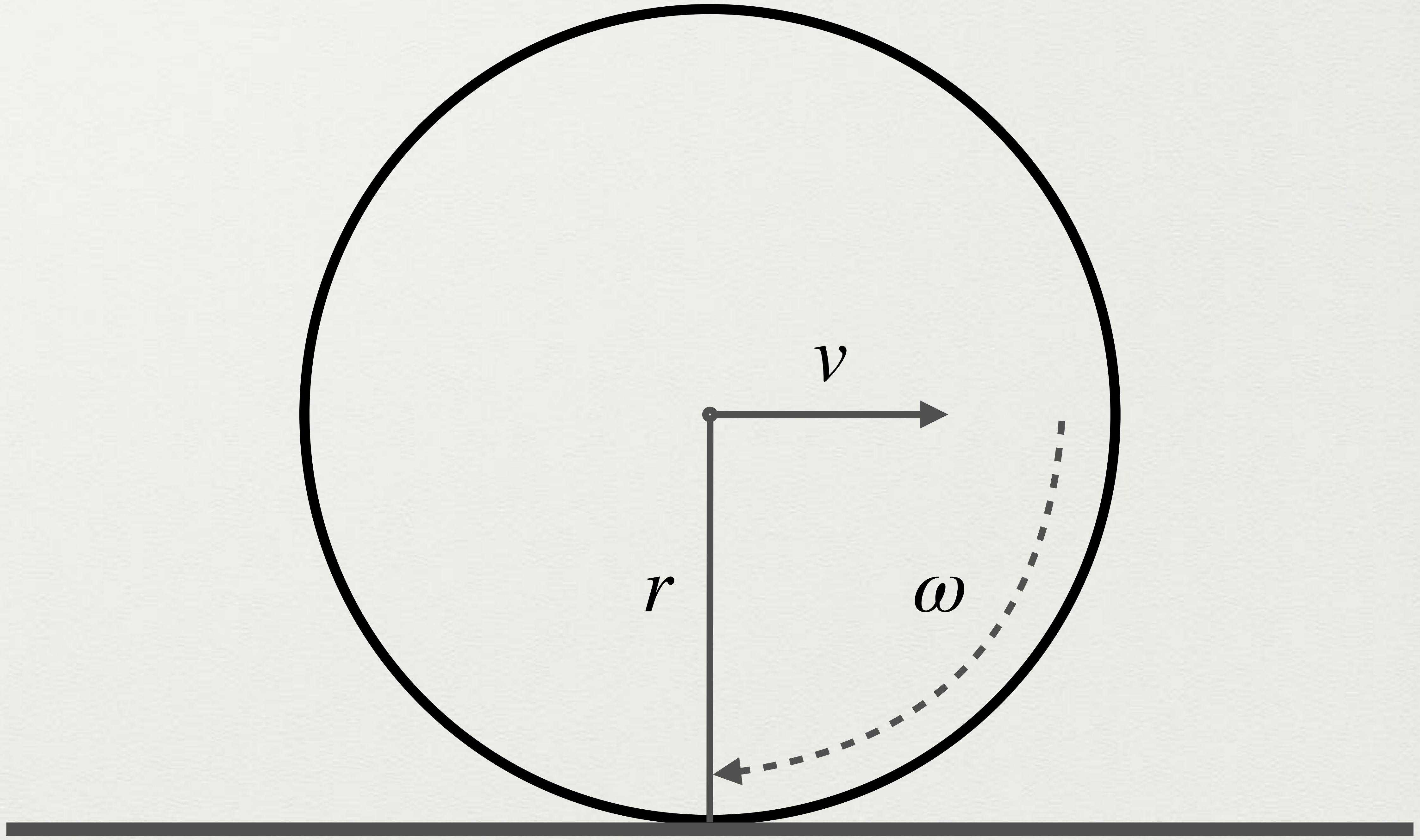
- vzhľadom k tomu, akým dôležitým vynálezom je koleso, sa mu na základnej a strednej škole venuje na fyzike prekvapujúco málo času
- v tejto prednáške sa to pokúsime napraviť tým, že preskúmame pohyb kolesa po rovnej ceste (ako príklad pohybu neupevneného tuhého telesa)
- v ďalšej prednáške potom preskúmame pohyb kladky, t.j. sústavy telies, z ktorých jedno je koleso upevnené v jednom bode

valivý pohyb

- valivý pohyb kolesa je pohyb bez šmyku, t.j. pohyb, pri ktorom sa bod kolesa dotýkajúci podložky vzhľadom k podložke nepohybuje

- koleso s polomerom r a uhlovou rýchlosťou ω: body na jeho obvode sa pohybujú rýchlosťou, ktorej veľkosť je $|\omega|r$ (absolútna hodnota preto, lebo ω môže byť aj záporné, ako je na obrázku)

- ak sa stred kolesa hýbe vzhľadom k podložke rýchlosťou v, jeho spodný bod sa vzhľadom k podložke nehýbe práve vtedy, keď $\boxed{v = -\omega r}$



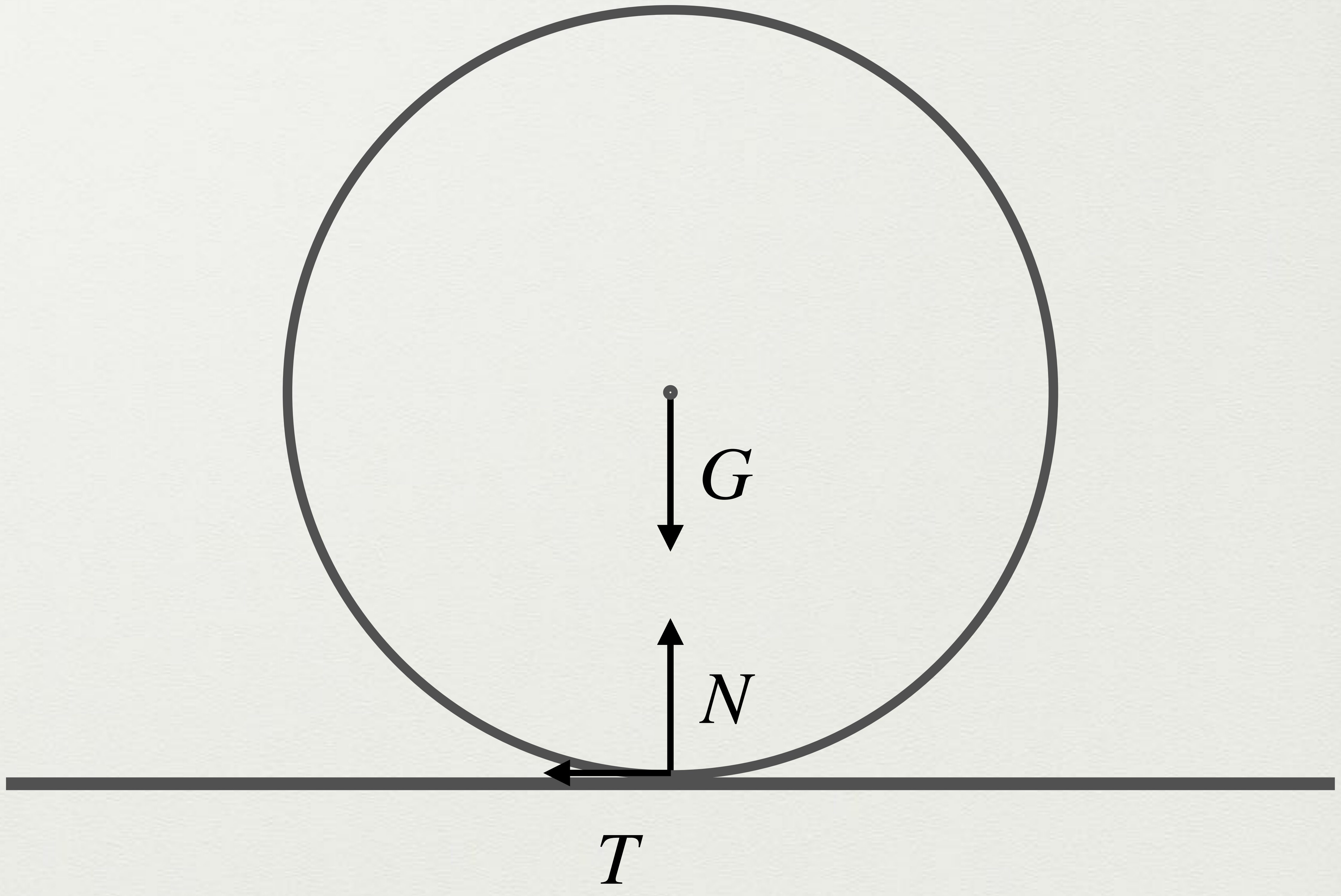
sily pôsobiace na koleso

- vertikálne sily: jednak gravitačná sila G, ktorou pôsobí na koleso Zem, a jednak sila N, ktorou pôsobí na koleso podložka (pomerne často sa nesprávne hovorí, že ide o sily akcie a reakcie)

- horizontálne sily: pokiaľ nepôsobí nič iné, tak jedinou horizontálnou silou je trenie

- ak sa koleso valí, jeho spodný bod sa v mieste dotyku vzhľadom k podložke nepohybuje, takže ide o statické trenie

- veľkosť sily statického trenia je $\boxed{|T| \leq f_s N}$



poznámka o silách akcie a reakcie

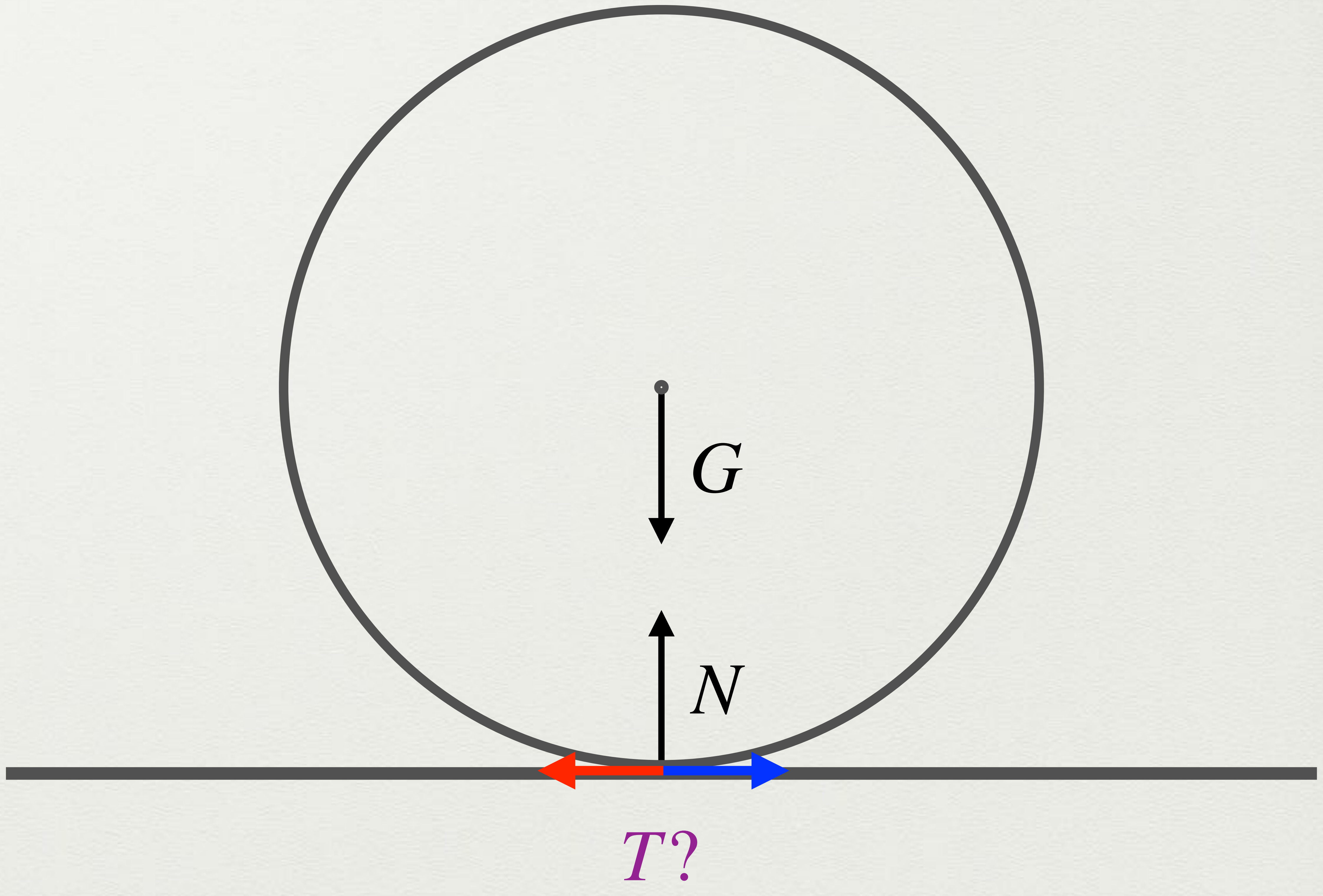
- ak teleso podoprieme alebo zavesíme, potom sily pružnosti v telese a v podpere či závese dajú takú výslednú silu, aby sa v zvislom smere nekonal nijaký pohyb
- často sa hovorí, že je to vďaka zákonu akcie a reakcie, ale to je nesprávne
- v hre sú totiž štyri sily: 1. gravitačná sila, ktorou pôsobí Zem na teleso 2. gravitačná sila, ktorou pôsobí teleso na Zem 3. dotyková sila, ktorou pôsobí podpera či záves na teleso (ide o dôsledok pružnosti, čo je dôsledok elmag síl) 4. dotyková sila, ktorou pôsobí teleso na podperu či záves
- 1 a 2 sú akcia-reakcia, 3 a 4 sú akcia-reakcia, 1 a 3 nie sú akcia-reakcia (napriek tomu, že 1 a 3 sú rovnako veľké a opačne orientované)

paradox valiaceho sa kolesa

- ak statické trenie pôsobí v smere opačnom ako je smer rýchlosti, potom rýchlosť klesá, ale uhlová rýchlosť sa zväčšuje, čiže koleso sa prestane valiť (začne sa prešmykovať)

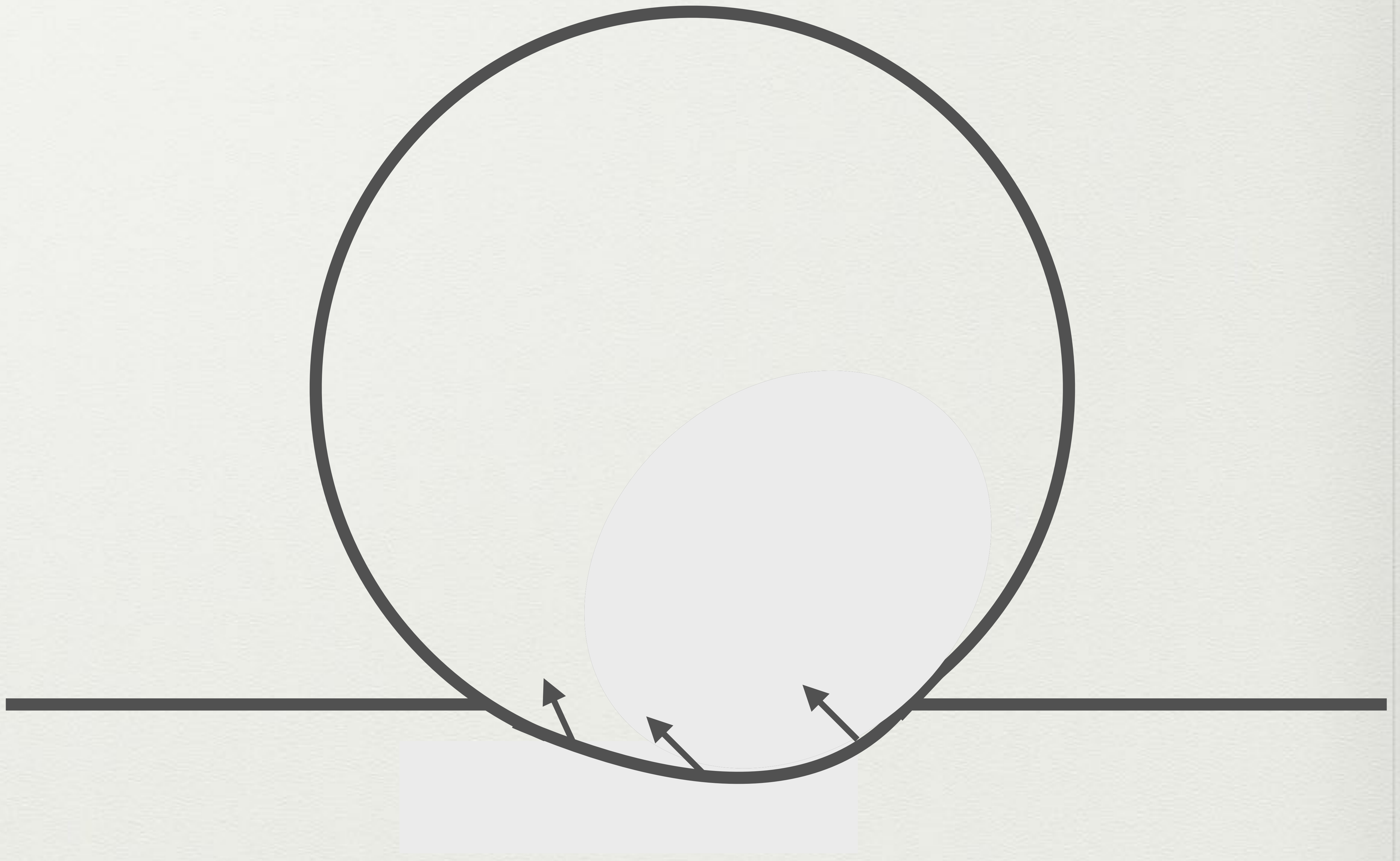
- ak statické trenie pôsobí v rovnakom smere ako je smer rýchlosti, potom rýchlosť rastie, ale uhlová rýchlosť klesá, čiže koleso sa prestane valiť (opäť sa začne prešmykovať)

- čiže ak sa má koleso valiť, statické trenie musí byť nulové, lenže vtedy sa koleso valí bez zmeny rýchlosti donekonečna **(???)**



kde je pes zakopaný?

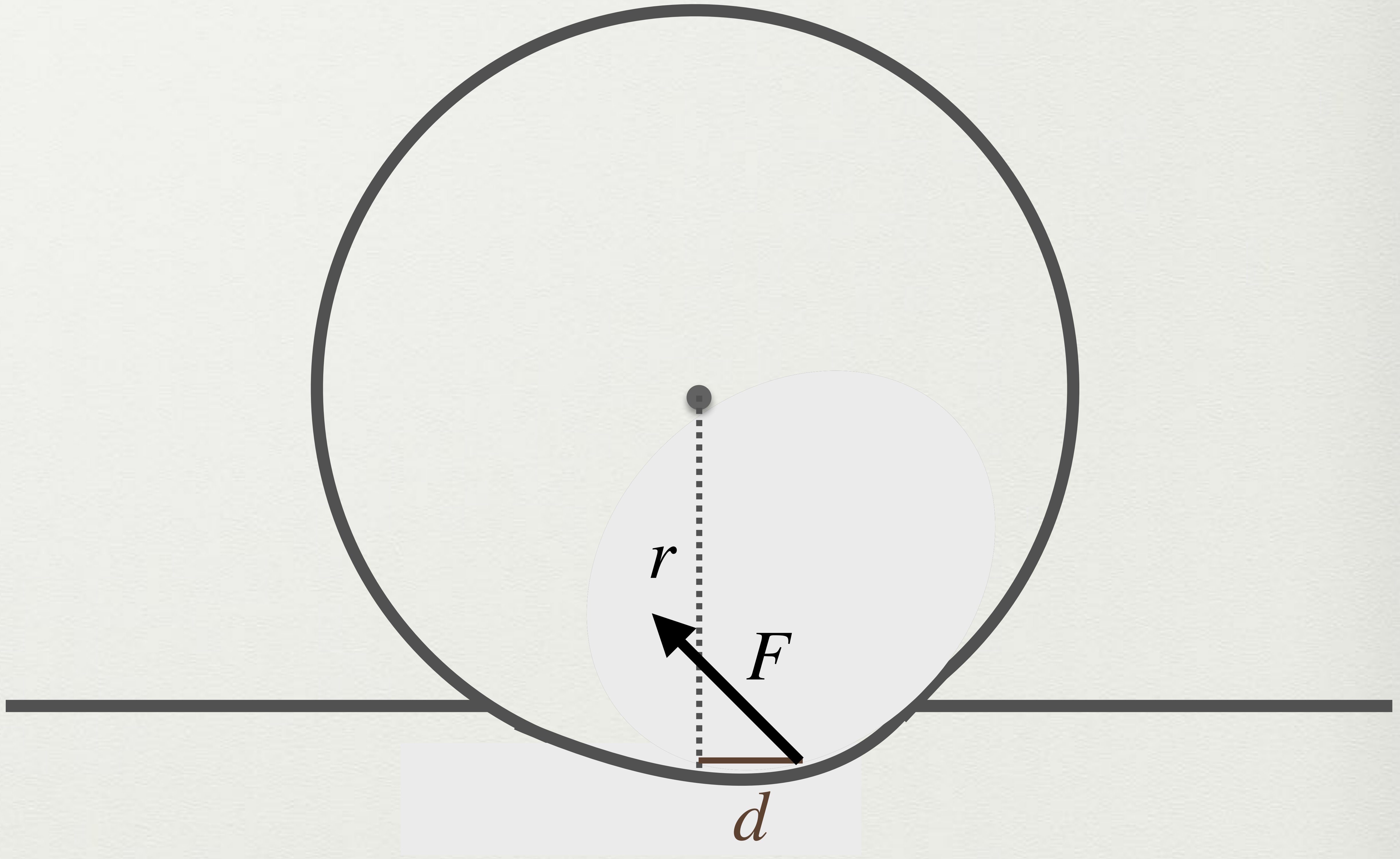
- v bode dotyku, ktorý nie je bodom dotyku
- v skutočnosti sa koleso aj podložka deformujú, takže sa dotýkajú v nejakej oblasti obsahujúcej (nekonečne) veľa bodov
- sily od podložky pôsobia na koleso vo všetkých týchto bodoch a ak ich chceme nahradiť jednou výslednou silou, musíme ju umiestniť tak, aby bol jej moment rovný výslednému momentu síl pôsobiacich v jednotlivých bodoch dotyku
- kľúčová otázka: do ktorého bodu treba umiestniť výslednú silu, ktorou pôsobí na koleso podložka?



značne prehnaný ilustračný obrázok

správne pôsobisko sily od podložky

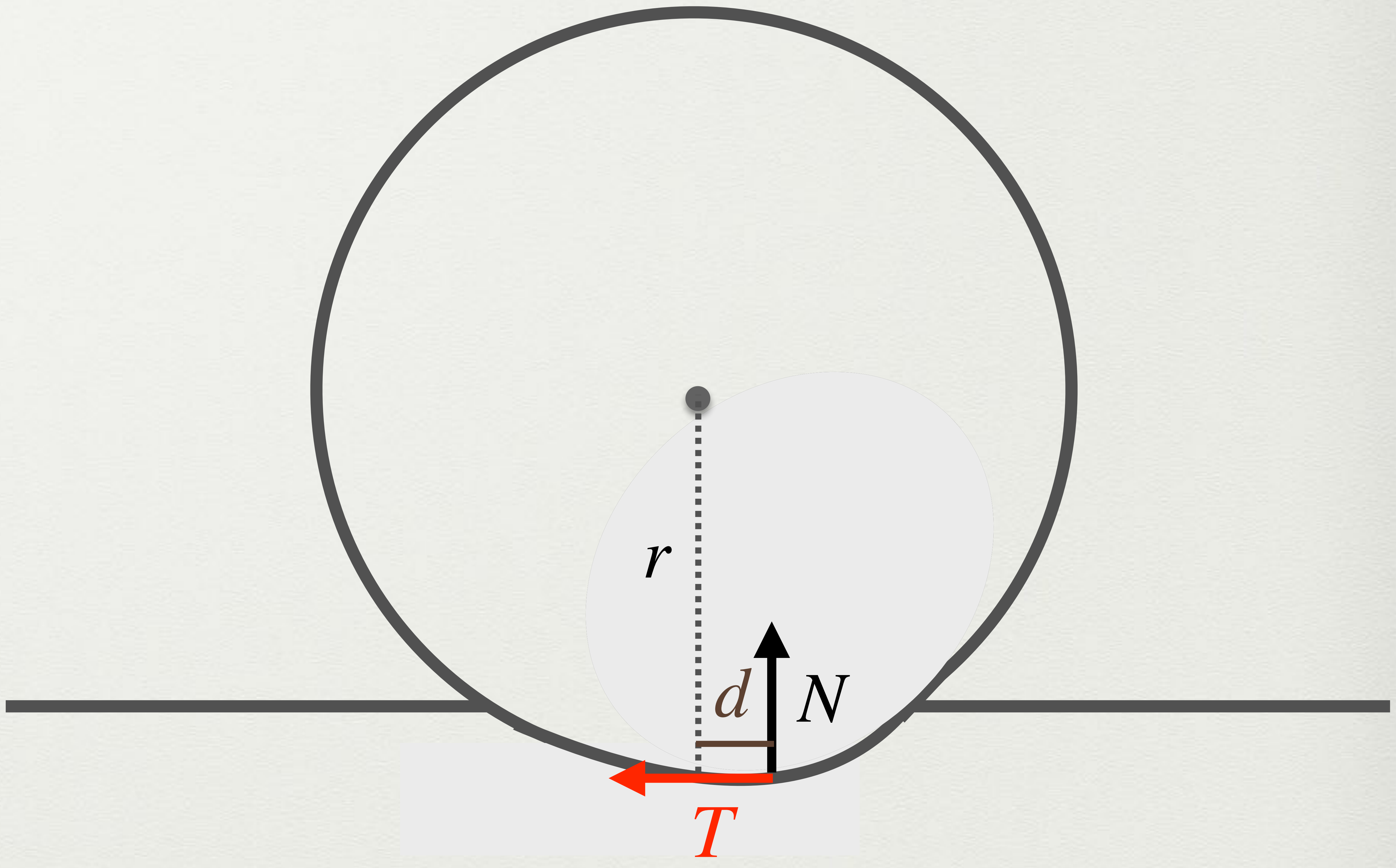
- pôsobisko neleží presne pod stredom kolesa (celá situácia je vďaka pohybu nesymetrická)
- pri malej deformácii kolesa aj podložky sa vertikálna vzdialenosť pôsobiska výslednej sily od hmotného stredu kolesa takmer nelíši od *r*
- ale aj celkom malá horizontálna vzdialenosť *d* pôsobiska od hmotného stredu sa významne líši od nuly, ktorú sme pôvodne predpokladali
- momenty počítame vzhľadom k hmotnému stredu (už sme si vyjasnili, prečo) a ten leží pre symetrické koleso v geometrickom strede



značne prehnaný ilustračný obrázok

správne momenty síl

- rozložme silu od podložky na zložky T a N (tangenciálnu a normálovú)
- sila T je trecia sila (plus nejaká korekcia od deformačných síl, ktorú budeme zanedbávať)
- moment sily T vzhľadom k stredu kolesa je $M_T = -r\,.\,T$ (plus zanedbateľná korekcia)
- moment sily N vzhľadom k stredu kolesa je $M_N = d\,.\,N$ (čo je nezanedbateľná korekcia k pôvodne nulovému momentu tejto sily)
- moment tiažovej sily vzhľadom k stredu symetrického kolesa je nulový



smer sily T si môžeme zvoliť ako chceme
ak zvolíme "nesprávne", dostaneme záporné T

valivý pohyb ešte raz, tentokrát správne

- horizontálny pohyb $ma = -T$

  vertikálny (ne)pohyb $0 = N - G$

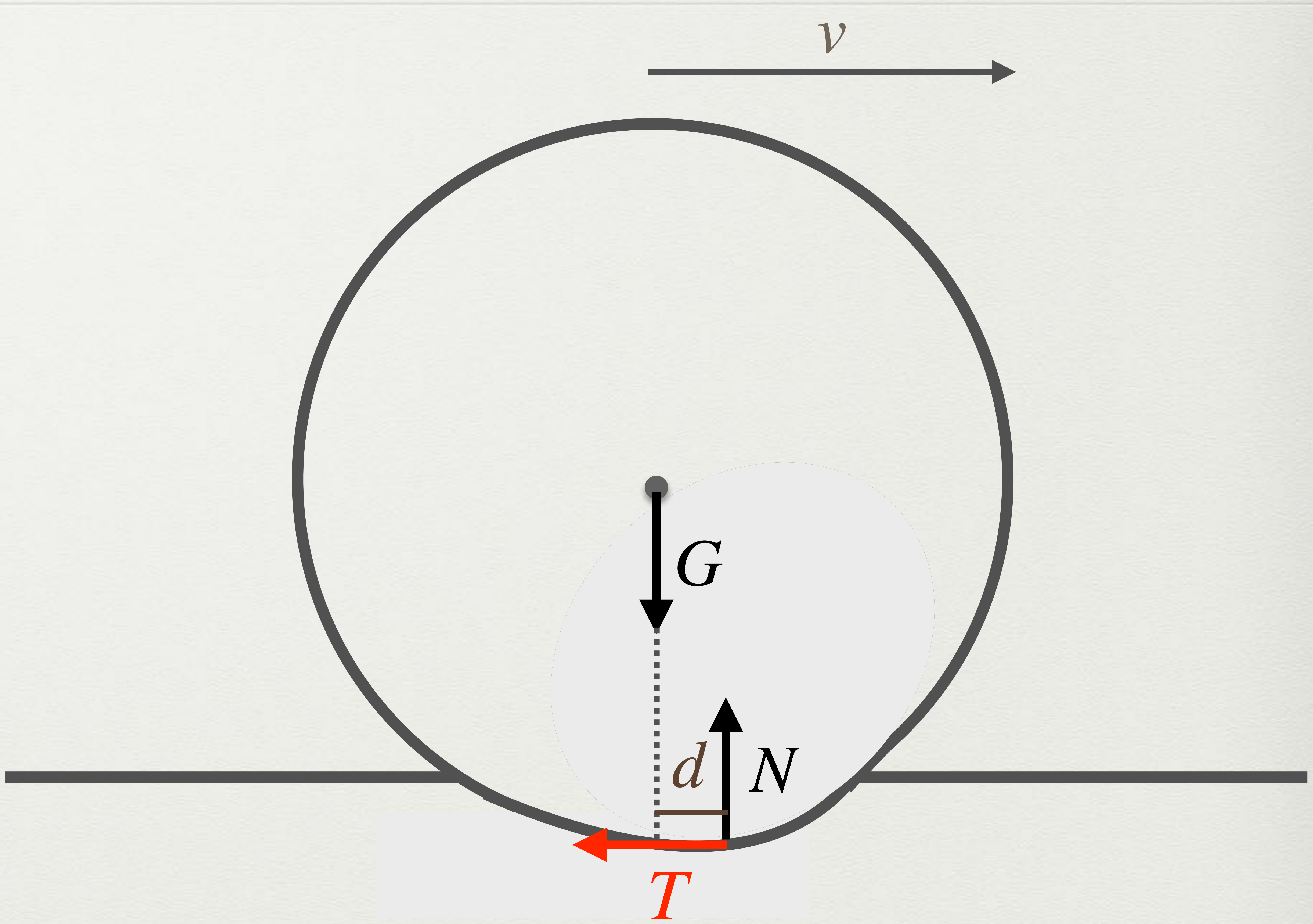
  rotačný pohyb $I\epsilon = -rT + dN$

  valenie $v = -\omega r \Rightarrow a = -\epsilon r$

- z týchto rovníc ľahko nájdeme

$$a = -d\frac{mgr}{I + mr^2}$$

- dostali sme záporné a, čiže koleso spomaľuje (statické trenie T pôsobí naozaj doľava a brzdí pohyb kolesa)



pri správnom použití znamienok znamená záporné a a kladné T že smer sily T sme zvolili "správne"

poznámka o zanedbávaní

- pri deformácii kolesa sa mení jeho tvar a jeho hustota, tieto zmeny sme však nebrali do úvahy (podobne, ako zmenu ramena sily T)
- jediná zmena, ktorú sme brali do úvahy, bola zmena d ramena sily N
- pričom ale nebolo celkom jasné, prečo by práve táto zmena mala byť podstatne väčšia než zmeny, ktoré sme do úvahy nevzali
- a ona v skutočnosti ani nie je rádovo väčšia
- tak prečo sme všetky malé zmeny okrem tejto jednej zanedbali?

opäť raz Taylorov rad

- malé zmeny zanedbávame v porovnaní s pôvodnými hodnotami, čo sa dá len ak sú pôvodné hodnoty oveľa väčšie ako tie zmeny
- lenže rameno sily *N* bolo pôvodne nulové, čo nie je väčšie ako *d*
- zanedbávanie väčšinou nie je nič iné, než nahradenie Taylorovho radu jeho prvým <u>nenulovým</u> členom (prípadne viacerými členmi)
- Taylorov rad všetkých veličín začínal nenulovým členom, iba rad pre rameno sily *N* začínal nulou, preto sme *d* zanedbať nemohli (pod Taylorovým radom tu rozumieme rad v nejakom parametri, ktorým by sme vedeli charakterizovať deformáciu kolesa)

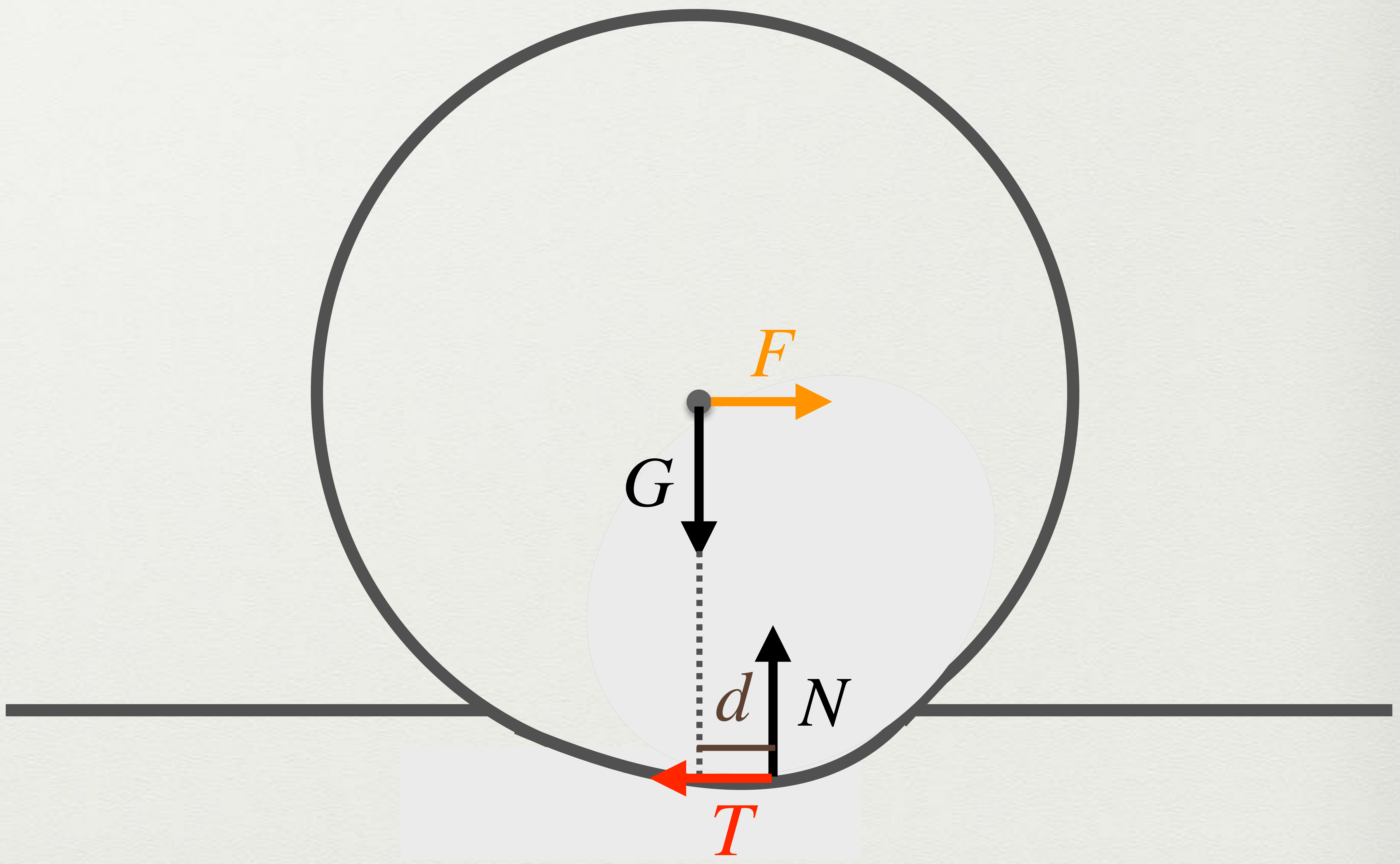
(nepriame) meranie parametra d

- uvažujme koleso idúce s nulovým zrýchlením
- horizontálny pohyb $0 = -T + F$

  vertikálny (ne)pohyb $0 = N - G$

  rotačný pohyb $I\epsilon = -rT + dN$

  rovnomerné valenie $a = -\epsilon r = 0$
- okamžite dostávame $F = T = \frac{d}{r} N$
- ak zmeriame F, N a r, vieme vypočítať d



koeficient valivého trenia

moment valivého trenia

ak sa vo fyzikálnych tabuľkách uvádza koeficient valivého trenia, ktorý má rozmer dĺžky, myslí sa ním parameter d zo vzťahu

$$M = d\,.\,N$$

platného pre moment pri rovnomernom valení

napríklad pre oceľové koleso na oceľovej koľajnici tabuľky uvádzajú $d \approx 0.5\,mm$

častejšie je však uvádzaný iný (bezrozmerný) koeficient valivého trenia

sila valivého trenia

ak sa vo fyzikálnych tabuľkách uvádza bezrozmerný koeficient valivého trenia, myslí sa ním parameter $C\ (= d/r)$ zo vzťahu

$$F = C\,.\,N$$

platného pre silu pri rovnomernom valení

napríklad pre oceľové koleso železničného vozňa na oceľovej koľajnici tabuľky uvádzajú

$$C \approx 0.001$$

zatiaľ čo pre koleso auta na betóne či asfalte

$$C \approx 0.01$$

od čoho závisí parameter d

- ak sú koleso aj podložka dostatočne tvrdé, tak ich deformácia je len malá a d je v podstate konštanta (závislá len od materiálov kolesa a podložky)

- vo všeobecnosti však môže d závisieť od konkrétneho tvaru deformácie a ten môže závisieť od mnohých vecí: od polomeru kolesa r, od zaťaženia N, od rýchlosti v posuvného pohybu

- ak teda budeme v ďalšom pre jednoduchosť uvažovať prípad $d = \mathrm{const}$, budú výsledky pre dostatočne tvrdé materiály pomerne spoľahlivé, zatiaľ čo pre iné materiály budú iba orientačné (ale aj to je často užitočné)

- presnejšie výsledky sa dosiahnu uvážením závislosti d od $r, N, v, \ldots$

niekoľko zaujímavých prípadov

- v priblížení $d = \text{const}$ teraz prediskutujeme niekoľko zaujímavých javov
- koleso fúrika: k doteraz uvažovaným silám pribudne ešte jedna sila, ktorou tlačíme na os kolesa
- koleso auta: k sile pôsobiacej na os kolesa (tentoraz to bude časť sily odporu prostredia, ktorou je brzdené celé auto, aj s kolesami) pribudne moment sily pôsobiacej na os (práve týmto momentom roztáča motor kolesá)
- obruč v modernej gymnastike: pri vhodných počiatočných podmienkach ide najprv chvíľu od gymnastky a potom sa k nej vracia

koleso fúrika

- pribudne jedna sila F, pôsobiaca v strede
- horizontálny pohyb $\quad ma = -T + F_x$

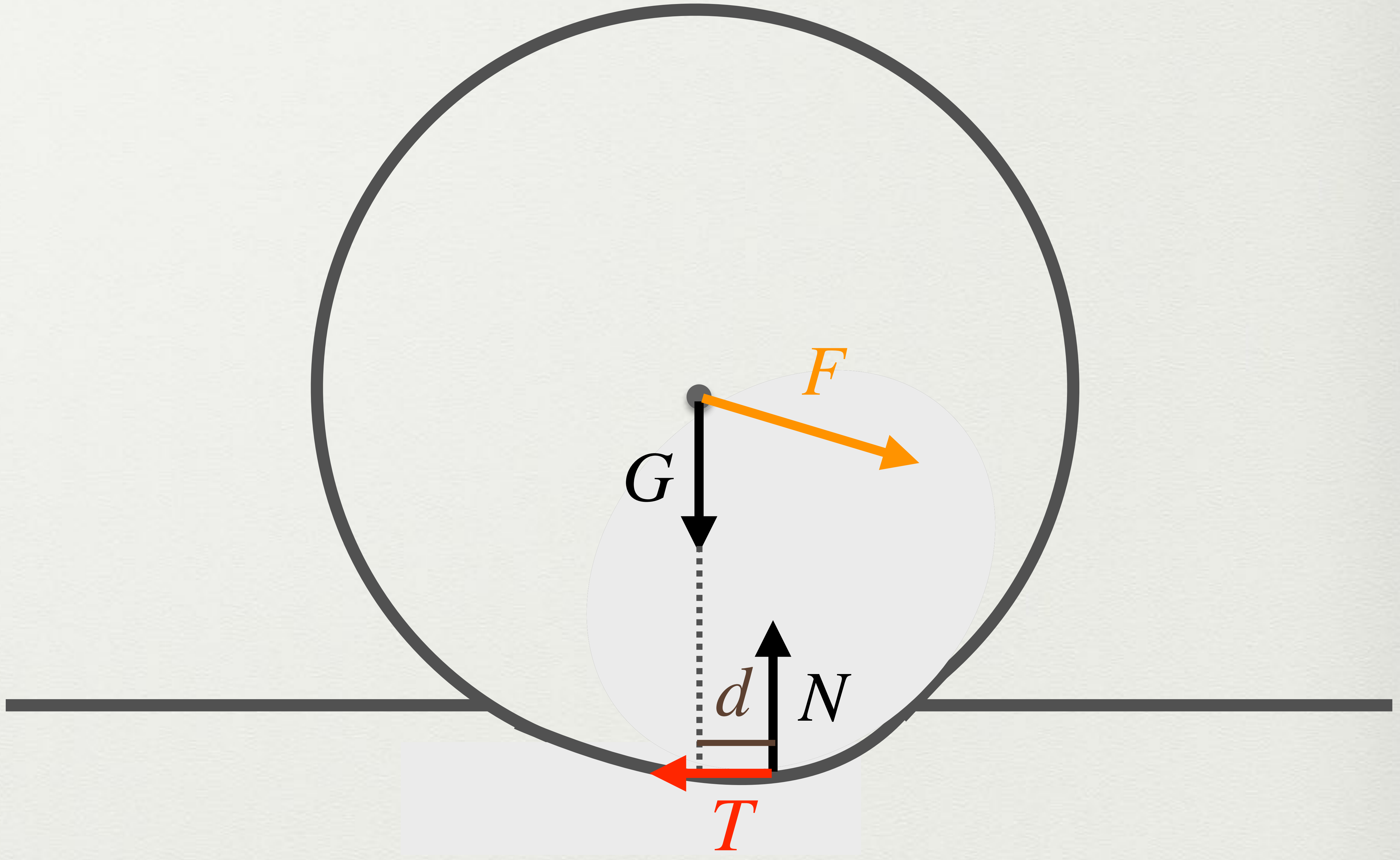
  vertikálny (ne)pohyb $\quad 0 = N - G - F_y$

  rotačný pohyb $\quad I\epsilon = -rT + dN$

  valenie $\quad v = -\omega r \quad \Rightarrow \quad a = -\epsilon r$

- z týchto rovníc opäť ľahko nájdeme

$$a = \frac{rF_x - dN}{mr + I/r}$$



úloha: akou silou musíme pôsobiť na fúrik, aby išiel rovnomerne priamočiaro?

koleso železničného vozňa

- rovnaké rovnice ako pre koleso fúrika dostaneme aj pre koleso vozňa ťahaného koňom alebo lokomotívou

- sila F_x je v takom prípade (približne) štvrtina ťažnej sily a sila F_y je (približne) štvrtina tiaže nákladu

- z výsledku pre koleso fúrika vidíme, že sa pohybuje s nulovým zrýchlením, ak

$$F_x = \frac{d}{r} N$$

- najlepšie sú kolesá s malým *d* a veľkým *r*

- najmenšie *d* máme pri tvrdých (oceľových) kolesách a tvrdých (oceľových) cestách

- lenže oceľové cesty by boli šialene drahé riešenie: používame mimoriadne úzke oceľové cesty, ktorým hovoríme koľajnice

- pozoruhodný experimentálny fakt – závislosť koeficientu valivého trenia *d* od normálovej sily je v prípade ocele na oceli prekvapujúca: $d(N)$ je klesajúca funkcia

- skvelý dôsledok: na železnici je ťahanie plne naložených vozňov účinnejšie ako prázdnych (treba menej ťažnej sily na tonu záťaže)

koleso auta

- pribudne ešte moment sily M, ktorým na os kolesa pôsobí motor

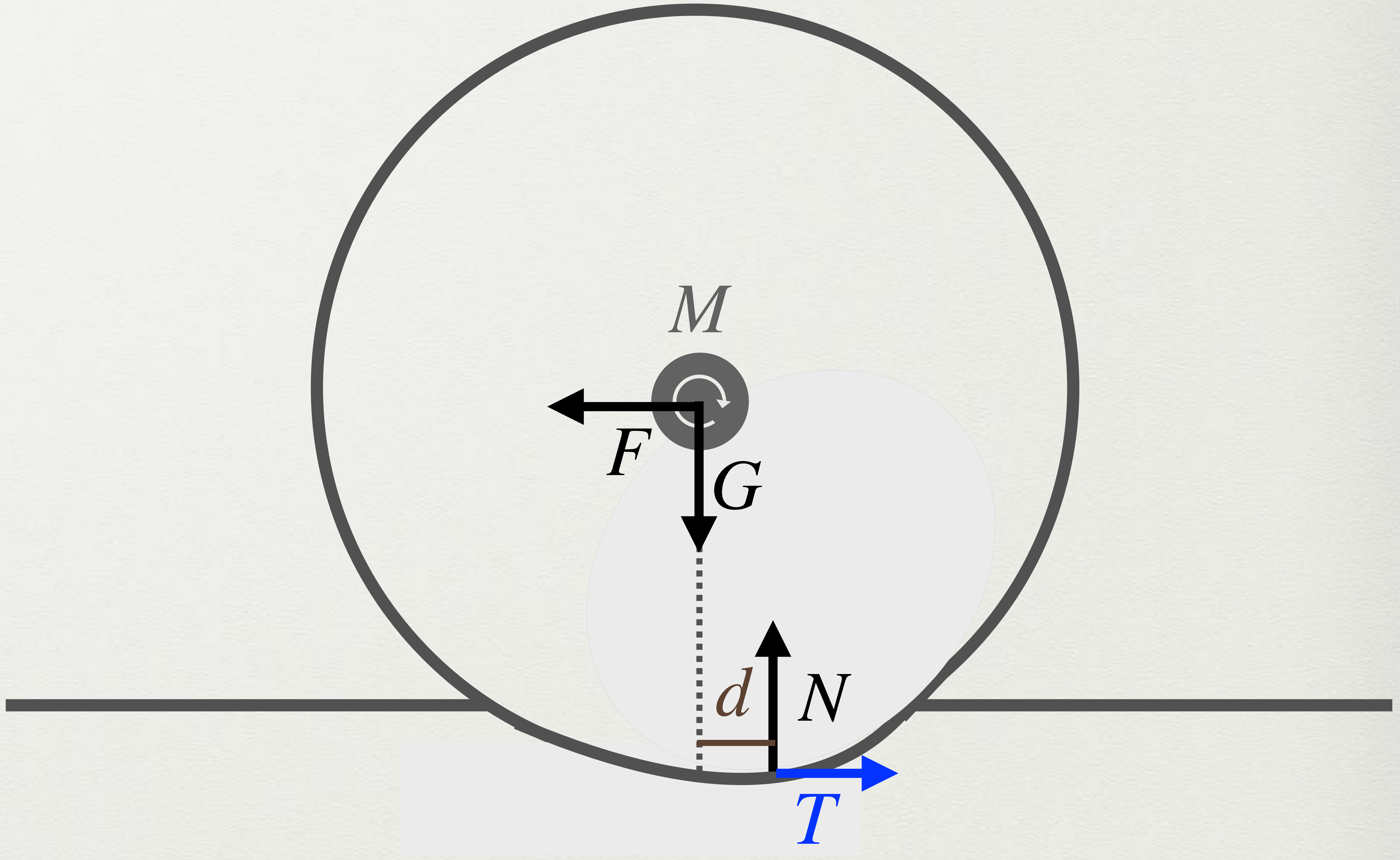
- horizontálny pohyb $\quad ma = T - F$

  vertikálny (ne)pohyb $\quad 0 = N - G$

  rotačný pohyb $\quad I\epsilon = rT + dN - M$

  valenie $\quad v = -\omega r \quad \Rightarrow \quad a = -\epsilon r$

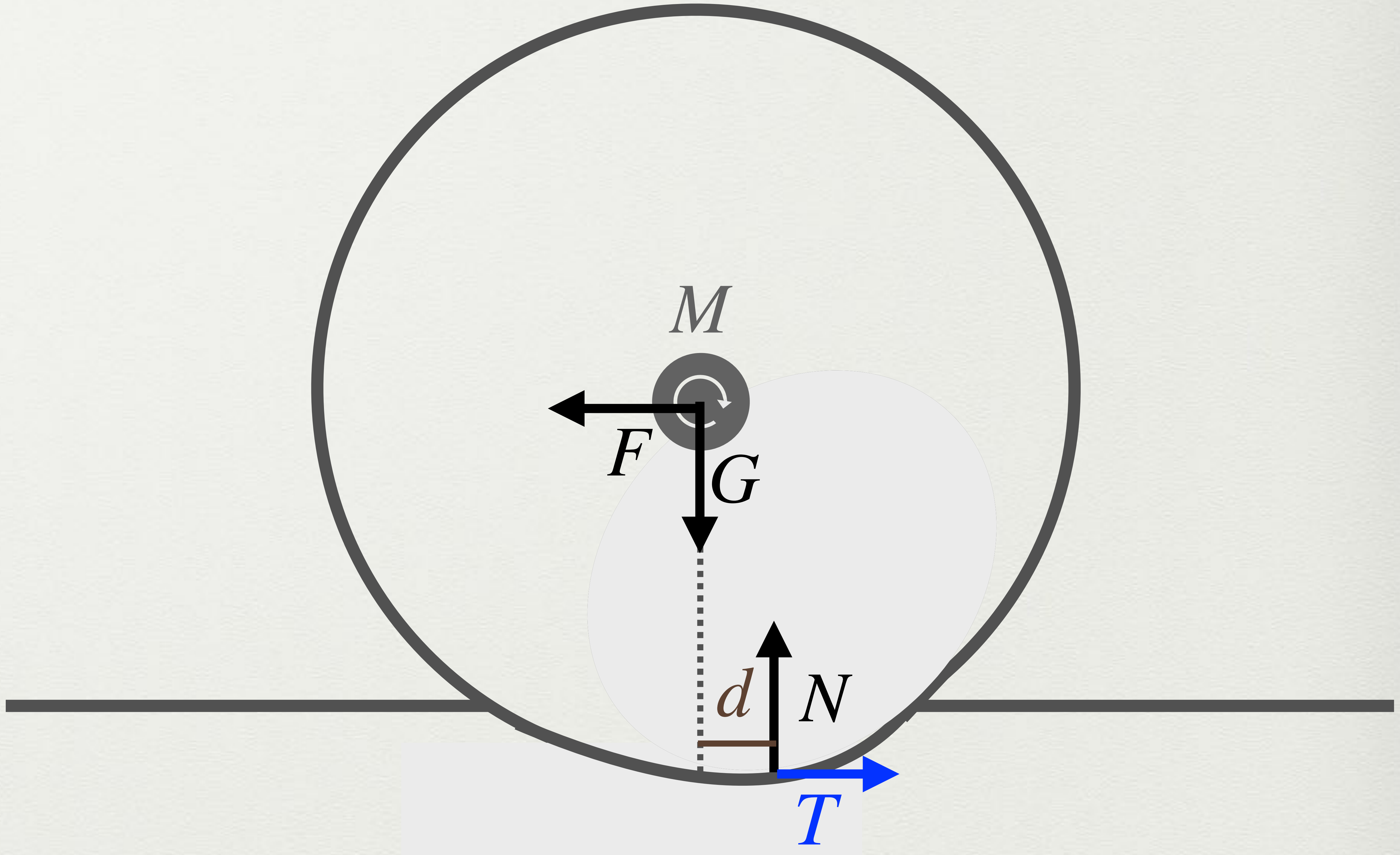
- z rovníc dostaneme $a = \dfrac{M - rF - dG}{mr + I/r}$



sila F pochádza od odporu prostredia

aká sila udržuje auto v pohybe?

- aby sa koleso pohybovalo rovnomerne ($a = 0$), moment sily pôsobiaci na jeho os musí mať veľkosť
$$M = r\,F + d\,G$$
- je teda správne povedať, že pri rovnomernom pohybe je auto poháňané týmto momentom
- ale tak otázka nestála
pýtali sme sa na silu, nie na moment sily
- je celkom zjavné, aj keď možno prekvapivé, že keďže v hre je už len jedna horizontálna sila, tak



auto je udržiavané v pohybe trecou silou, konkrétne silou statického trenia

šmyk kolesa

- uvažujme koleso pri štarte (nulová rýchlosť, čiže aj nulový odpor vzduchu) a vyjadrime silu T

$$T = \frac{M - d\,G}{r + I/mr}$$

- z podmienky $|T| \leq f_S N$ dostaneme podmienku

$$M \leq f_s G \left(r + \frac{I}{mr} \right) + d\,G$$

- akonáhle je moment M väčší ako pravá strana, dôjde k prešmykovaniu kolesa
- moment sily M kontrolujeme v aute plynovým pedálom; ak to preženieme, kolesá prešmykujú

- pri brzdení je moment sily M súčtom dvoch momentov, od motora a od bŕzd
- pri pohybe nenulovou rýchlosťou dostaneme

$$T = F + \frac{M + r\,F - d\,G}{r + I/mr}$$

- z podmienky $|T| \leq f_S N$ dostaneme podmienku

$$\left| F + \frac{M + r\,F - d\,G}{r + I/mr} \right| \leq f_s G$$

ktorá je narušená pri príliš veľkom $|M|$

- moment sily M kontrolujeme v tomto prípade najmä brzdovým pedálom; ak na tento pedál príliš dupneme, dostaneme šmyk

vracajúca sa obruč

jednoduchý trik často používaný v modernej gymnastike

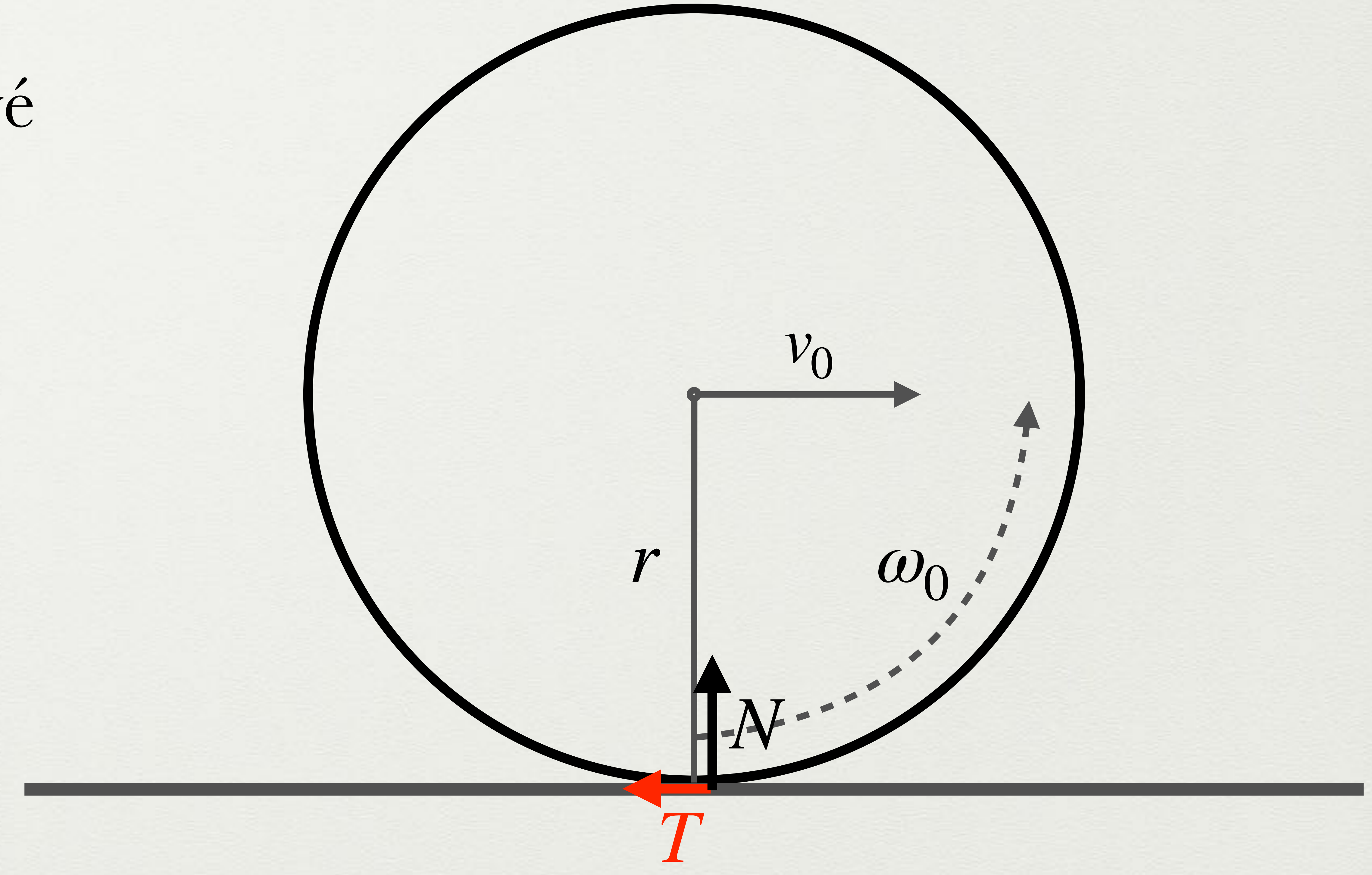
kedy sa začne valiť?

- počiatočná rýchlosť a uhlová rýchlosť nesplĺňajú podmienku valenia: $v_0 \neq -\omega_0 r$, trenie je šmykové

- šmykové trenie $\quad T = -f_k N$
  horizontálny pohyb $\quad ma = T$
  vertikálny (ne)pohyb $\quad 0 = N - G$
  rotačný pohyb $\quad mr^2 \epsilon = r\,T + d\,N$

- $v(t) = v_0 + a\,.\,t = v_0 - f_k g\,t$
  $\omega(t) = \omega_0 + \epsilon\,.\,t = \omega_0 - \dfrac{f_k r - d}{r^2} g\,t$

- prešmykovanie prestane, keď $v(t) = -r\,\omega(t)$
  v čase $t = \dfrac{1}{g}\dfrac{v_0 + \omega_0 r}{2f_k - d/r}$ sa obruč začne valiť



toto však platí len za predpokladu, že sa začne valiť skôr, ako sa začne vracať

kedy sa začne vracať?

<u>ak to stihne skôr, než sa začne valiť</u>

- v takom prípade je trenie až do momentu obratu šmykové, čiže $T = -f_k N$
- moment obratu: rýchlosť mení znamienko, čiže v tomto momente je rýchlosť nulová

$$v(t) = v_0 + a\,t' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t' = \frac{v_0}{f_k\,g}$$

- akú dráhu dovtedy prejde?

$$s = v_0\,t' + \tfrac{1}{2}\,a\,t'^2 = \frac{v_0^2}{f_k g} - \frac{v_0^2}{2 f_k g} = \frac{v_0^2}{2 f_k g}$$

<u>ak to nestihne skôr, než sa začne valiť</u>

- ak pre čas t prechodu k valeniu (minulý slide) platí $t < t'$, potom treba od času t počítať nie so šmykovým, ale so statickým trením
- výpočet nového času obratu necháme už len na tých jedincov, ktorých to naozaj zaujíma
- títo jedinci môžu vypočítať aj to, ako vyzerá pohyb obruče v prípade, že sa začne vracať skôr, ako sa začne valiť (pri obrate sa zmení znamienko momentu valivého trenia)

mravné ponaučenie na záver

- úplne prvú prednášku tohto kurzu sme zakončili úlohou s autom, v ktorej otázka znela (aj keď bola prítomná len implicitne): aká sila poháňa auto?

- na základe bežnej inutície len málokto vedel, že silou, ktorá v tomto prípade poháňa auto, je statické trenie

- po tejto prednáške by sme to už mali vedieť

- zapamätajme si teda:

trenie dokáže nielen brzdiť, ale aj poháňať