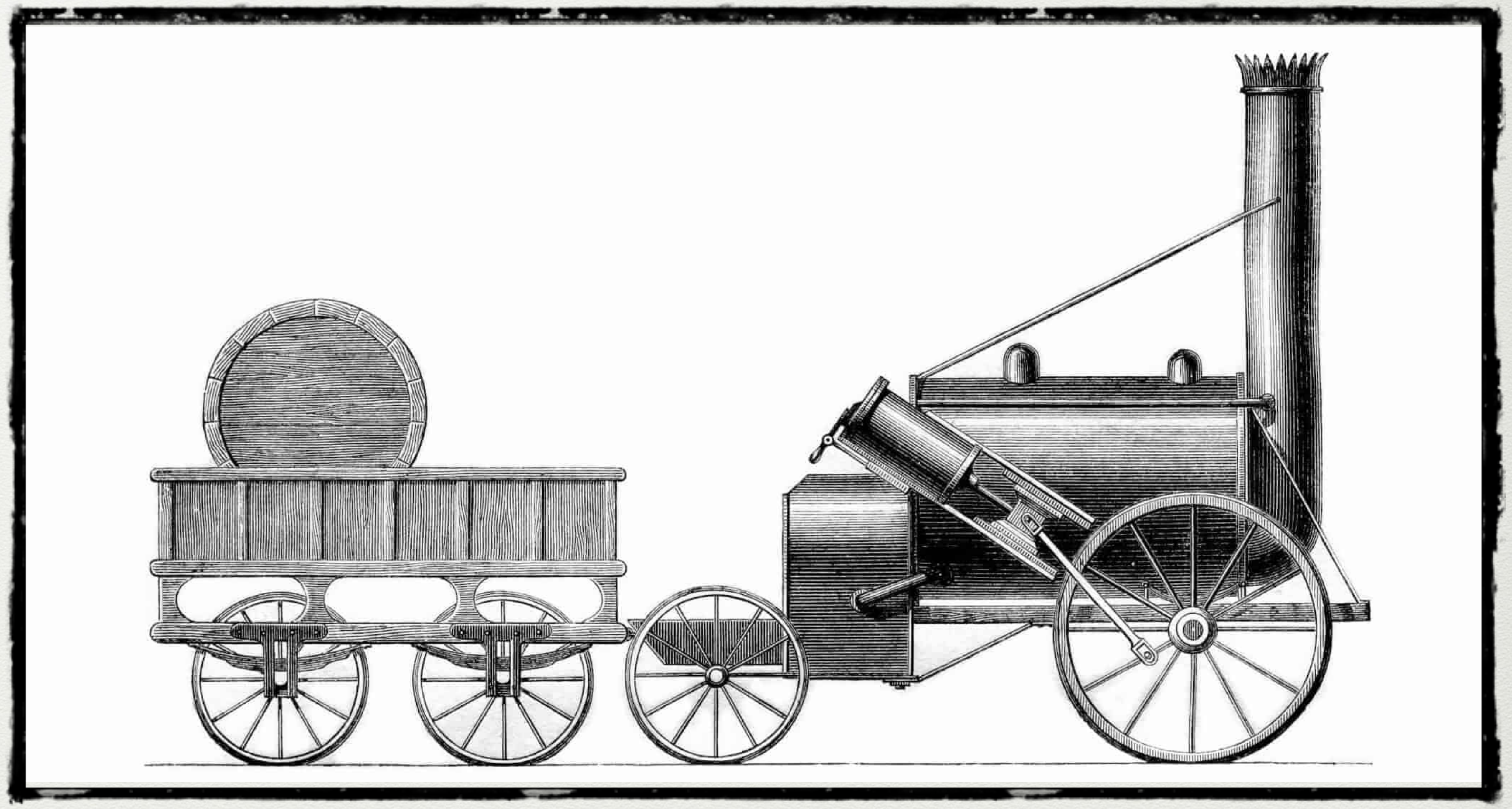
KOLO, KOLO ~~mlynské~~
časť druhá: kladka

pohyb sústavy tuhých telies

mechanika 33

sústavy tuhých telies

- oveľa častejšie ako s jedným izolovaným tuhým telesom sa stretávame so sústavami navzájom poprepájaných tuhých telies
- celé strojné inžinierstvo sa do veľkej miery zaoberá práve takýmito sústavami
- prednášky o dvojrozmerných rotáciách tuhých telies preto zakončíme pomerne podrobnou analýzou jednej takejto sústavy

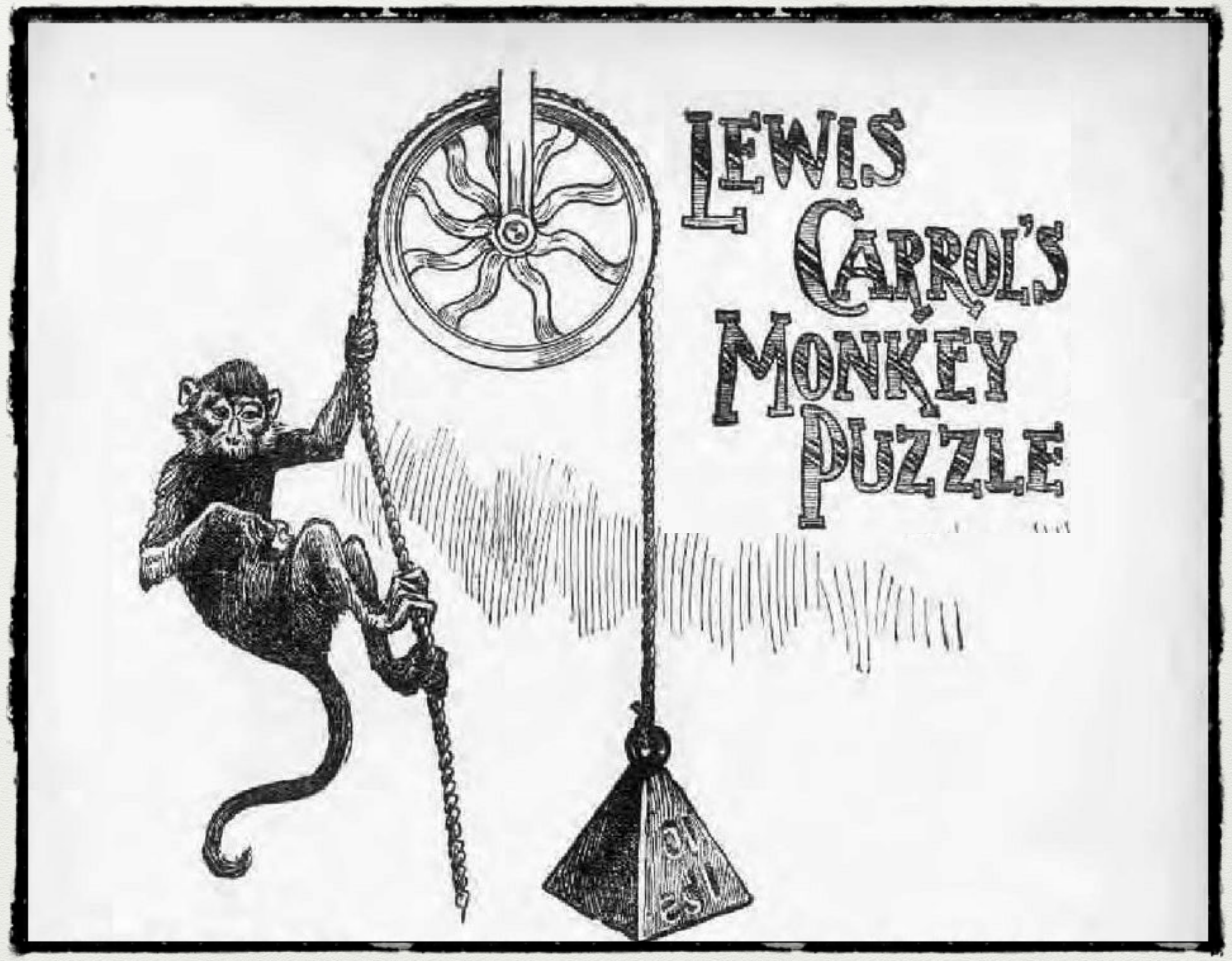


- namiesto rôznych zložitejších strojov budeme uvažovať jeden jednoduchý stroj, konkrétne kladku, na ktorej sa naučíme základný postup použiteľný aj pri komplikovanejších sústavách tuhých telies

čo už len môže byť zaujímavé na kladke?

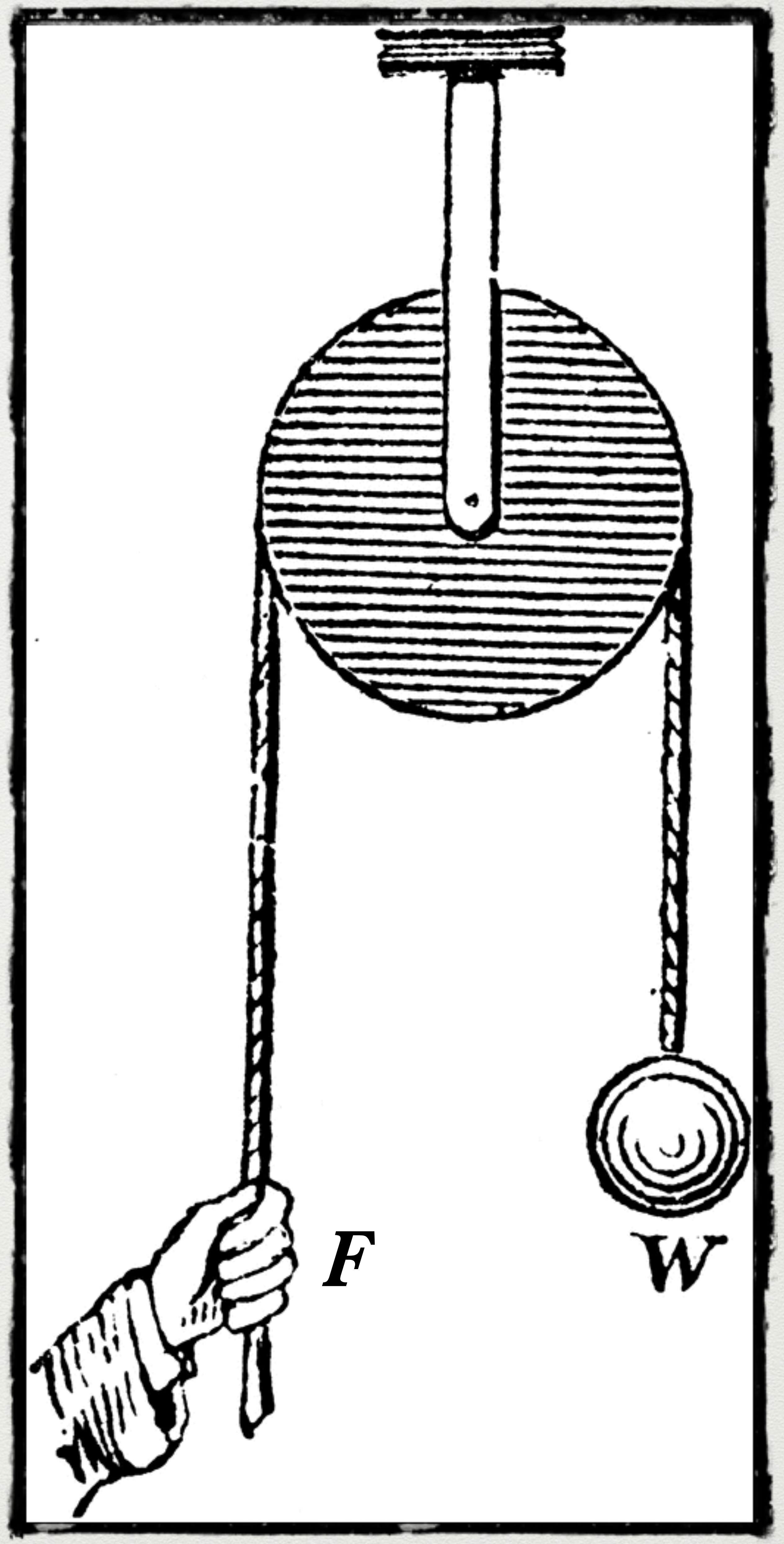
- no skúsme napríklad takúto úlohu:
  Opica na kladke visí v rovnováhe so závažím. Ako sa bude pohybovať závažie, ak sa opica začne šplhať smerom hore?

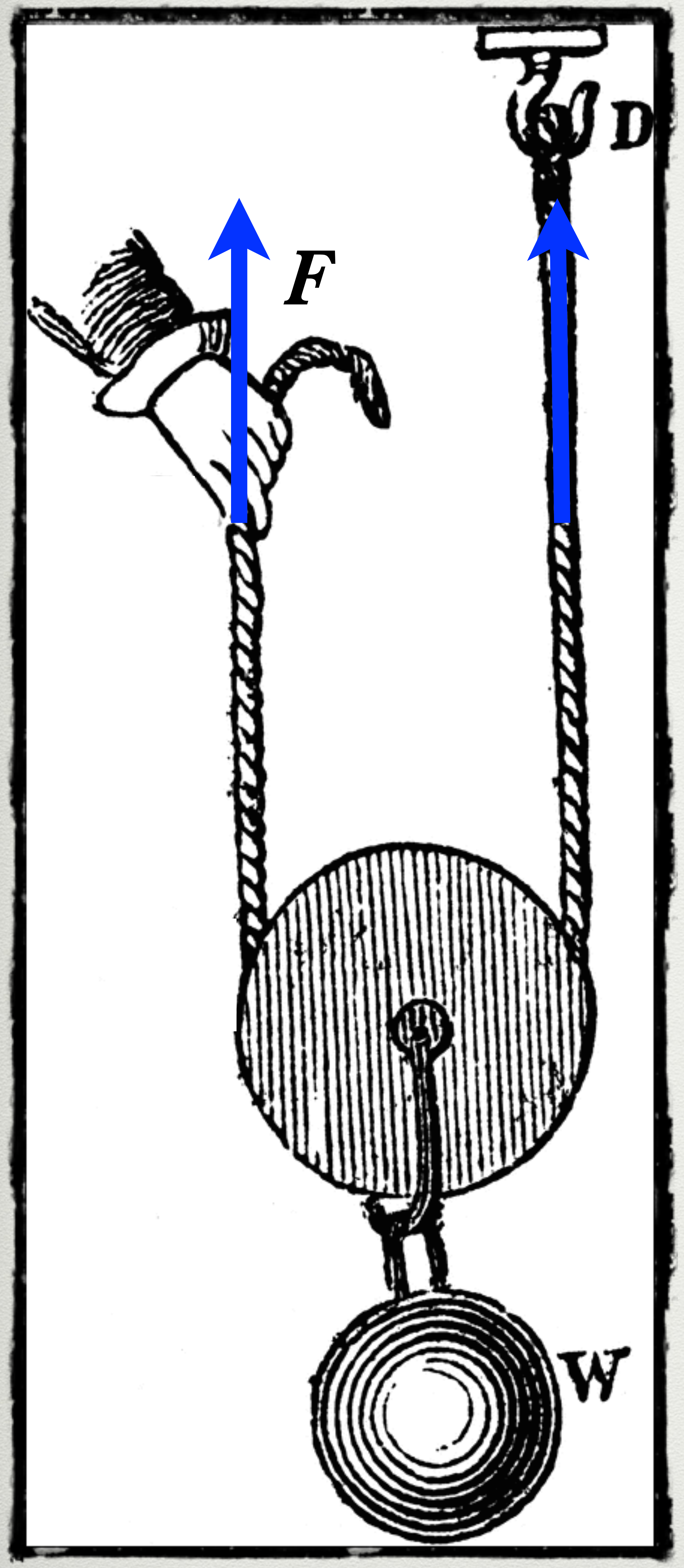
- “It is very curious, ” says Lewis Carroll, “to note the different views taken by good (Oxford) mathematicians. Price says the weight goes up with increasing velocity. Both Clifton and Harcourt maintain that the weight goes up at the same rate of speed as the monkey; while Sampson says that it goes down. ”



ľahká kladka (ZŠ, SŠ)

- na strednej škole sa hmotnosť kladky aj lana zanedbáva
- ak má lano nulovú hmotosť, potom ak nemá mať nekonečné zrýchlenie, tak celková sila naň pôsobiaca musí byť nulová
- z toho sa (nie veľmi jasne) usúdi, že $F = W$ (pozri obrázok)
- toto odvodenie je dosť neporiadne (sily F a W pôsobia v tom istom smere, okrem nich pôsobia na lano aj ďalšie sily a navyše samotná kladka v tom odvodení nehrá vôbec nijakú úlohu)
- ale mnohým ľuďom to stačí, najmä ak podobným uvažovaním dokážu pochopiť aj voľnú kladku a kladkostroj

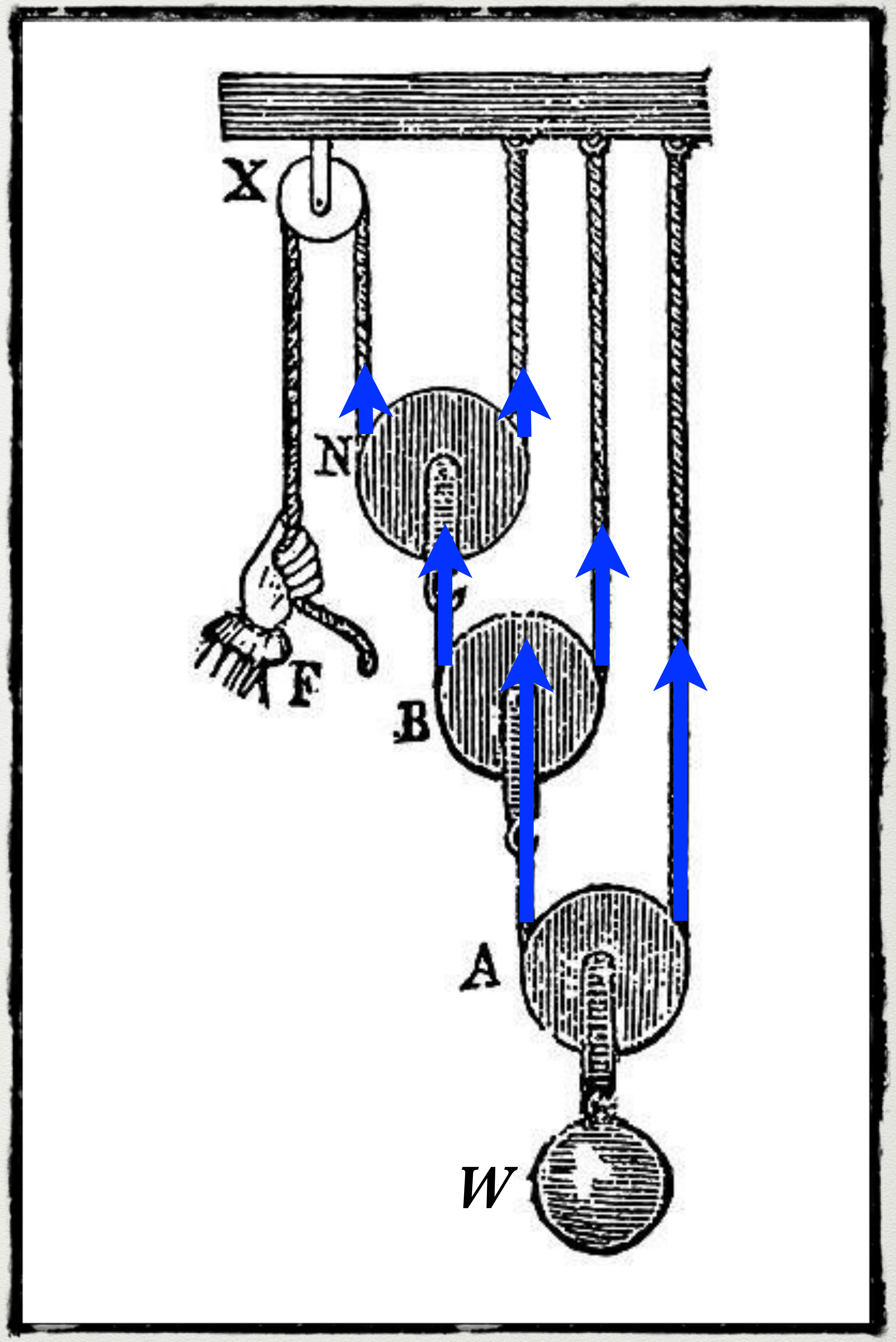




voľná kladka (ZŠ, SŠ)

- aj pre voľnú kladku s nehmotným lanom platí, že sila pôsobiaca na lano musí byť nulová, a teda že modré šípky musia byť rovnaké (?)
- každá z tých modrých šípiek má veľkosť F a keďže v rovnováhe je sila pôsobiaca na kladku nulová, dostávame $2F = W$
- pre kladkostroj dostaneme takto $F = N,\ 2N = B, 2B = A, 2A = W$ čiže celkove

$$F = W/8$$

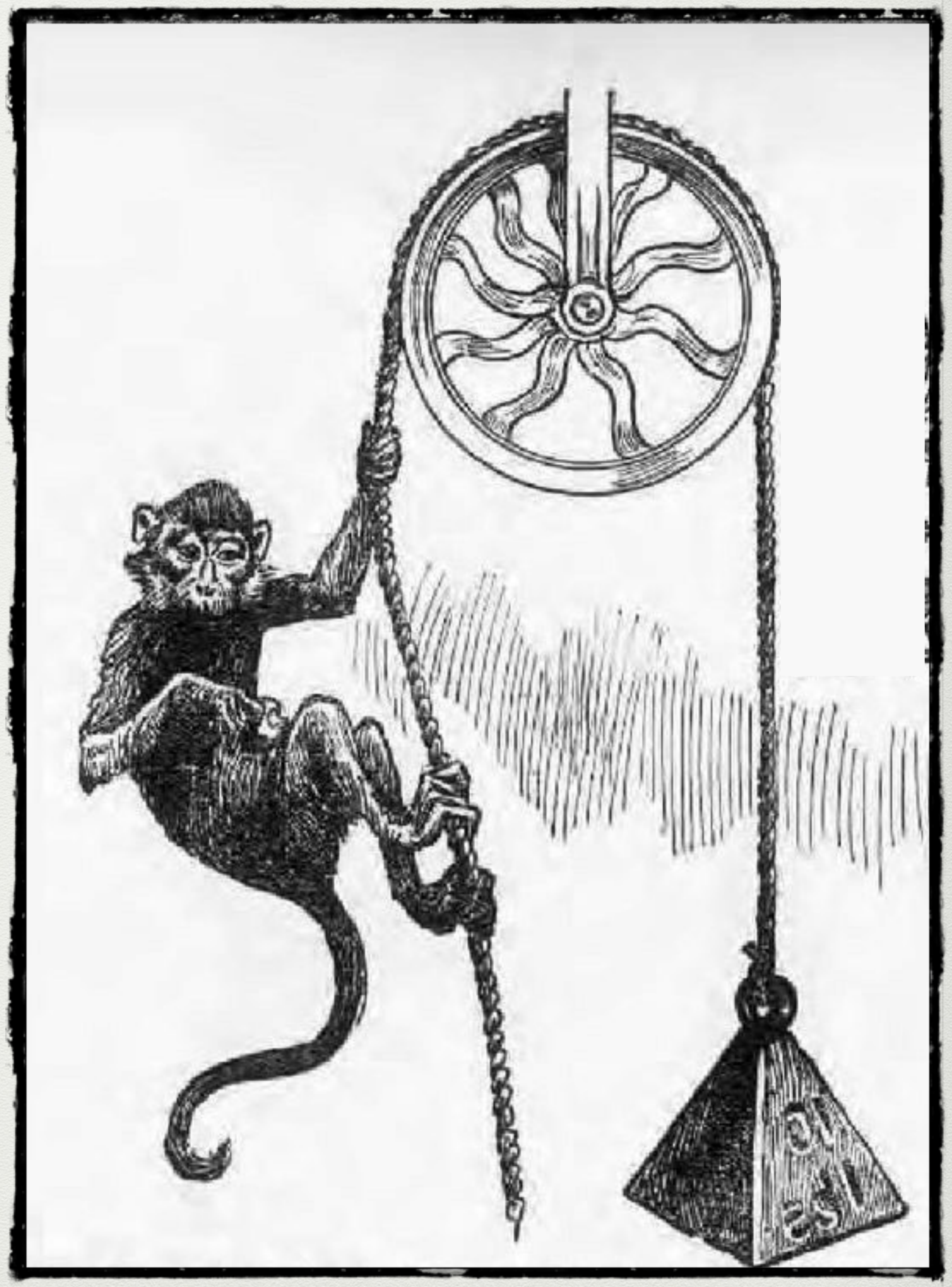


opica na ľahkej kladke (ZŠ, SŠ)

- ak zanedbávame hmotnosť kladky aj lana, potom musí byť sila pôsobiaca na lano nulová, opica aj závažie teda pôsobia na lano rovnakými silami, čiže aj lano pôsobí na ne rovnakými silami (akcia a reakcia), takže opica aj lano majú rovnaké zrýchlenia, a ak štartovali z pokoja, majú rovnaké rýchlosti a teda stúpajú rovnako rýchlo

- ak hmotnosť lana nezanedbáme, tak predchádzajúca úvaha prestane platiť a opica môže stúpať rýchlejšie (ak na ňu pôsobí lano väčšou silou ako na závažie)

- ak nezanedbáme ani hmotnosť kladky, potom na jej roztáčanie treba moment sily, čo znova zmení úvahy

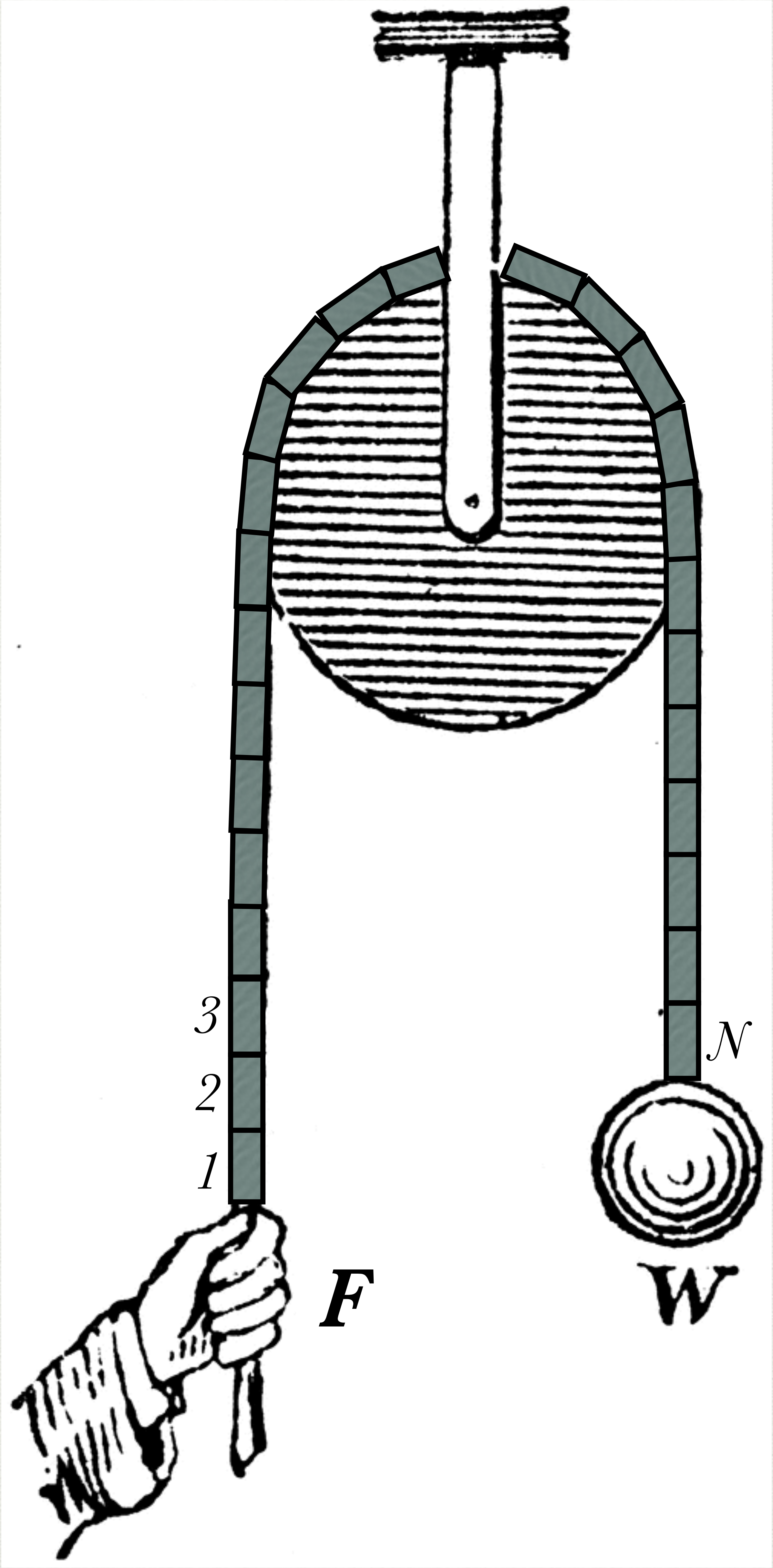


tak ako to teda vlastne je?

- zdá sa, že je naozaj načase, aby sme sa na tú kladku pozreli poriadne
- školské porozumenie kladke je zúfalo neporiadne a zjavne nedostatočné
- štandardné zanedbávania neumožňujú vysomáriť sa ani z takej zdanlivo jednoduchej úlohy, ako je opica na kladke
- takže sa naučme poriadny prístup ku kladke, ktorý je navyše dobrou ilustráciou prístupu k strojárskej mechanike, čo je jedna z dôležitých aplikácií fyziky všeobecne a mechaniky špeciálne

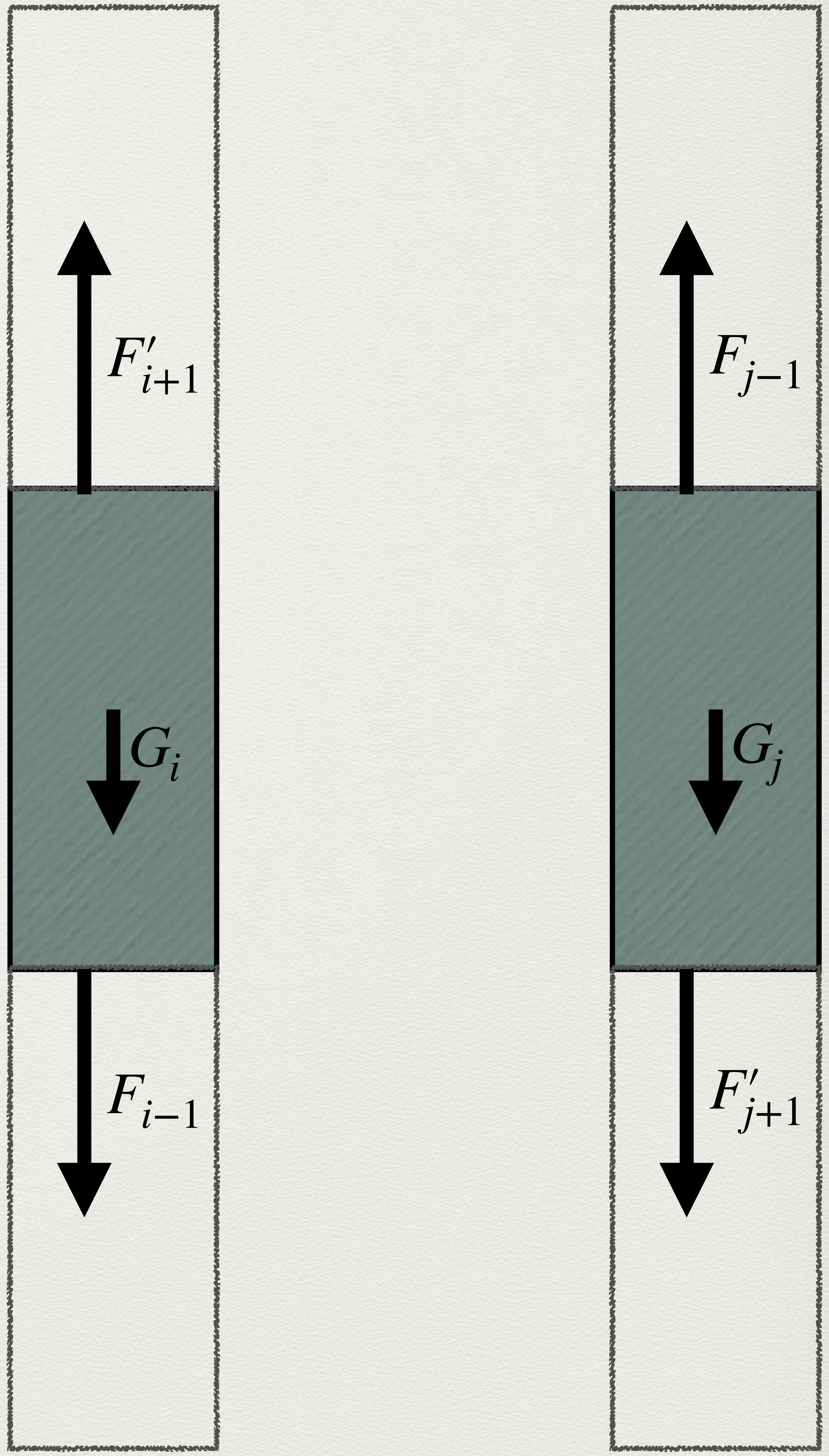
poriadny prístup ku kladke

- kľúčová otázka:
  ako vyzerá mechanika lana, ktoré nie je tuhým telesom?
- kľúčová odpoveď:
  lano môžeme chápať ako sústavu malých tuhých telies
- v rámci poriadneho prístupu budeme chápať lano ako akýsi vláčik zložený z malých vozňov, ktoré očíslujeme od *1* po *N* (vozne môžu byť ľubovoľne malé, čiže *N* ľubovoľne veľké)
- napíšeme pohybové rovnice pre závažie (resp. viac závaží), kladku aj jednotlivé kúsky lana a z týchto rovníc vypočítame ako sa bude celá sústava pohybovať



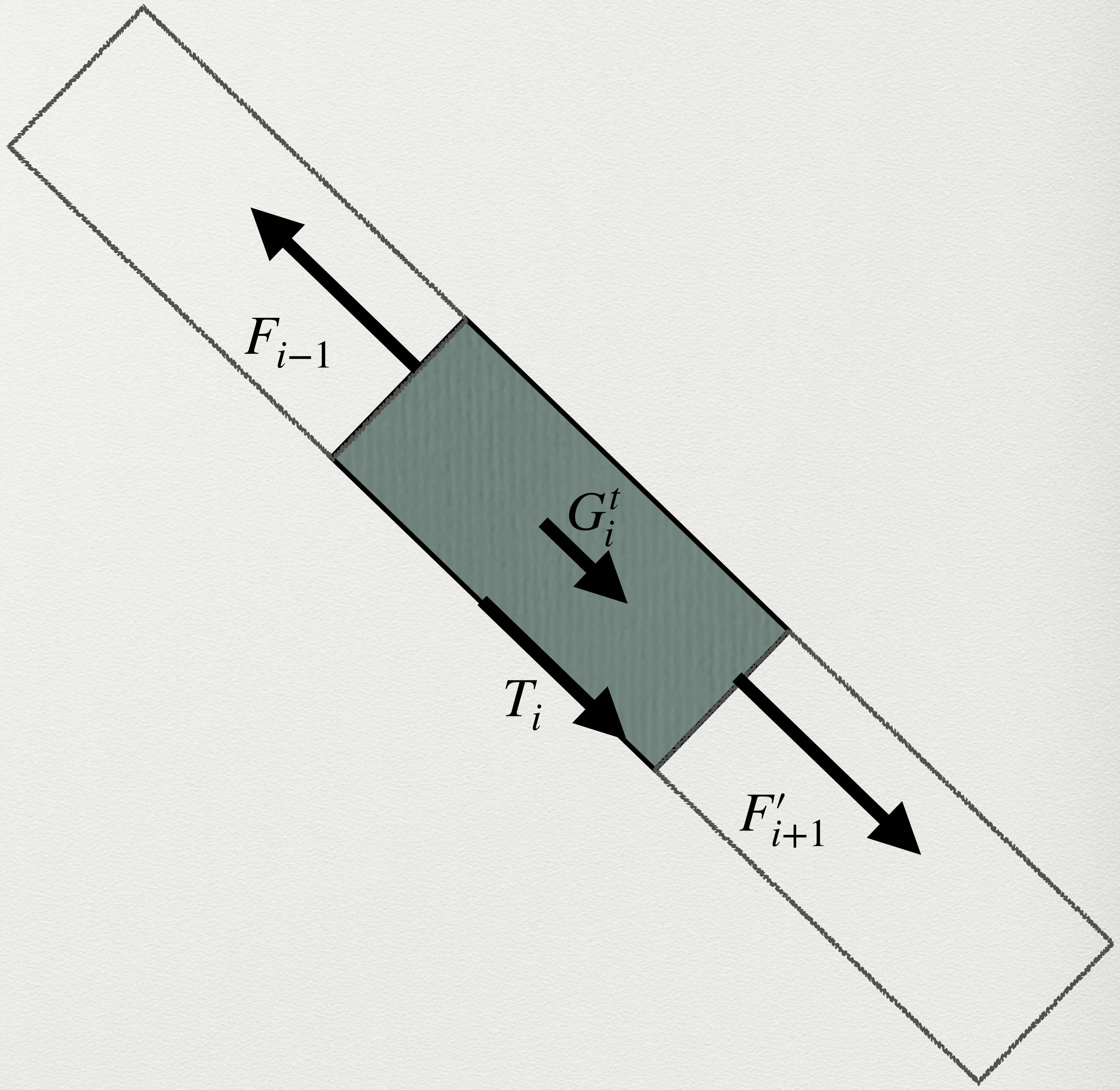
sily pôsobiace na zvislý kúsok lana

- na *i*-tý kúsok lana (*i=1,…,N*) pôsobia tieto sily:
- jeho tiaž G_i
- sila F_{i-1}, ktorou na *i*-ty kúsok pôsobí (*i-1*)-vý kúsok
  F_0 je sila, ktorou pôsobí na prvý kúsok lana buď ruka alebo závažie, čiže $F_0 = F$
- sila F'_{i+1}, ktorou na *i*-tý kúsok pôsobí (*i+1*)-vý kúsok
  F'_{N+1} je sila, ktorou pôsobí závažie na posledný kúsok, čiže $F'_{N+1} = W$
- veľmi dôležitý bude zákon akcie a reakcie: $F_{i-1} = F'_i$



sily pôsobiace na “šikmý” kúsok lana

- na *i*-ty kúsok lana (i=*1,…,N*) pôsobia tieto sily:
- normálové sily (normálová zložka tiaže a normálová sila, ktorou pôsobí kladka na lano), ktoré sa navzájom vyrušia (nie sú nakreslené na obrázku)
- tangenciálna (dotyčnicová) zložka tiaže G_i^t *i*-teho kúska
- sila F_{i-1}, ktorou na *i*-ty kúsok pôsobí (*i-1*)-vý kúsok
- sila F'_{i+1}, ktorou na *i*-tý kúsok pôsobí (*i+1*)-vý kúsok
- trecia sila T_i (ktorou pôsobí kladka na *i*-ty kúsok lana)

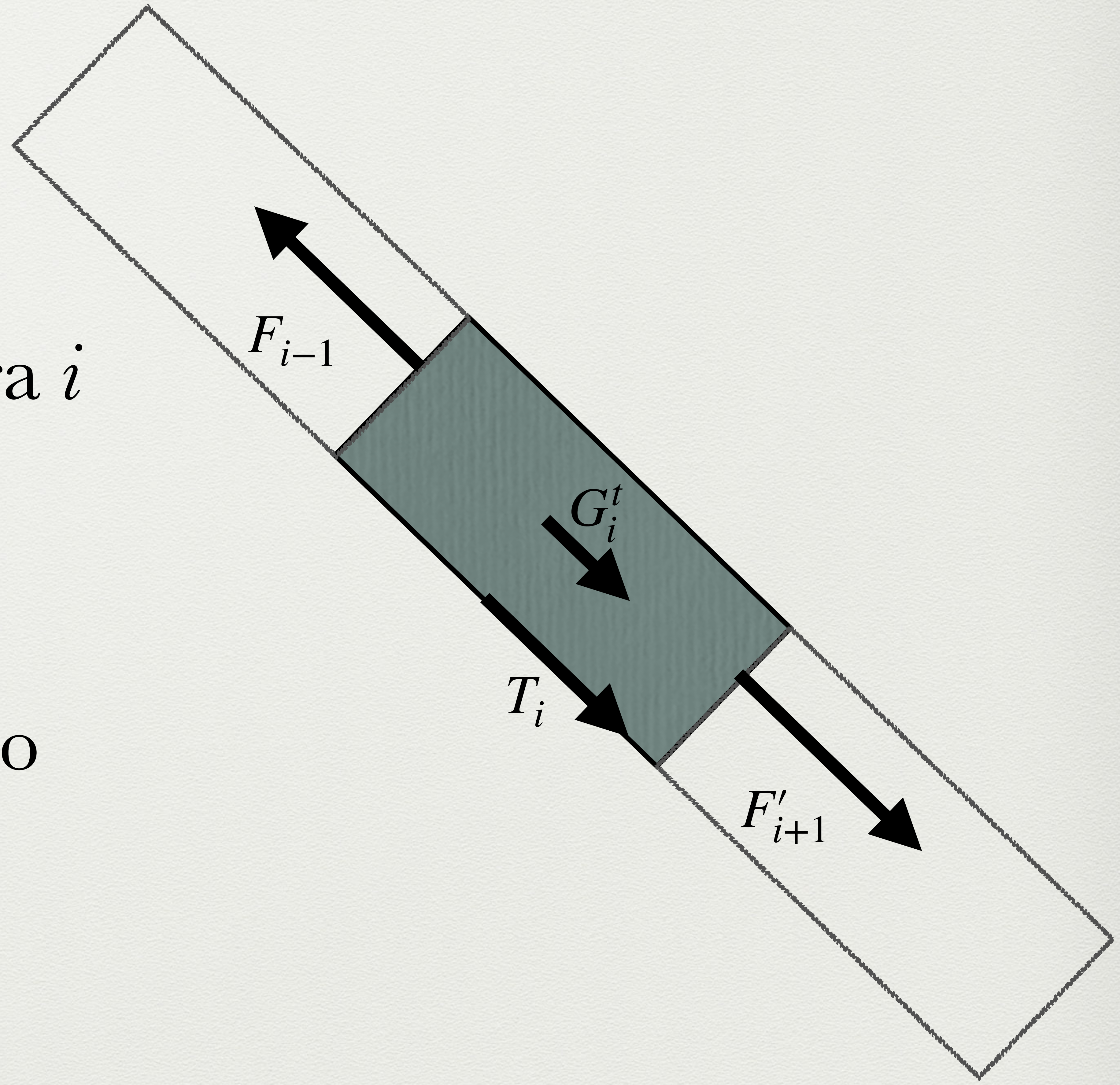


pohybová rovnica pre kúsok lana

- v tangenciálnom smere (t.j. v smere dotyčnice k lanu)

$$m_i a_i = F'_{i+1} - F_{i-1} + G_i^t + T_i$$

- pod kladným smerom rozumieme smer rastu parametra i
- pre zvislé časti lana máme $T_i = 0$
- pre pevné lano sú tangenciálne zrýchlenia všetkých jeho častí rovnaké, čiže $\forall i \;\; a_i = a$ (toto bude dôležité)
- dostali sme veľa rovníc s mnohými neznámymi silami



základný trik

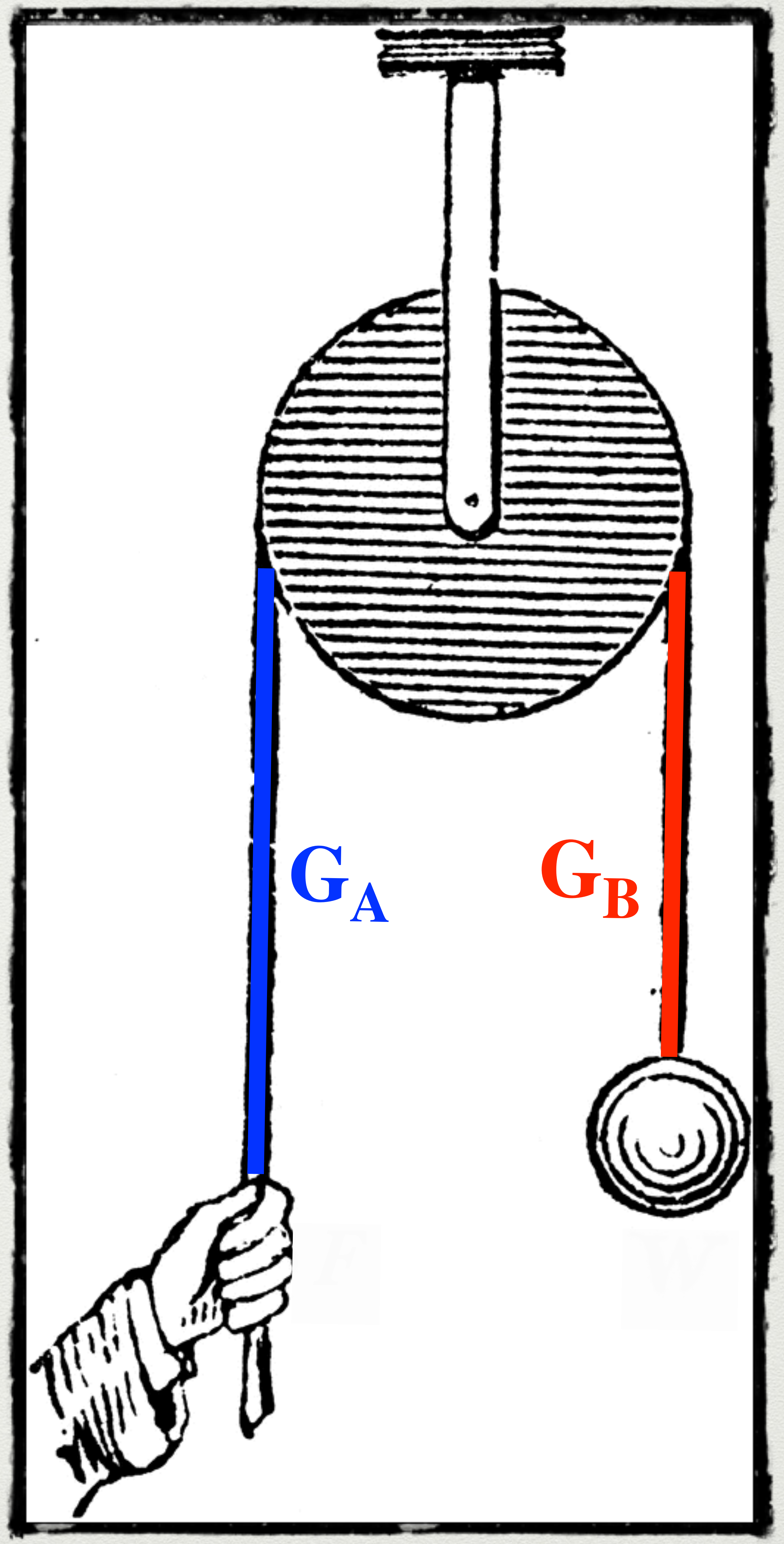
- trik: ak máme veľa rovníc s veľa silami, z ktorých mnohé sú si navzájom akciou a reakciou, je dobrý nápad rovnice sčítať:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i a_i = \sum_{i=1}^{N} \left(F'_{i+1} - F_{i-1} + G_i^t + T_i\right)$$

- $\sum_{i=1}^{N} \left(F'_{i+1} - F_{i-1}\right) = F'_{N+1} - F$ (zo zákona akcie a reakcie)

- sumácia pomôže aj s tiažou kúskov lana: pozdĺž kladky je súčet tangenciálnych zložiek tiaží nulový (z dôvodu symetrie kladky), pozdĺž zvislých častí sú súčty rovné tiaži tých zvislých častí

$$\sum_{i=1}^{N} G_i^t = G_B - G_A$$



dokončenie triku

- súčet tangenciálnych zložiek všetkých trecích síl, ktorými pôsobí kladka na lano označme T (celková trecia sila v smere dotyčníc)

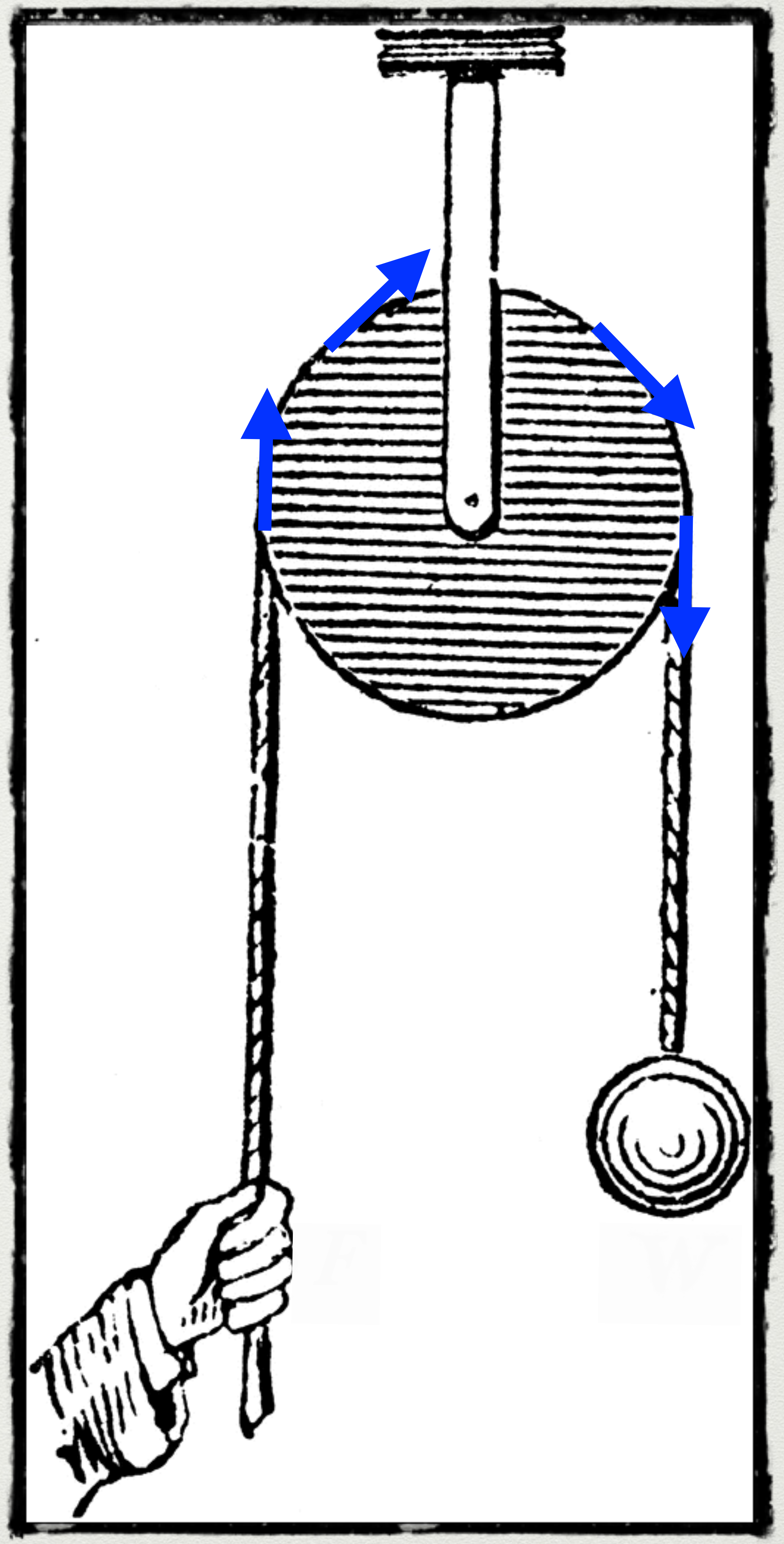
$$\sum_{i=1}^{N} T_i = T$$

- a napokon využijeme, že všetky zrýchlenia sú rovnaké $\forall i \;\; a_i = a$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i a_i = a \sum_{i=1}^{N} m_i = m_l a$$ kde m_l je celková hmotnosť lana

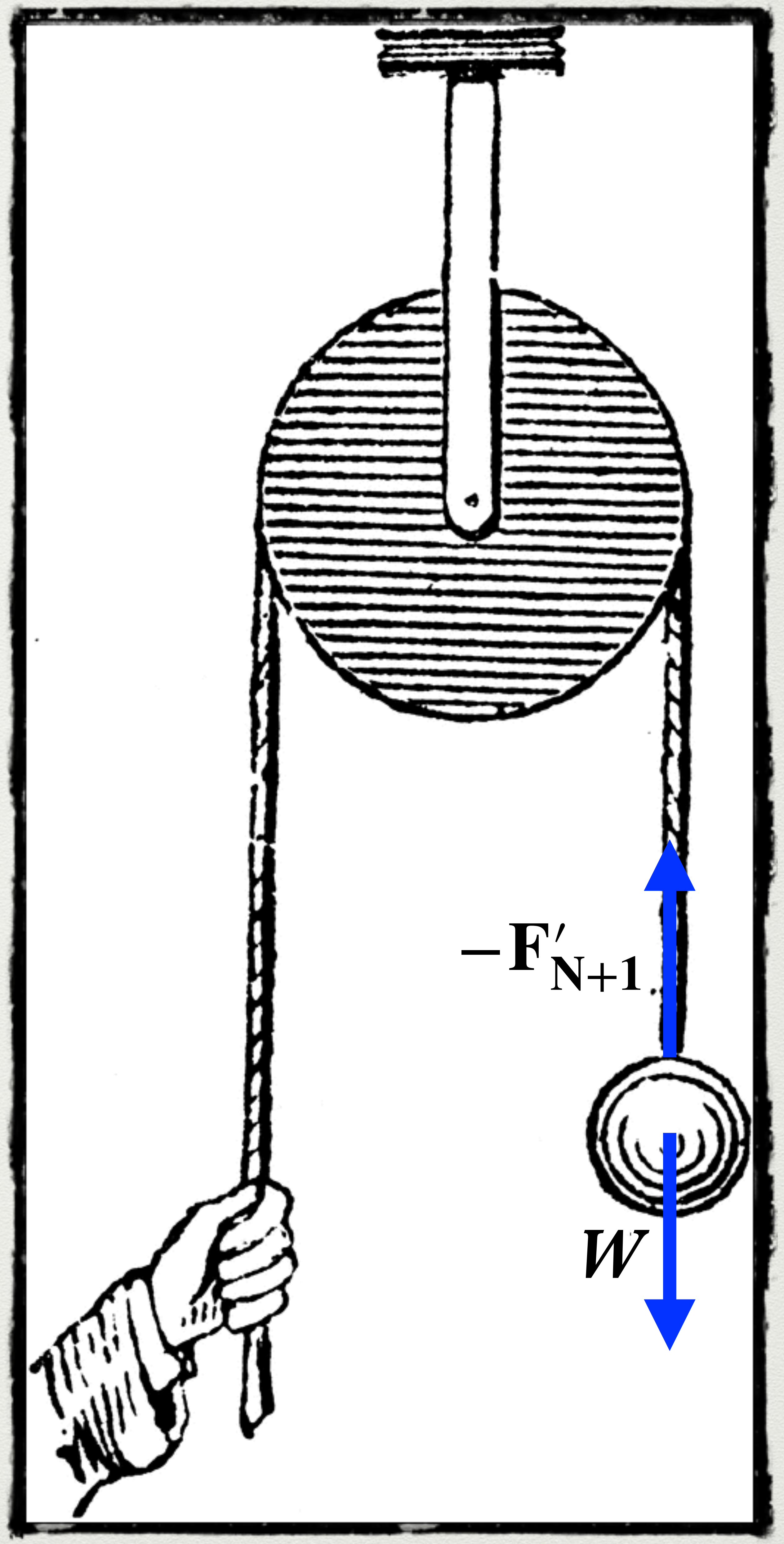
- keď to teraz dáme všetko dokopy, dostaneme jednoduchú rovnicu

$$m_l a = F'_{N+1} - F - G_A + G_B + T$$



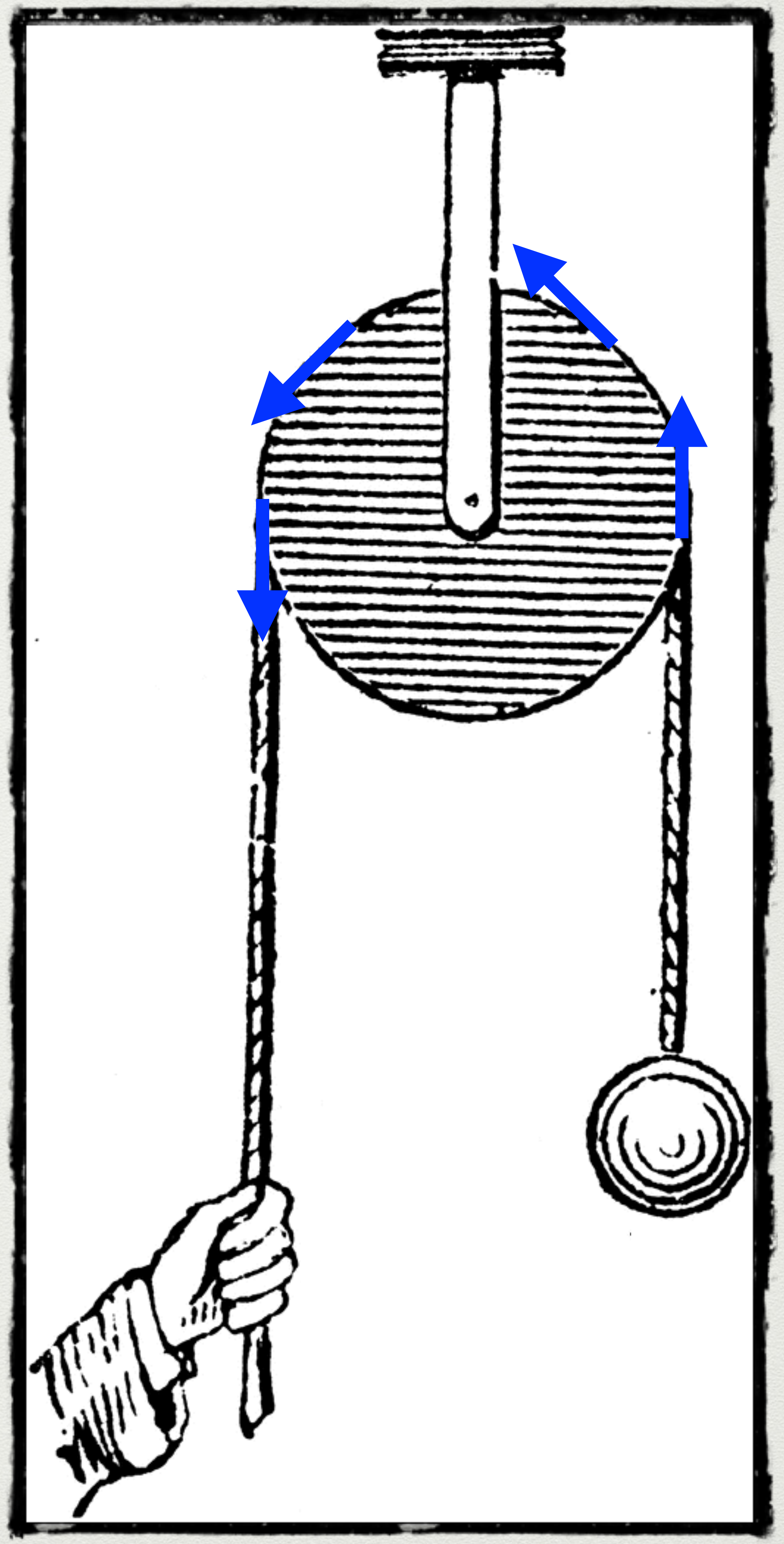
pohybová rovnica pre závažie

- na závažie pôsobia dve sily – jeho tiaž a sila, ktorou pôsobí lano (konkrétne jeho posledný kúsok)
- silu, ktorou pôsobí závažie na lano, sme označili F'_{N+1} reakcia teda bude $-F'_{N+1}$
- pohybová rovnica závažia: $m_z a = W - F'_{N+1}$ pričom $W = m_z g$
- ak je na opačnom konci lana tiež závažie (a nie ruka), treba napísať analogickú pohybovú rovnicu aj pre toto závažie



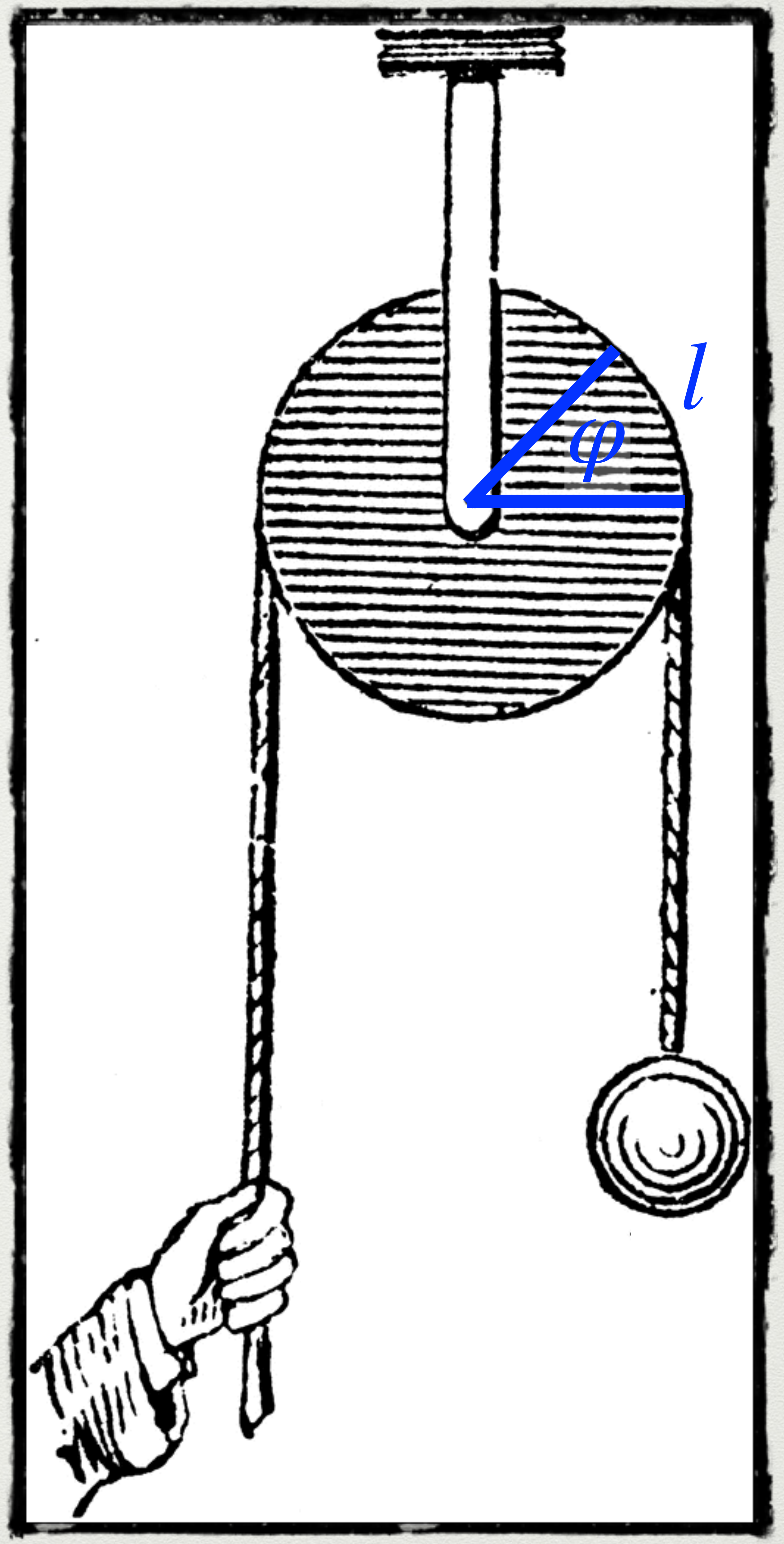
pohybová rovnica pre kladku

- i-ty kúsok lana pôsobí na kladku v dotyčnicovom smere silou $-T_i$ (je to reakcia k sile T_i , ktorou pôsobí kladka na i-ty kúsok lana)
- moment tejto sily je $r\,T_i$, kde r je polomer kladky (vždy ten istý) skontrolujte, či sedia znamienka
- celkový moment trecích síl: $M = \sum r\,T_i = r\,T$
- moment síl pôsobiacich v strede (v bode závesu) označme M_s
- pohybová rovnica: $I\,\varepsilon = M + M_s$
- moment M_s závisí od konštrukčných detailov kladky, v ďalšom môžeme predpokladať, že kladka má kvalitné ložiská a $M_s \approx 0$



uhlové a obvodové veličiny

- dĺžka oblúka na kružnici zodpovedajúca uhlu φ je $l = r\varphi$ (ak meriame uhol v radiánoch – btw práve preto sú radiány dobré jednotky, lebo v nich je ten vzťah takto jednoduchý)
- pozor na znamienka:
  uhol aj poloha sú reálne čísla merané od kladnej x-ovej osi
  pri našich konvenciách je uhol na obrázku kladný, ale poloha záporná (lebo kladný smer ide od ruky k závažiu)
- ak je l poloha, a nie dĺžka, potom správny vzťah je $l = -r\varphi$
- ak sa uhol a poloha menia, potom pre rýchlosti a zrýchlenia ich zmeny dostávame derivovaním (pri konštantom r)
  $v = -r\omega \qquad a = -r\varepsilon$



zrýchlenie závaží a lana

- máme tri rovnice:
  $I\,a = -\,r^2\,T - r\,M_s \qquad m_l\,a = F'_{N+1} - F - G_A + G_B + T \qquad m_z\,a = W - F'_{N+1}$
- sčítaním druhých dvoch sa zbavíme neznámej sily F'_{N+1}

$$(m_l + m_z)\,a = W - F - G_A + G_B + T$$

- T vyjadríme z prvej rovnice, čím nakoniec dostávame

$$\left(m_l + m_z + \frac{I}{r^2}\right)\,a = W - F - G_A + G_B - \frac{M_s}{r}$$

čítanie výsledku – rovnováha

- v rovnovážnom stave je $a = 0$, odkiaľ dostávame $F = W - G_A + G_B$
- to je náš pôvodný výsledok, vylepšený o tiaž jednotlivých častí lana
- zaujímavé je, že to platí pre ľubovoľné I a M_s, čiže zanedbania týkajúce sa kladky nehrajú pre silu potrebnú na udržanie rovnováhy nijakú úlohu
- zanedbávanie týkajúce sa lana úlohu hrá a pre ťažké lano nie je pôvodný výsledok realistický (napríklad bez závažia nie je kladka s rôzne dlhými časťami lana na jednotlivých stranách v rovnováhe – ak chceme v takom prípade rovnováhu, musíme pôsobiť nenulovou silou)

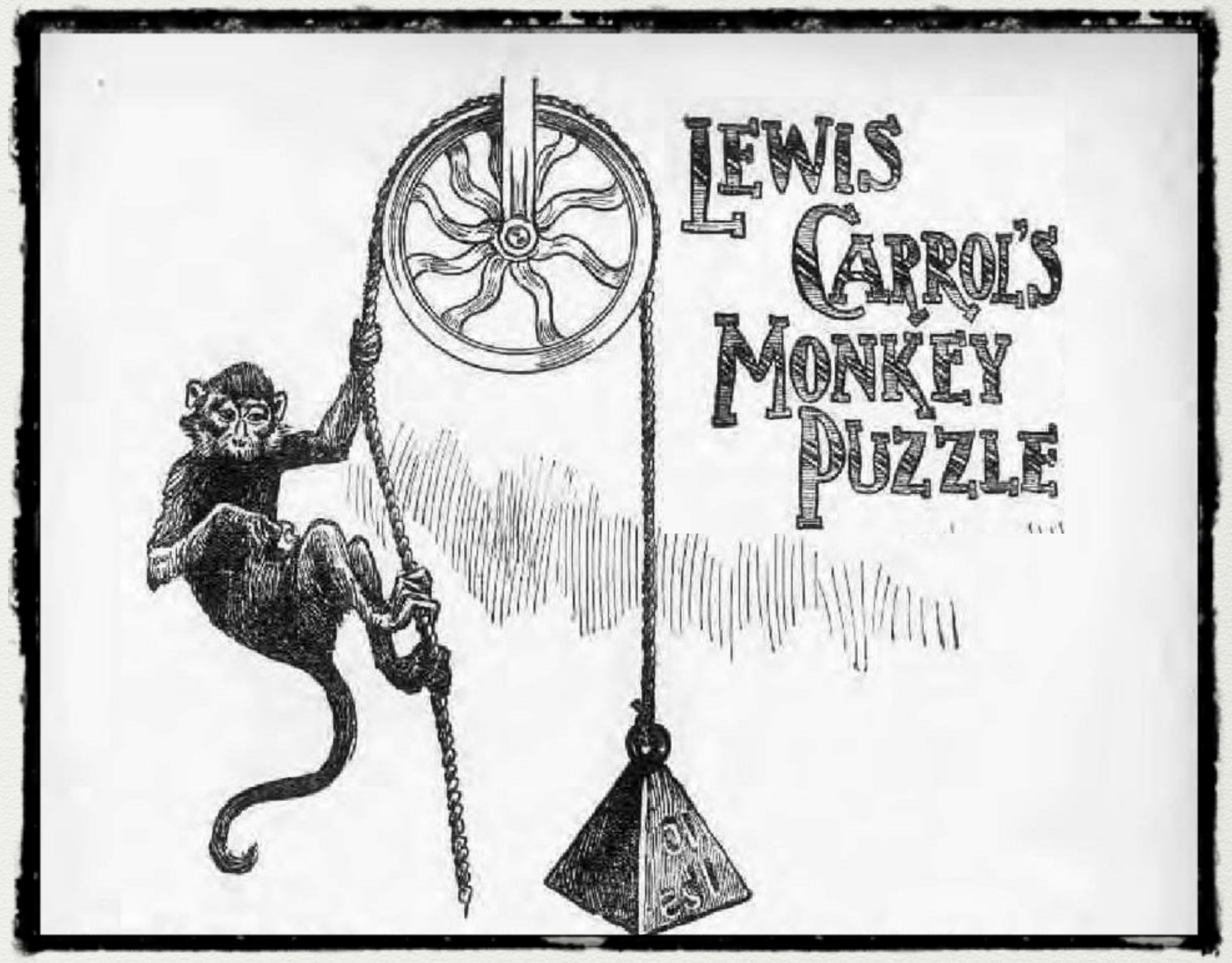
čítanie výsledku – pohybová rovnica

- vo všeobecnosti prestavuje vzťah pre a diferenciálnu rovnicu pre $\varphi(t)$
- vtip je v tom, že tiaže jednotlivých častí lana závisia od uhla φ
(okrem toho môže F závisieť od času, ak pôsobenie rukou meníme)
- vzhľadom na vzťah medzi zrýchlením a uhlovým zrýchlením dostávame

$$-\left(m_l + m_z + \frac{I}{r^2}\right) r\,\ddot{\varphi} = W - F(t) - G_A(\varphi) + G_B(\varphi) - \frac{M_s}{r}$$

- pre homogénne lano závisia G_A a G_B od φ lineárne (prečo?)
takže ak je M_s zanedbateľné alebo konštantné, dostali sme lineárnu dif. rovnicu, ktorú vieme riešiť (ale nebudeme to tu robiť, máme inú robotu)

opica na záver



- pre zrýchlenie závažia sme dostali
$$\left(m_l + m_z + \frac{I}{r^2}\right) a = W - F(t) - G_A + G_B - \frac{M_s}{r}$$

- opica pôsobí na lano silou $-F(t)$, čiže lano na opicu silou $F(t)$ a ešte na ňu pôsobí jej tiaž W_o, čiže $m_o a_o = F(t) - W_o$

- spolu máme $\left(m_l + m_z + \frac{I}{r^2}\right) a = W - m_o a_o - W_o - G_A + G_B - \frac{M_s}{r}$

- pôvodná rovnováha nám dáva $W - W_o - G_A + G_B - \frac{M_s}{r} = 0$

- takže na začiatku pohybu $\left(m_l + m_z + \frac{I}{r^2}\right) a = -m_o a_o$

- zrýchlenia sú merané pozdĺž lana (preto opačné znamienko)

ak zanedbáme hmotnosť lana aj kladky, dostaneme $a = -a_o$

ak nezanedbáme hmotnosť lana alebo kladky, dostaneme $a \neq -a_o$

hmotnosť lana aj kladky spôsobia, že opica sa pohybuje s väčším zrýchlením ako závažie