

TROJROZMERNÉ ROTÁCIE

mechanika tuhého telesa v 3D

porovnanie translácie hmotného bodu v 1D a 3D

hmotný bod v jednom rozmere

- poloha x
- rýchlosť $v = \dot{x}$
- pohybová rovnica $m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$
- hybnosť $p = mv$
- zmena hybnosti $\dot{p} = F$
- kinetická energia $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

hmotný bod v troch rozmeroch

- poloha \vec{r}
- rýchlosť $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$
- pohybová rovnica $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$
- hybnosť $\vec{p} = m\vec{v}$
- zmena hybnosti $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$
- kinetická energia $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

porovnanie rotácie tuhého telesa v 2D a 3D

tuhé teleso v dvoch rozmeroch

- orientácia φ
- uhlová rýchlosť $\omega = \dot{\varphi}$
- pohybová rovnica $I\ddot{\varphi} = M(\varphi, \dot{\varphi}, t)$
- iný zápis $\dot{L} = M$
- moment hybnosti $L = I\omega$
- kinetická energia $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$

tuhé teleso v troch rozmeroch

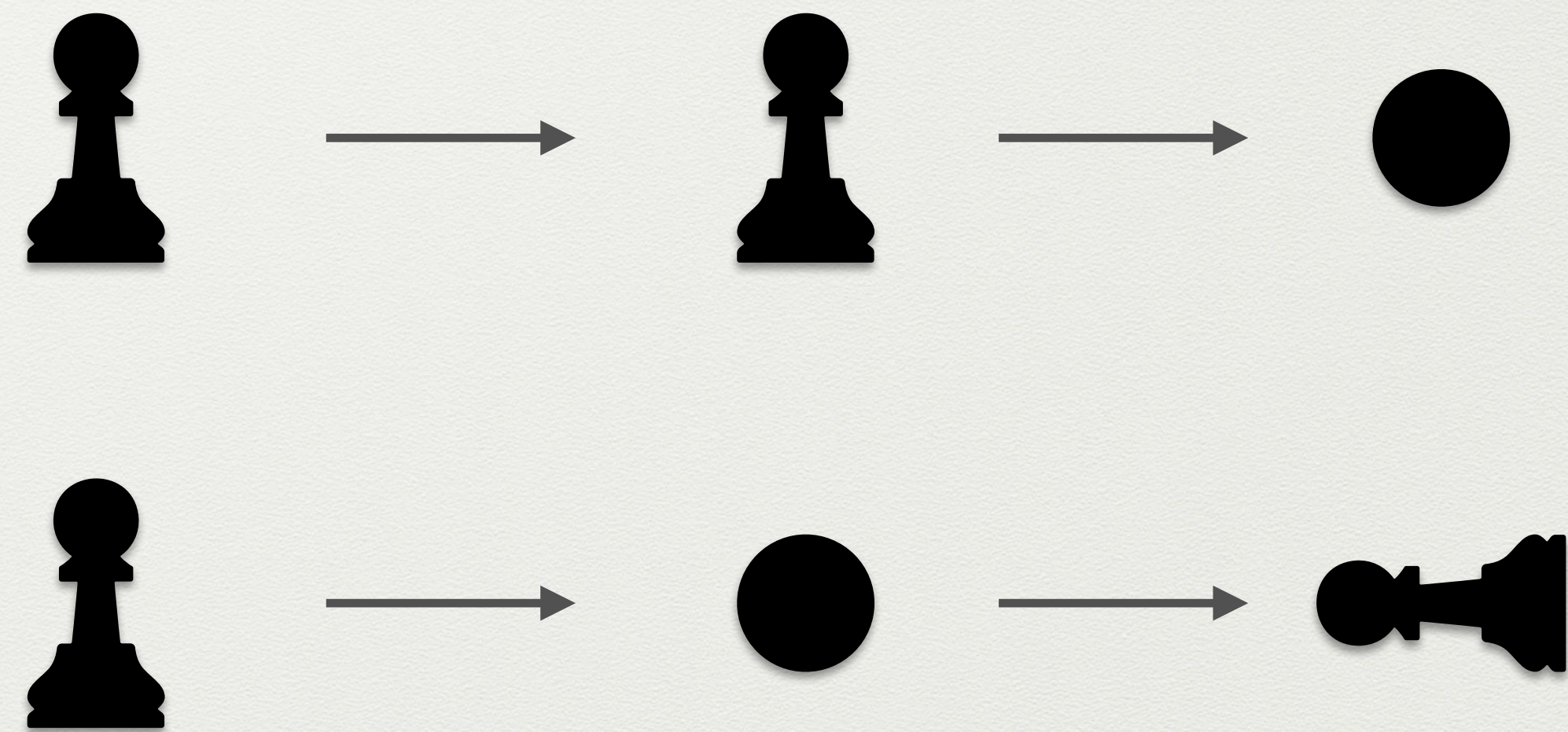
- orientácia ~~φ~~
- uhlová rýchlosť $\vec{\omega} = \dot{\varphi}$
- pohybová rovnica ~~$I\ddot{\varphi} = \vec{M}(\vec{\varphi}, \vec{\omega}, t)$~~
- iný zápis. $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$
- moment hybnosti $\vec{L} = I\vec{\omega}$
- kinetická energia $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$

základný problém

- orientácia telesa v 3-rozmernom priestore nie je určená vektorom
- je určená nejakou trojicou čísiel, možných výberov tejto trojice je niekoľko
- príklady výberu trojice čísiel (o ktorých si o chvíľu niečo málo povieme):
 - jeden jednotkový vektor (to sú dve čísla) a k nim ešte jeden uhol
 - tri uhly určujúce takzvanú maticu smerových cosínusov (bolo na *Algebre*)
 - tri takzvané Eulerove uhly (bude na *Teoretickej mechanike*)
- ani jedna z týchto trojíc však netvorí vektor
 - (v tom zmysle, že skladaniu rotácií v 3D nezodpovedá sčítavanie tých čísiel)
 - (a tiež v tom zmysle, že pri rotáciách sa tieto čísla nemenia ako zložky vektora)

prečo nie je orientácia v priestore vektor

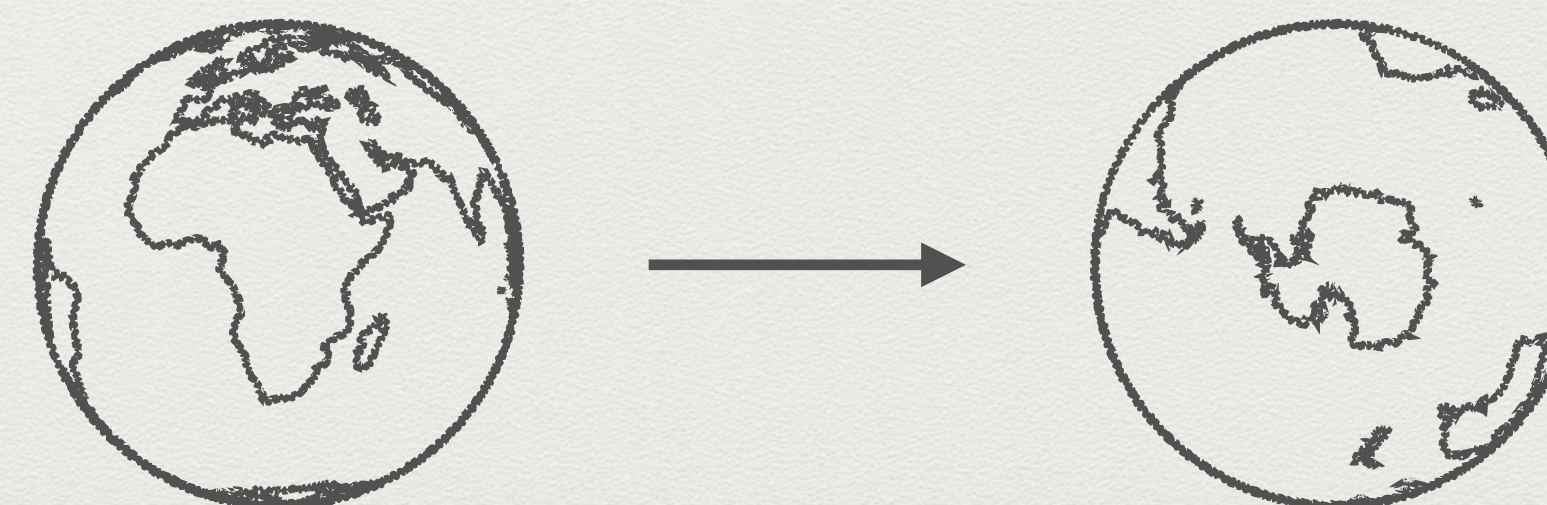
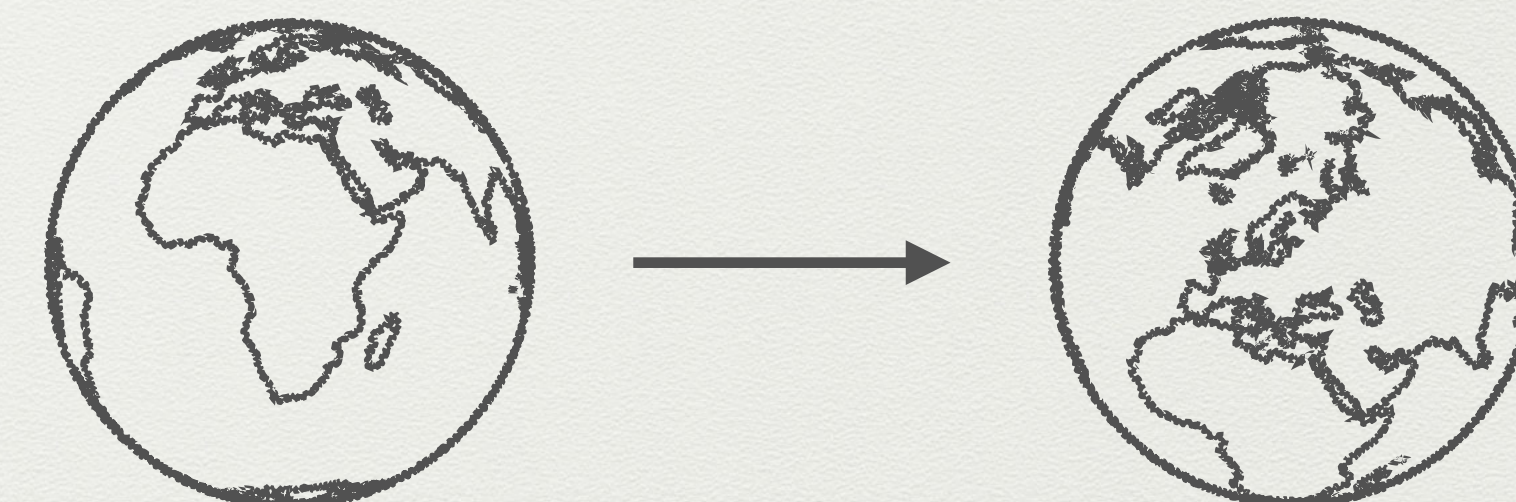
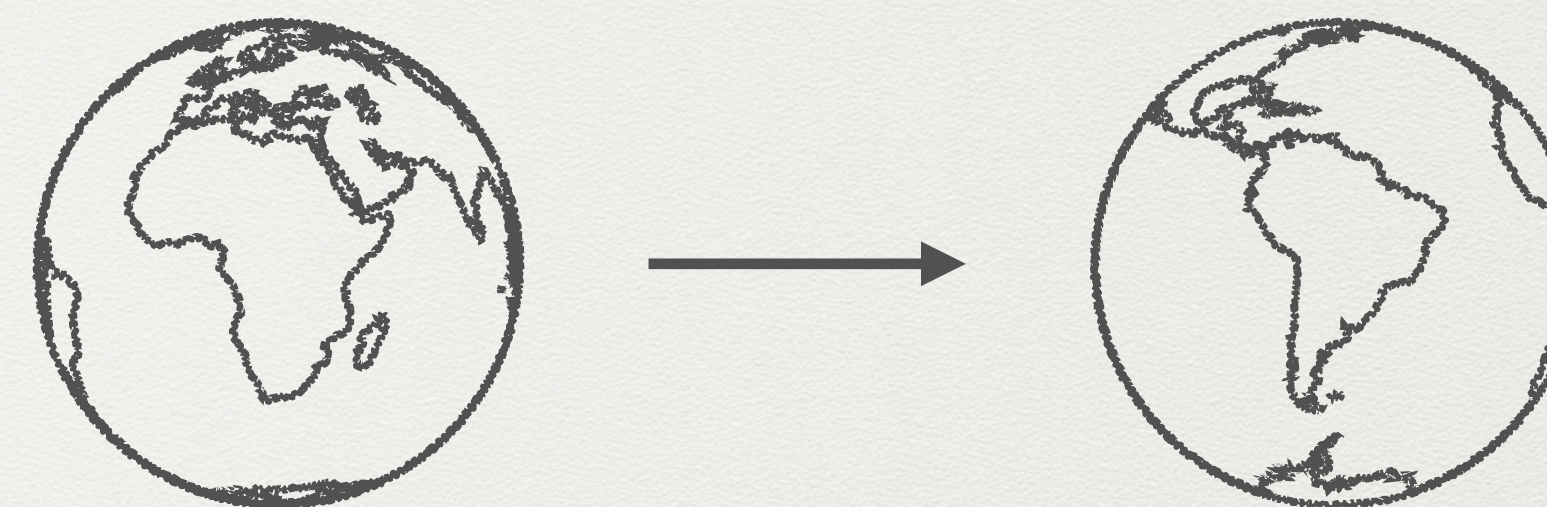
- pri skladaní vektorov nezáleží na poradí, ale pri skladaní rotácií záleží na poradí
- nech sa čierny pešiak otočí najprv o 90° okolo osi z potom o 90° okolo osi x
- a teraz nech sa otočí najprv o 90° okolo osi x potom o 90° okolo osi z
- skladanie vektorov nijako nedokáže zreprodukovat' túto vlastnosť rotácií



skladanie rotácií je nekomutatívne
skladanie vektorov je komutatívne

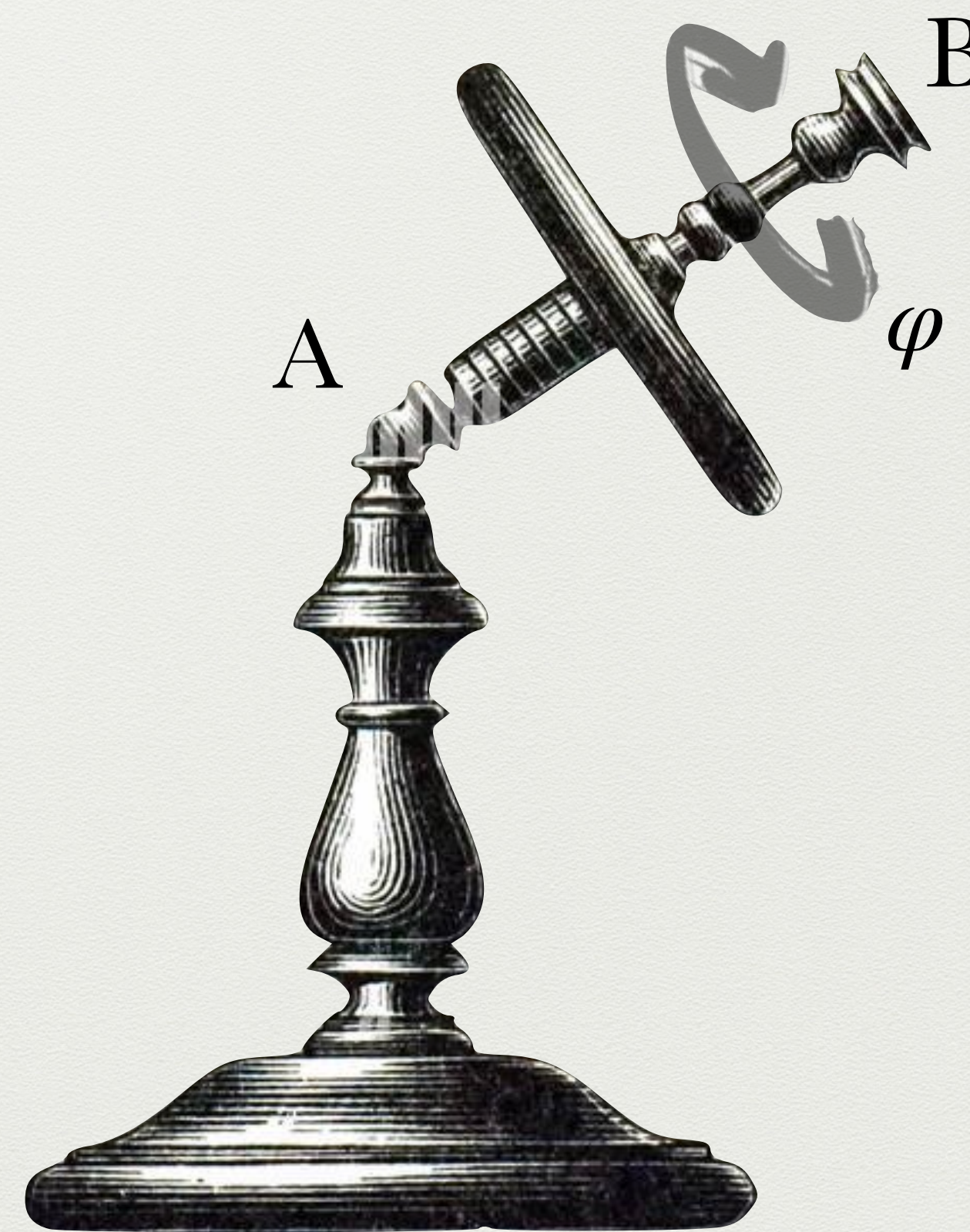
os rotácie a uhol rotácie okolo tejto osi

- orientáciu zotrvačníka sme opísali jednou osou a uhlom otočenia okolo tejto osi
- dá sa takýto opis použiť vždy?
- Eulerova veta: každá zmena orientácie tuhého telesa, pri ktorej sa jeden jeho bod nehýbe, je rotáciou okolo nejakej osi
- jednoduchá úloha: nájdite (stačí približne) osi rotácie a uhly otočenia okolo týchto osí pre konkrétne zmeny orientácie zemegule znázornené na obrázkoch



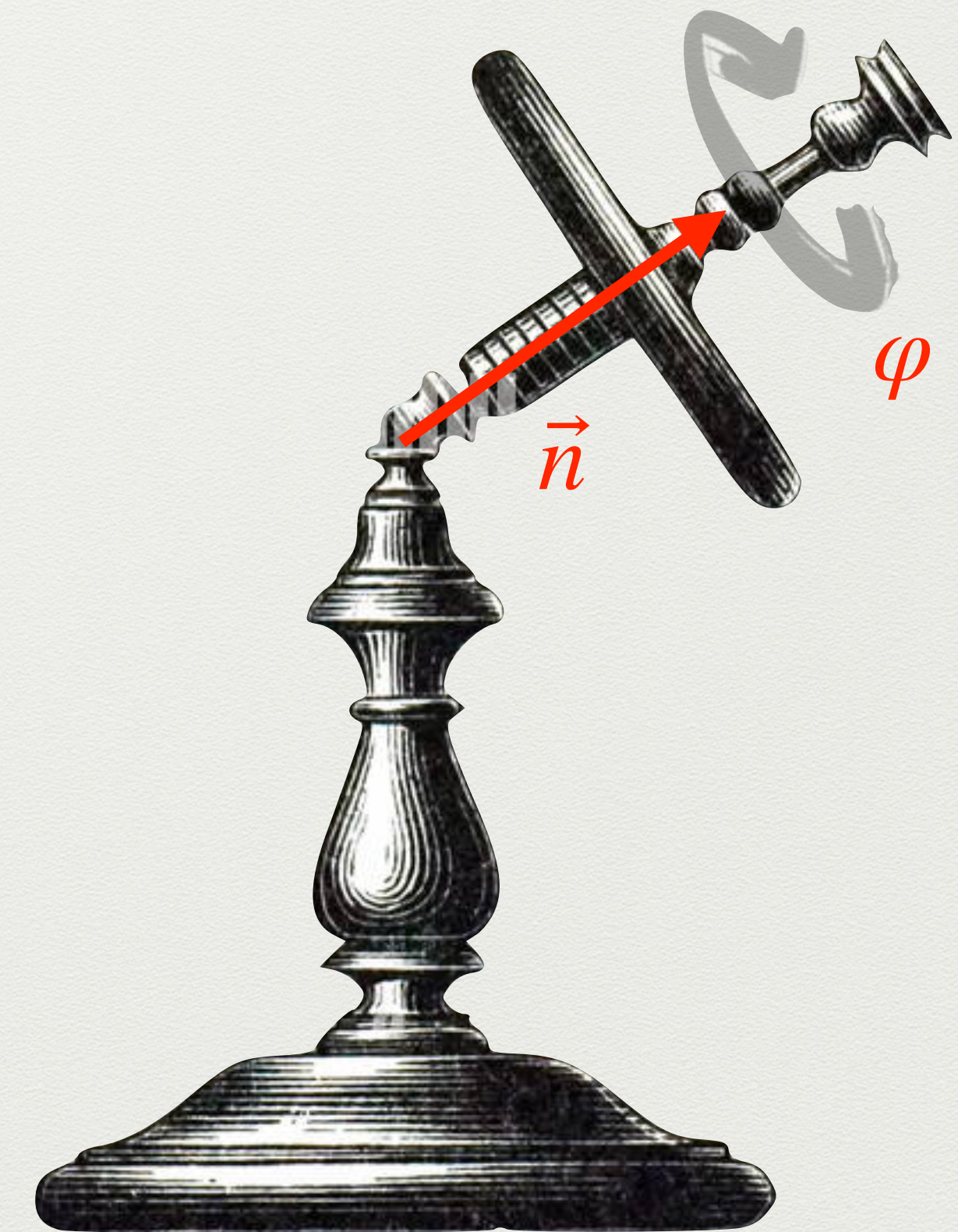
určenie orientácie telesa v priestore

- predstavme si, že poznáme polohu nejakého konkrétneho bodu A tuhého telesa a chceme určiť orientáciu tohto telesa v priestore
- jedna možnosť: určiť “zemepisnú šírku a dĺžku” nejakého iného konkrétneho bodu B a potom ešte uhol φ rotácie telesa okolo osi AB
- orientácia (celkové natočenie) je teda určená tromi uhlami a mohlo by sa zdať, že tieto tri čísla tvoria vektor
- ale netvoria – ani tieto tri, ani nijaké iné



rýchlosť zmeny orientácie telesa v priestore

- os a smer otočenia tuhého telesa môžeme charakterizovať jednotkovým vektorom \vec{n} , uhol tohto otočenia môžeme charakterizovať ďalším číslom φ
- táto trojica čísiel (dve nezávislé súradnice \vec{n} a číslo φ) nezodpovedajú nijakému vektoru
- postupnú zmenu orientácie telesa vyjadrujú funkcie $\vec{n}(t)$ a $\varphi(t)$
- rýchlosť zmeny orientácie telesa vyjadrujú derivácie $\dot{\vec{n}}(t)$ a $\dot{\varphi}(t)$
- prekvapko: $\vec{n}(t)$ (bez bodky) a $\dot{\varphi}(t)$ (s bodkou) tvoria vektor

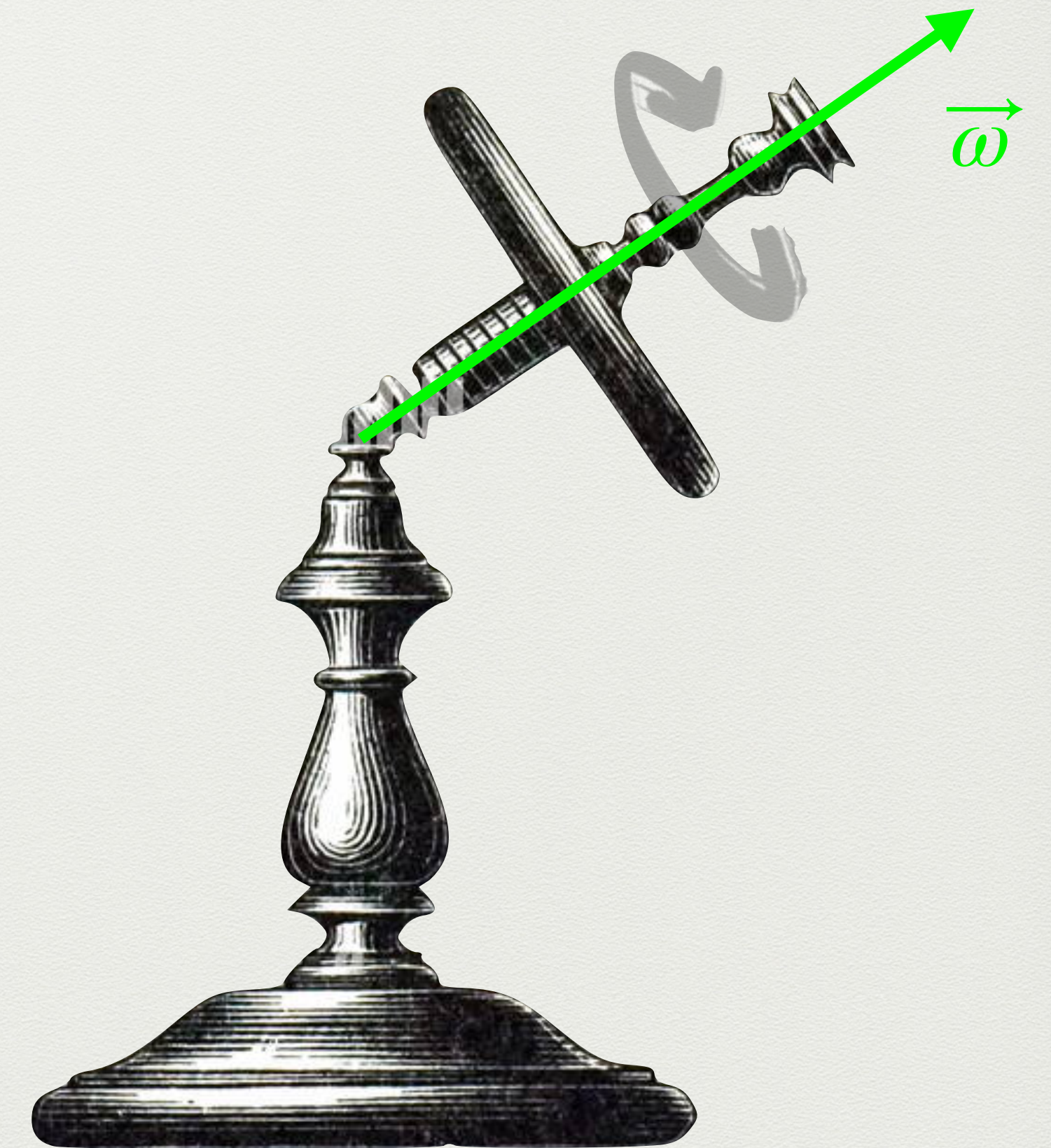


rýchlosť zmeny orientácie v priestore je vektor!

- keď sme skúmali rotujúce neinerciálne vzťažné sústavy, zaviedli sme si vektor uhlovej rýchlosti $\vec{\omega}$
- rotáciu tuhého telesa okolo konkrétnej osi môžeme opísať rovnakým vektorom $\vec{\omega}$ – jeho smer je daný vektorom $\vec{n}(t)$ a jeho veľkosť je daná číslom $\dot{\varphi}(t)$
- rýchlosť bodu tuhého telesa s polohovým vektorom \vec{r} je pri rotácii s uhlovou rýchlosťou $\vec{\omega}$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

- overte, že $\vec{\omega}$ na obrázku má pri kladnej interpretácii šípky rotácie správny smer (t.j. ukážte, že vektorový súčin naozaj dá správne rýchlosti bodov zotrvačníka)



nepovinná poznámka

- ak je uhlová rýchlosť (t.j. rýchlosť rotácie) vektor, potom pri skladaní týchto rýchlostí nemôže záležať na poradí (lebo pri skladaní vektorov na ňom nezáleží)
- ako je možné, že pri skladaní rotácií záleží na poradí, ale pri skladaní rýchlostí rotácií na poradí nezáleží?
- vtip je v tom, že pri rýchlostiach rotácií ide o malinké (infinitesimálne) rotácie, a tam sa nekomutatívnosť skladaní neprejaví, ako si teraz ukážeme
- pripomienka z lineárnej algebry: rotácie bázy sa dajú realizovať pomocou matice smerových cosínov
- skladaniu rotácií zodpovedá násobenie príslušných matic a to je nekomutatívne
- infinitesimálnym rotáciám zodpovedajú matice typu $1 + \epsilon$ respektíve $1 + \epsilon'$
- $(1 + \epsilon)(1 + \epsilon') = 1 + \epsilon + \epsilon' + \dots$
 $(1 + \epsilon')(1 + \epsilon) = 1 + \epsilon + \epsilon' + \dots$
no a \dots sú vyššieho rádu malosti

uhlová rýchlosť telesa a jeho moment hybnosti

- moment hybnosti:

$$\vec{L} = \sum_n \vec{r}_n \times \vec{p}_n = \sum_n \vec{r}_n \times m_n \vec{v}_n$$

- moment hybnosti tuhého telesa:

$$\vec{L} = \sum_n m_n \vec{r}_n \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)$$

- $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

- \vec{L} dostaneme tak, že $\vec{\omega}$ vložíme do mašinky

$$\sum_n m_n r_n^2 \llcorner - m_n \vec{r}_n (\vec{r}_n \cdot \llcorner)$$

- mašinku, ktorá vyrába \vec{L} z $\vec{\omega}$ nazývame moment zotrvačnosti a označujeme ju $\bar{\bar{I}}$

- na rozdiel od 2D rotácií mašinka $\bar{\bar{I}}$ nie je len násobenie nejakým konkrétnym číslom

- v súlade s 2D rotáciami je mašinka $\bar{\bar{I}}$ lineárna

$$\begin{aligned}\bar{\bar{I}}(\lambda \vec{\omega}) &= \lambda \bar{\bar{I}}(\vec{\omega}) \\ \bar{\bar{I}}(\vec{\omega} + \vec{\omega}') &= \bar{\bar{I}}(\vec{\omega}) + \bar{\bar{I}}(\vec{\omega}')\end{aligned}$$

(dôkaz: pozriem – vidím, ale naozaj pozrite)

- lineárnej mašinke, ktorá vyrába z vektora vektor, sa hovorí **tenzor** (druhého rádu)

uhlová rychlost tělesa a jeho kinetická energie

- kinetická energie:

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_n m_n \vec{v}_n^2$$

- moment hybnosti tuhého tělesa:

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_n m_n (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)^2$$

- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$

- čiže

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_n m_n (\omega^2 r_n^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_n)^2)$$

- kinetickou energii teda dostaneme tak, že $\vec{\omega}$ vložíme (dvakrát) do mašinky

$$\frac{1}{2} \sum_n m_n r_n^2 \perp \cdot \perp - m_n (\vec{r}_n \cdot \perp)(\vec{r}_n \cdot \perp)$$

- toto můžeme zapísat aj ako (přemyslete si, že je to naozaj pravda)

$$\frac{1}{2} \perp \cdot \left(\sum_n m_n r_n^2 \perp - m_n \vec{r}_n (\vec{r}_n \cdot \perp) \right)$$

- a toto vlastne znamená

$$E_k = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{I}(\vec{\omega})$$

reklama na tenzory

- tenzor momentu zotrvačnosti je asi prvý tenzor, s ktorým sa študent fyziky stretne
- ale rozhodne nie je posledný
- mnohé dôležité fyzikálne veličiny sú tenzory
- niekoľko príkladov:
tenzor napätí a tenzor deformácie v teórii pružnosti, tenzor toku hybnosti elmag poľa, tenzor permitivity v anizotropných látkach, metrický tenzor v teórii relativity, ...
- to, čo sme nazvali tenzormi (lineárne zobrazenia vektorov do vektorov) sú prísne vzaté tenzory druhého rádu
- lineárne zobrazenia, ktoré priradujú tenzorom (druhého rádu) tenzory (druhého rádu), sa nazývajú tenzormi štvrtého rádu (podobne sú definované tenzory iných rádov)
- tenzory vyšších rádov sa tiež vo fyzike občas vyskytujú, typickými príkladmi sú tenzor tuhosti v teórii pružnosti alebo Riemannov tenzor krivosti vo všeobecnej teórii relativity

moment zotrvačnosti v kartézskych súradniciach

- vzťah medzi súradnicami \vec{L} a $\vec{\omega}$

$$L_x = \sum m_n r_n^2 \omega_x - m_n x_n (x_n \omega_x + y_n \omega_y + z_n \omega_z)$$

$$L_y = \sum m_n r_n^2 \omega_y - m_n y_n (x_n \omega_x + y_n \omega_y + z_n \omega_z)$$

$$L_z = \sum m_n r_n^2 \omega_z - m_n z_n (x_n \omega_x + y_n \omega_y + z_n \omega_z)$$

- tento neprehľadný zápis sa často nahrádza maticovým zápisom, ktorý v skutočnosti nie je o nič prehľadnejší, ale aspoň sa tak snaží tváriť

- maticový zápis

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

- čo sa často zapisuje ako $\vec{L} = \bar{I} \vec{\omega}$, kde

$$\bar{I} = \begin{pmatrix} \sum_n m_n (y_n^2 + z_n^2) & -\sum_n m_n x_n y_n & -\sum_n m_n x_n z_n \\ -\sum_n m_n y_n x_n & \sum_n m_n (x_n^2 + z_n^2) & -\sum_n m_n y_n z_n \\ -\sum_n m_n z_n x_n & -\sum_n m_n z_n y_n & \sum_n m_n (x_n^2 + y_n^2) \end{pmatrix}$$

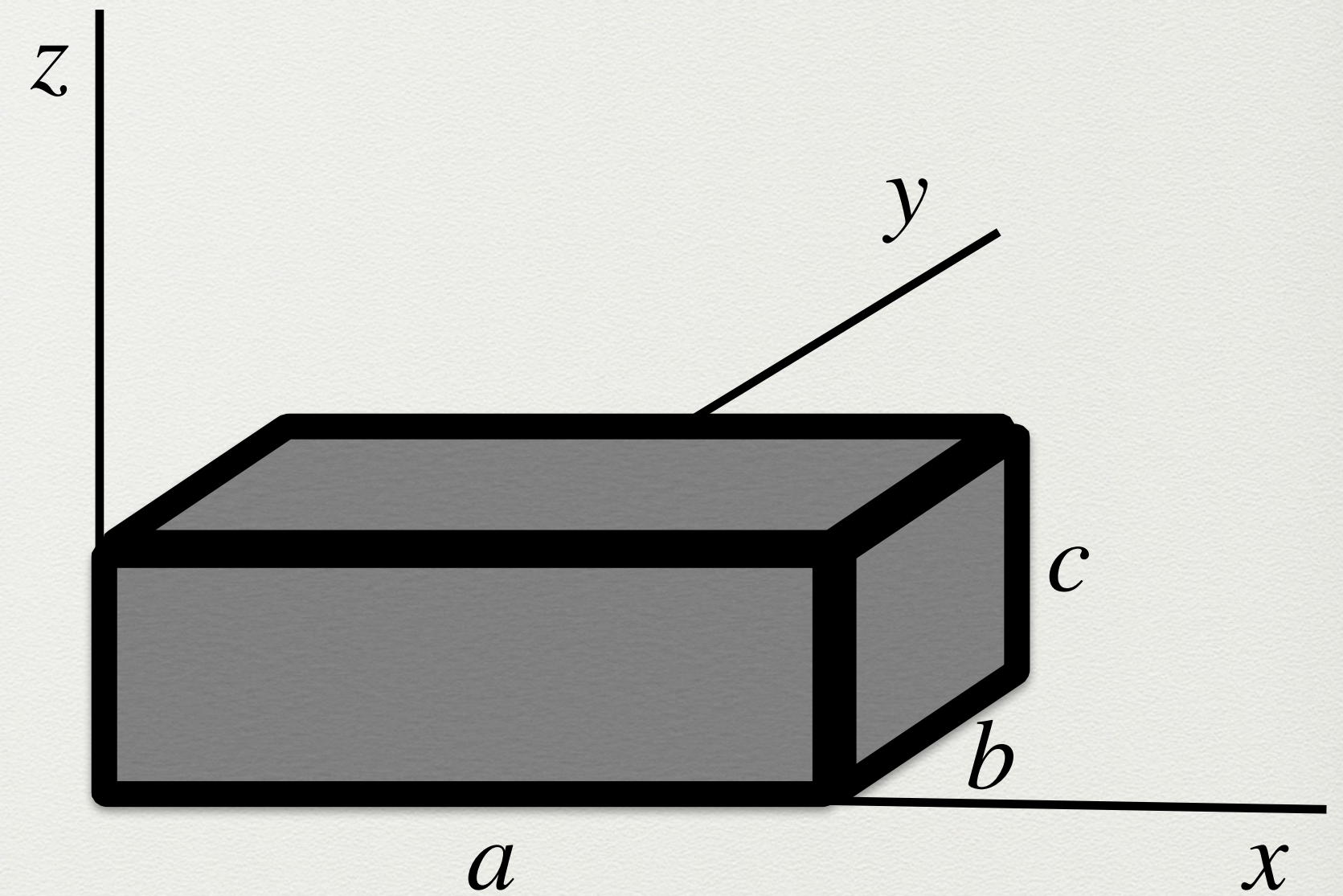
výpočet zložiek momentu zotrvačnosti – príklad

homogénny kváder na obrázku

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_0^a \int_0^b \int_0^c \rho \cdot (y^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^b \int_0^c \rho a (y^2 + z^2) dy dz = \\ &= \int_0^c \rho a \left(\frac{1}{3} b^3 + bz^2 \right) dz = \frac{1}{3} \rho (ab^3c + abc^3) = \frac{1}{3} m (b^2 + c^2) \end{aligned}$$

$$I_{xy} = - \int_0^a \int_0^b \int_0^c \rho \cdot xy dx dy dz = -\frac{1}{4} \rho a^2 b^2 c = -\frac{1}{4} m ab \quad I_{xz} = -\frac{1}{4} m ac$$

$$I_{yx} = I_{xy} \quad I_{yy} = \frac{1}{3} m (a^2 + c^2) \quad I_{yz} = -\frac{1}{4} m bc \quad I_{zx} = I_{xz} \quad I_{zy} = I_{yz} \quad I_{zz} = \frac{1}{3} m (a^2 + b^2)$$



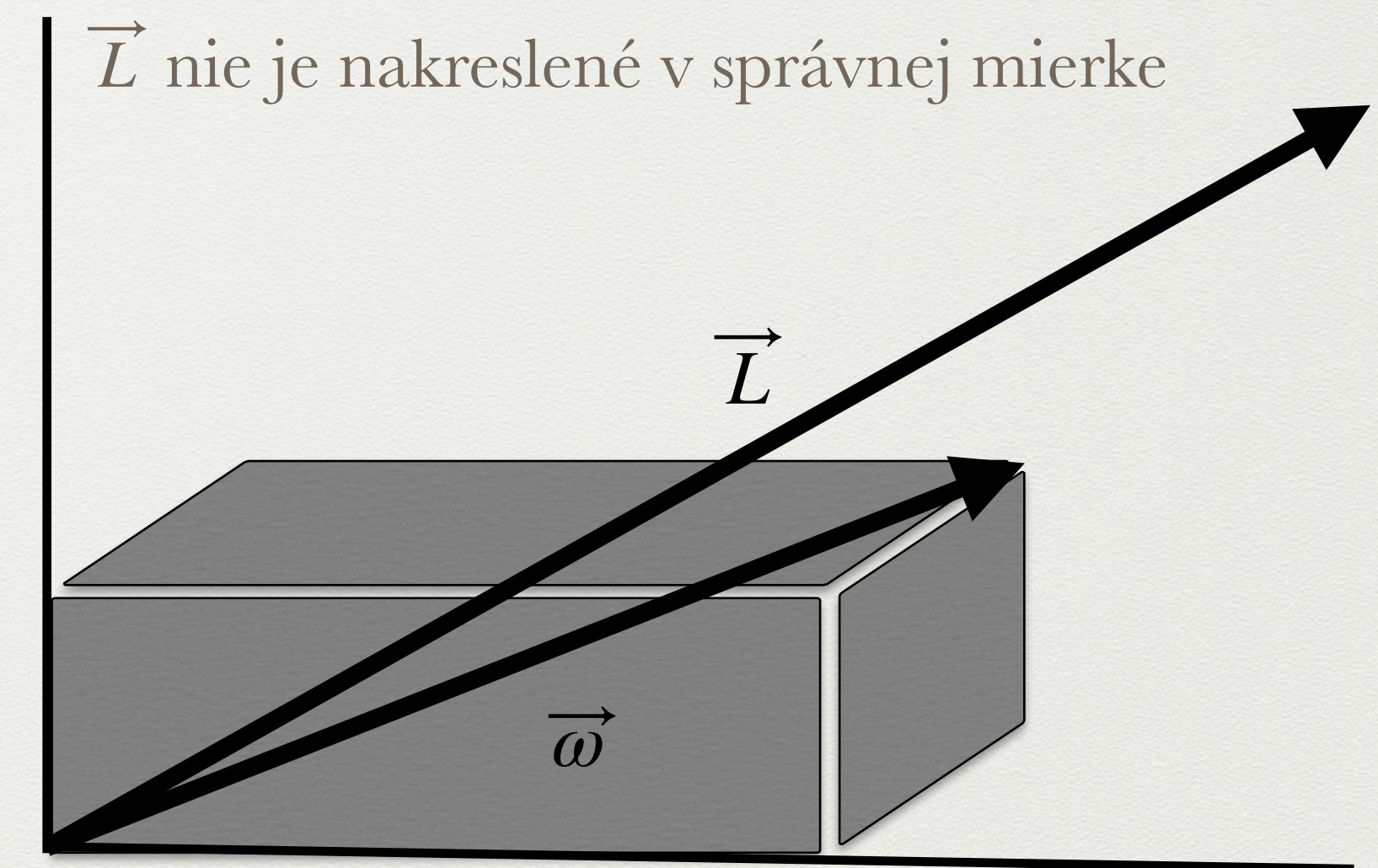
významný dôsledok faktu, že $\bar{\bar{I}}$ je tenzor

- vezmime v predchádzajúcom príklade
 $\rho = 1$ $a = 3$ $b = 2$ $c = 1$
(v správnych fyzikálnych jednotkách)

$$\bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} 10 & -9 & -\frac{9}{2} \\ -9 & 20 & -3 \\ -\frac{9}{2} & -3 & 26 \end{pmatrix}$$

- rotácia okolo telesovej uhlopriečky s $\omega = \sqrt{14}$

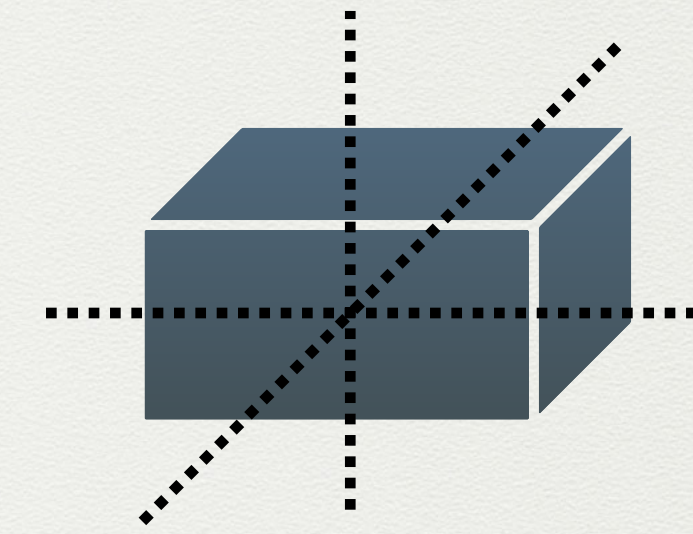
$$\vec{L} = \bar{\bar{I}} \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 10 & -9 & -4.5 \\ -9 & 20 & -3 \\ -4.5 & -3 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.5 \\ 10 \\ 6.5 \end{pmatrix}$$



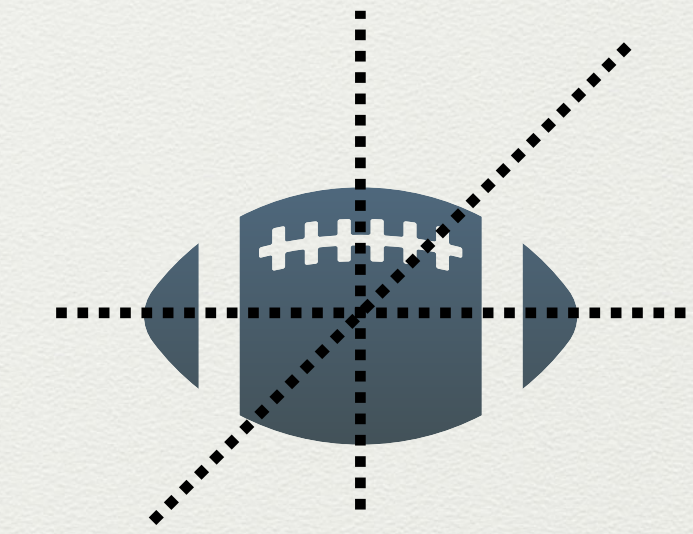
veľmi dôležitý fakt:
vektory \vec{L} a $\vec{\omega}$
často nie sú rovnobežné

hlavné osi tenzora momentu zotrvačnosti

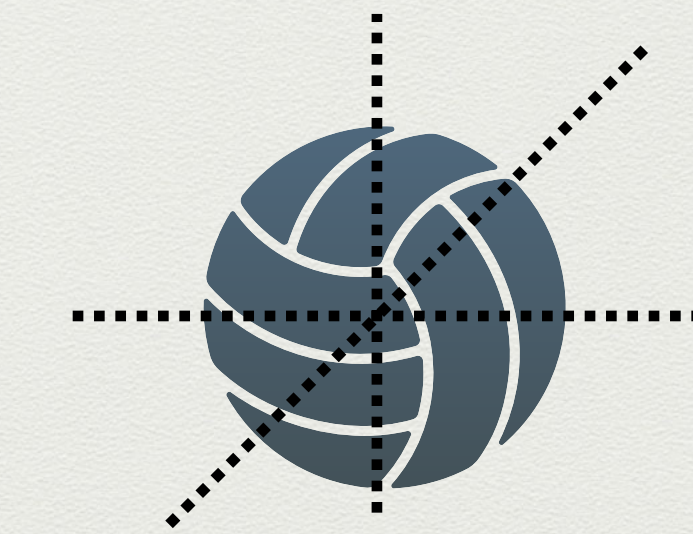
- tenzoru \bar{I} zodpovedá symetrická matica (pozri definíciu)
symetrické matice sa dajú diagonalizovať (dá sa nájsť taká ortonormálna báza, v ktorej je daná matica diagonálna)
- ak je tuhé teleso rotačne symetrické (prejde samo na seba pri rotáciách okolo jednej konkrétnej priamky), potom ak zvolíme os x v smere tejto priamky, dostaneme $I_{yy} = I_{zz}$
- ak je tuhé teleso sféricky symetrické (prejde samo na seba pri rotáciách okolo všetkých priamok prechádzajúcich jedným bodom), potom dostaneme $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$
- smery osí, v ktorých je matica zodpovedajúca tenzoru \bar{I} diagonálna, nazývame hlavnými smermi tenzora \bar{I} ,
pre $\vec{\omega}$ v niektorom z hlavných smerov tenzora \bar{I} platí $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$



$$\begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$



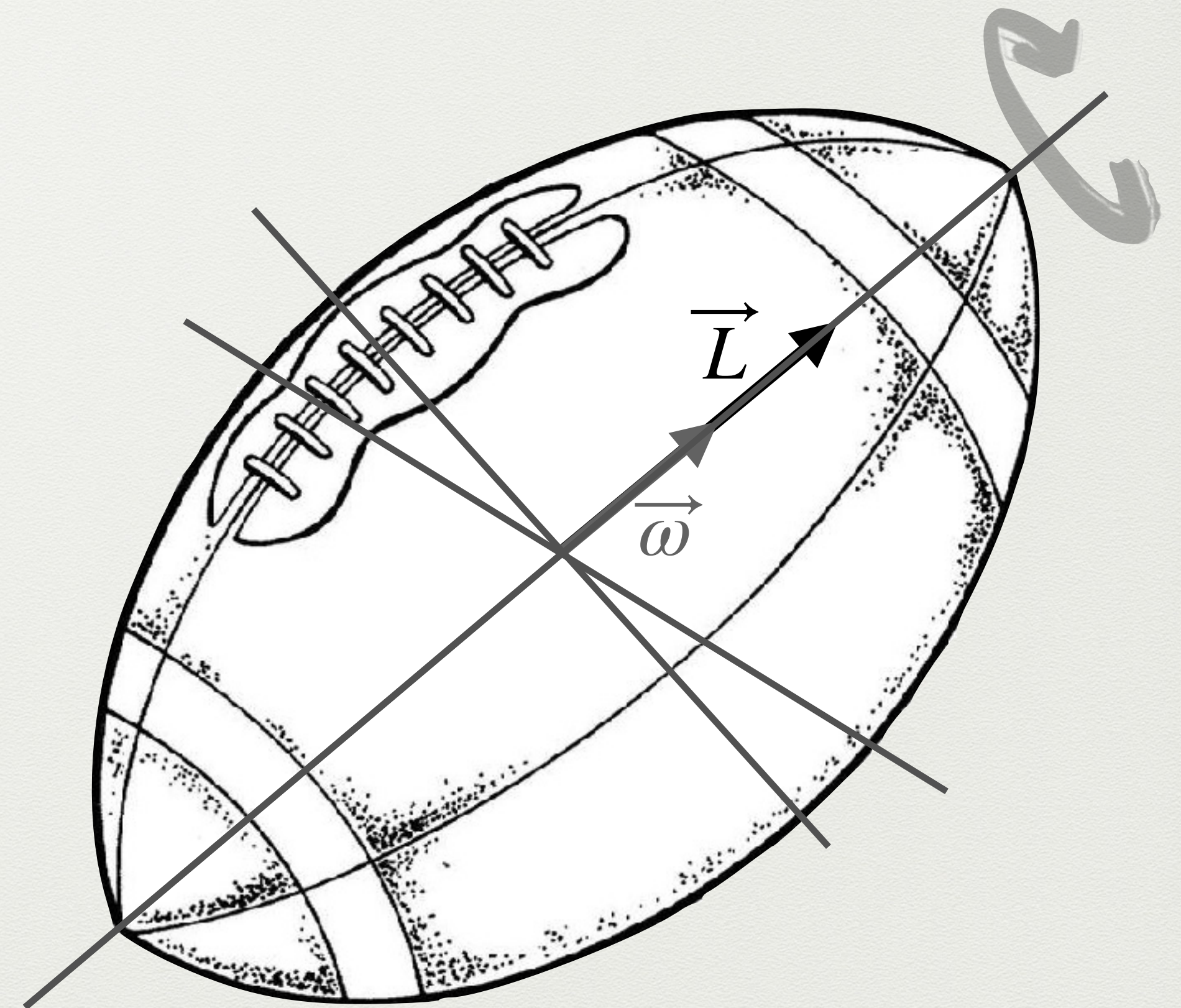
$$\begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{yy} \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & I_{xx} \end{pmatrix}$$

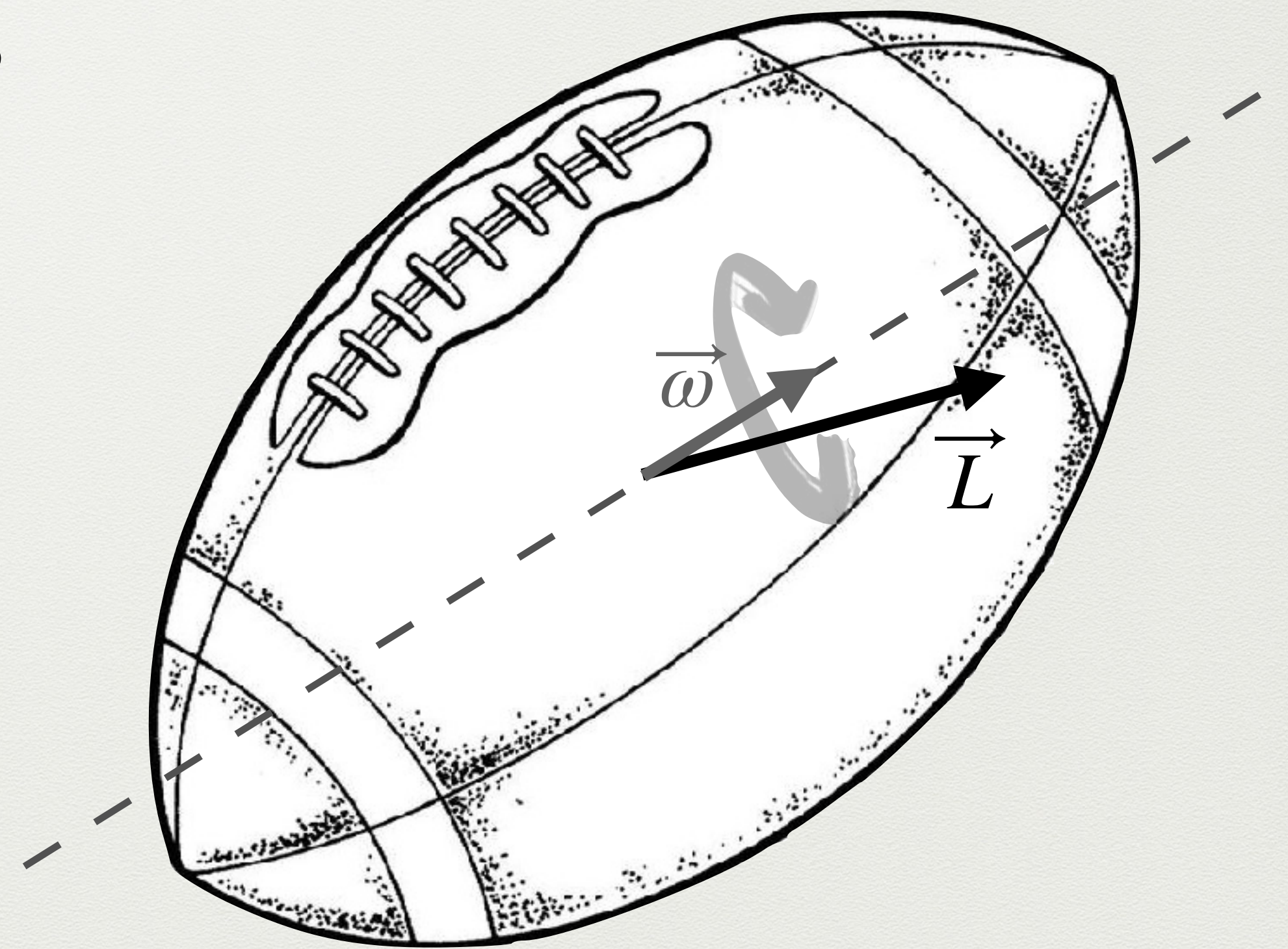
jednoduchá rotácia v špeciálnom prípade

- ak teleso rotuje okolo jednej zo svojich hlavných osí, moment hybnosti je rovnobežný s vektorom uhlovej rýchlosti a celý opis rotácie sa veľmi zjednoduší
- opis takýchto rotácií sa niekedy v podstate zredukuje na opis 2D rotácií (kedy a v akom zmysle to platí, si povieme na budúcej prednáške)
- podobne jednoduché sú aj rotácie okolo pevnej osi (ktorá môže, ale nemusí mať smer hlavnej osi telesa)
- vo všeobecnosti sú však rotácie v 3D oveľa zložitejšie (a pre nás prvákov, bohužiaľ, až príliš zložité)



zložitejšia rotácia vo všeobecnejšom prípade

- vektory $\vec{L} = \bar{I} \vec{\omega}$ a $\vec{\omega}$ vo všeobecnosti nemusia byť (a zväčša ani nie sú) rovnobežné, čo vnáša do hry veľa rôznych komplikácií
- niečo sa o takýchto všeobecnejších rotáciách dá povedať z rovnice pre moment hybnosti
$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}$$
- ale aj toto vie byť pomerne zložitá rovnica (pričom komplikovanejšie pohybové rovnice pre orientáciu telesa sme sa tu ani nepokúsili napísať – nechali sme to na Teoretickú mech.)



čo je ťažké na rovnici $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ pre tuhé teleso?

- ak do tejto rovnice dosadíme $\vec{L} = \bar{\bar{I}} \vec{\omega}$ dostaneme $\dot{\bar{\bar{I}}} \vec{\omega} + \bar{\bar{I}} \dot{\vec{\omega}} = \vec{M}$
- na rozdiel od hmotnosti sa totiž moment zotrvačnosti $\bar{\bar{I}}$ telesa mení, ak sa mení poloha a orientácia telesa v priestore
- my však nemáme rovnicu pre časový vývoj orientácie telesa (zatiaľ ju naozaj nemáme), tak ako môžeme vypočítať $\bar{\bar{I}}$ a rýchlosť jeho zmeny?
- od polohy a orientácie telesa navyše závisí aj moment sily \vec{M} , takže ani ten vlastne bez riešenia rovnice pre orientáciu telesa nepoznáme
- zdá sa teda, že rovnica $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ sa sama osebe vôbec nedá riešiť

svetielko nádeje na záver

- aj keď to vyzerá dosť beznádejne, predsa len dokážeme nejaké dôležité a zaujímavé veci o 3D rotáciách tuhých telies nahliadnuť aj z rovnice

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}$$

- väčšinou však pôjde len o kvalitatívne (prípadne semikvantitatívne) úvahy
- ale aj také postupy bývajú vo fyzike dosť užitočné (najmä ak presnejšie výsledky získať nevieme, alebo vieme len s podstatne väčšou námahou)
- ale to vlastne nie je nič nové, tak je so zákonmi (ne)zachovania často