KOLESÁ (A INÉ TELESÁ) V 3D

niekoľko dôležitých príkladov priestorových rotácií

zhrnutie minulej prednášky

- stav tuhého telesa je určený polohou jedného bodu a orientáciou v 3D
- orientáciu telesa v 3D určujú tri čísla, ktoré však netvoria vektor
- formálnemu opisu orientácie sme sa poriadne nevenovali (niečo málo sme si povedali, zvyšok sme nechali na prednášku z Teoretickej mech.)
- tým pádom sme ani neodvodili pohybové rovnice pre tuhé teleso v 3D
- takže máme k dispozícii len rovnicu (ne)zachovania momentu hybnosti

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M} \quad \Rightarrow \quad \dot{\bar{\bar{I}}}\,\vec{\omega} + \bar{\bar{I}}\,\dot{\vec{\omega}} = \vec{M}$$

stačí rovnica $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ na popis rotácií tuhého telesa?

- <u>nie, nestačí</u>, pretože moment sily závisí od polohy a orientácie telesa
- v plnom znení vyzerá rovnica takto: $\dot{\vec{L}}(t) = \vec{M}\left(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), \text{orientacia}(t), \vec{\omega}(t)\right)$
  kde $\vec{r}$, $\dot{\vec{r}}$ sú poloha a rýchlosť niektorého bodu telesa, prípadne hmotného stredu
- samotná táto diferenciálna rovnica nám nemôže "vydať" neznámu funkciu $\vec{\omega}(t)$, pretože okrem nej obsahuje aj iné neznáme funkcie
- okrem toho, ak vyjadríme $\vec{L}$ cez $\vec{\omega}$, do rovnice vstúpi aj moment zotrvačnosti $\bar{\bar{I}}$, ktorý tiež závisí od polohy a orientácie telesa

a na čo teda rovnica $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ stačí?

- ako všetky zákony (ne)zachovania nám umožní nahliadnuť niektoré dôležité veci bez riešenia pohybových rovníc (tentoraz dokonca aj bez ich napísania)
- ukážeme si to na príklade 3D telesa upevneného v dvoch bodoch (rotácia okolo pevnej osi), v jednom bode (precesia detského vĺčika, zatáčanie nakloneného kolesa) a v žiadnom bode (precesia zemegule, salto s vrutom tenisovej rakety)
- v prvom prípade si vyjasníme, prečo sa niektoré 3D rotácie dajú popisovať formalizmom 2D rotácií a prečo to platí len do istej miery, v druhom prípade pochopíme niečo z mágie 2D rotácií, v treťom prípade pochopíme, že veľa vecí sa bez napísania a vyriešenia skutočných pohybových rovníc pochopiť nedá

rotácia okolo pevnej osi

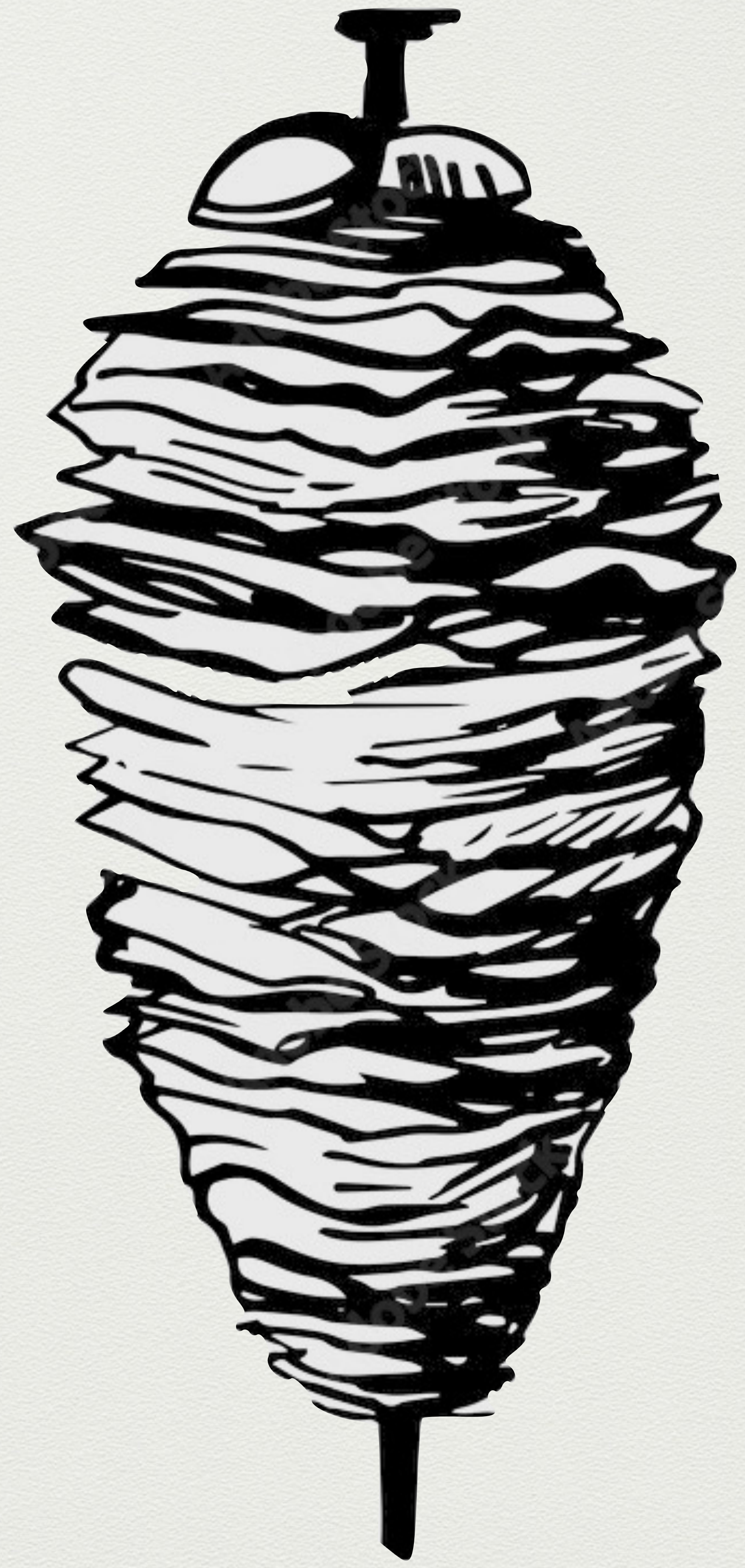
- teleso rotujúce okolo pevnej osi si môžeme predstaviť ako kebab, t.j. ako nakrájané na tenké plátky rotujúce okolo bodov ležacich na osi otáčania celého telesa (plátky očíslujeme indexom n)

- pre každý plátok platí rovnica pre 2-rozmerné rotácie $I_n \dot{\omega} = M_n$ (pre tuhé teleso sú uhlové rýchlosti všetkých plátkov rovnaké)

- medzi plátkami pôsobia rôzne komplikované sily, ktorých sa môžeme zbaviť štandardným trikom – sčítaním cez celé teleso

$$I \dot{\omega} = M$$

kde I je súčet momentov zotrvačnosti jednotlivých plátkov a M je výsledný moment sily v smere osi otáčania



od súm cez plátky k sumám cez hmotné body

- pre 3D rotácie okolo pevnej osi sme dostali akoby rovnicu pre 2D rotácie:

$$I\,\dot{\omega} = M$$

- momenty *I* a *M* sme našli rozložením telesa na plátky kolmé na os otáčania
- celkové momenty sú sumy cez plátky (ktoré sú číslované indexom *n*)

$$I = \sum_n I_n \qquad M = \sum_n M_n^{\text{vonk}}$$

- čo prepíšeme ako sumy nie cez plátky, ale cez jednotlivé hmotné body telesa

- pre každý plátok platí (premyslite si to)

$$I_n = \sum_i m_i\,\rho_i^2 \qquad \text{cez } n\text{-tý plátok}$$

$$M_n = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)\big|_{\text{v smere osi rotacie}} \qquad \text{cez } n\text{-tý plátok}$$

kde ρ_i je vzdialenosť *i*-teho bodu od osi rotácie

- spolu teda

$$I = \sum_i m_i\,\rho_i^2$$

$$M = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{vonk}})\big|_{\text{v smere osi rotacie}}$$

kde sumy idú <u>cez všetky hmotné body</u> telesa

to isté inak

- dá sa dostať naša akoby 2D rovnica pre rotácie okolo pevnej osi priamo zo skutočnej 3D rovnice $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$?
- isteže dá, a je to celkom užitočné
- stačí urobiť priemet tej 3D rovnice do smeru osi otáčania, t.j. vynásobiť obe jej strany skalárne jednotkovým vektorom $\vec{n}$ v smere tej osi
$$\vec{n} \cdot \dot{\vec{L}} = \vec{n} \cdot \vec{M}$$
- a teraz príde na rad niekoľko trikov
- $\frac{d}{dt}\vec{n} \cdot \vec{L} = \dot{\vec{n}} \cdot \vec{L} + \vec{n} \cdot \dot{\vec{L}} = \vec{n} \cdot \dot{\vec{L}}$
pretože pre pevnú os $\dot{\vec{n}} = 0$
- $\vec{n} \cdot \vec{L} = \vec{n} \cdot \bar{\bar{I}}(\vec{\omega}) = \vec{n} \cdot \bar{\bar{I}}(\vec{n})\ \omega$
pretože $\bar{\bar{I}}$ je lineárne zobrazenie
- $I = \vec{n} \cdot \bar{\bar{I}}(\vec{n})$ sa pri rotáciách okolo pevnej osi nemení (pretože $\dot{\vec{n}} = 0$)
- a ak ešte označíme $M = \vec{n} \cdot \vec{M}$ tak
$$I\,\dot{\omega} = M$$

a je to naozaj to isté?

- pre 3D rotácie okolo pevnej osi sme dostali dvomi rôznymi spôsobmi rovnicu $I\dot{\omega} = M$
- ale neukázali sme, že je to naozaj tá istá rovnica (t.j. že máme tie isté I a M v obidvoch odvodeniach)
- ukážte, že M je rovnaké v obidvoch odvodeniach (pozriem - vidím)
- je aj konštanta I rovnaká v obidvoch odvodeniach? (toto už nie je očividné)
- vypočítajte $I = \vec{n} \cdot \bar{\bar{I}}(\vec{n})$ pre vektor $\vec{n}$ v smere osi z a ukážte, že v tomto prípade dostaneme $I = \sum_i m_i \rho_i^2$
- premyslite si, že toto už je všeobecný dôkaz rovnosti konštánt I v dvoch rôznych odvodeniach 2D rovnice
- pre tuhé teleso s tenzorom momentu zotrvačnosti $\bar{\bar{I}}$ je jeho moment zotrvačnosti pri rotáciách okolo pevnej osi $\vec{n}$ rovný $I = \vec{n} \cdot \bar{\bar{I}}(\vec{n})$

zmena $\overrightarrow{L}$ pri rovnomernej rotácii okolo pevnej osi

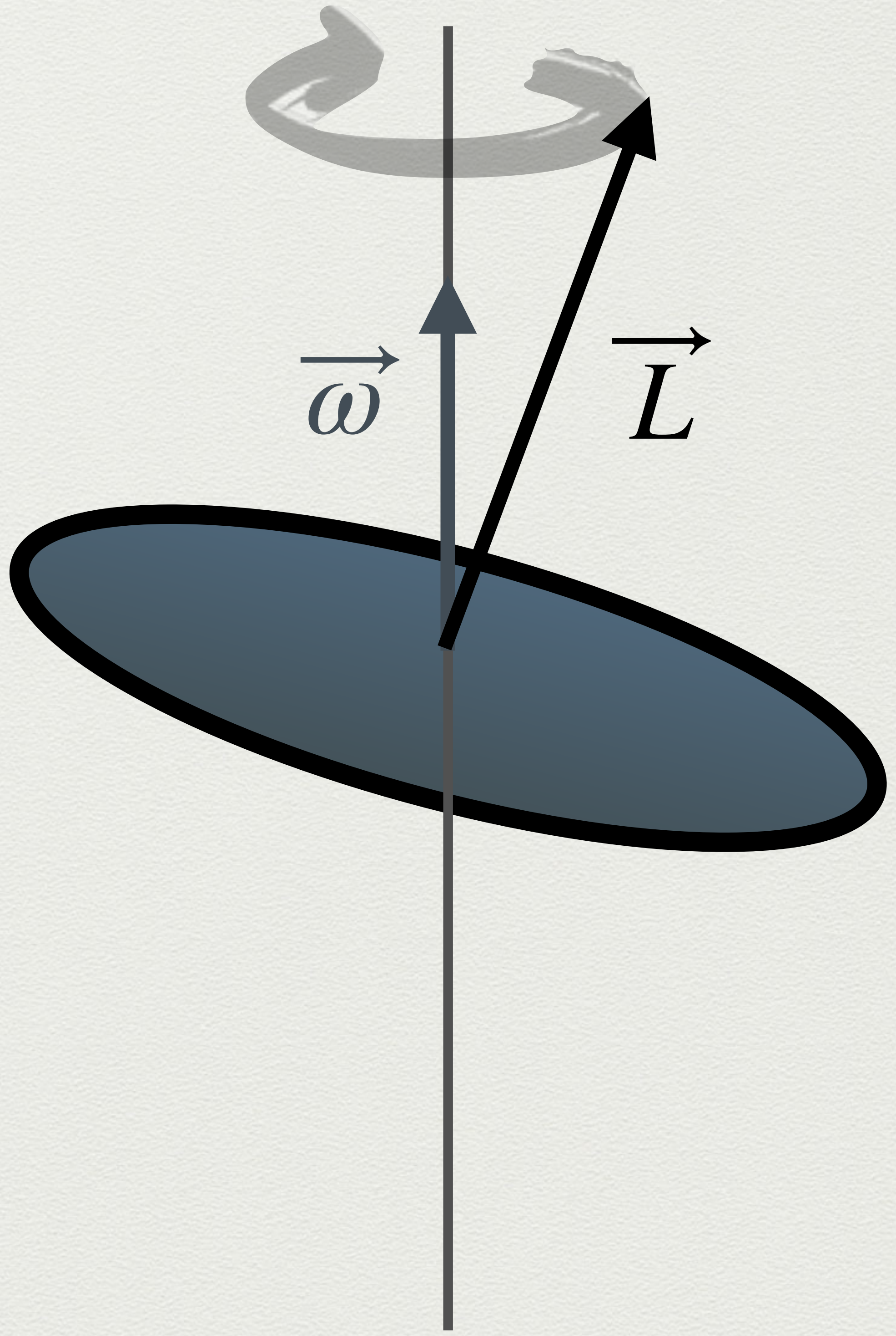
- predstavme si teraz teleso rovnomerne rotujúce okolo pevnej osi, ktorá však nie je totožná s niektorou z jeho hlavných osí

- v takom prípade nebude moment hybnosti tohto telesa smerovať rovnobežne s vektorom jeho uhlovej rýchlosti

$$\overrightarrow{L} = \bar{\bar{I}}(\overrightarrow{\omega}) \nparallel \overrightarrow{\omega}$$

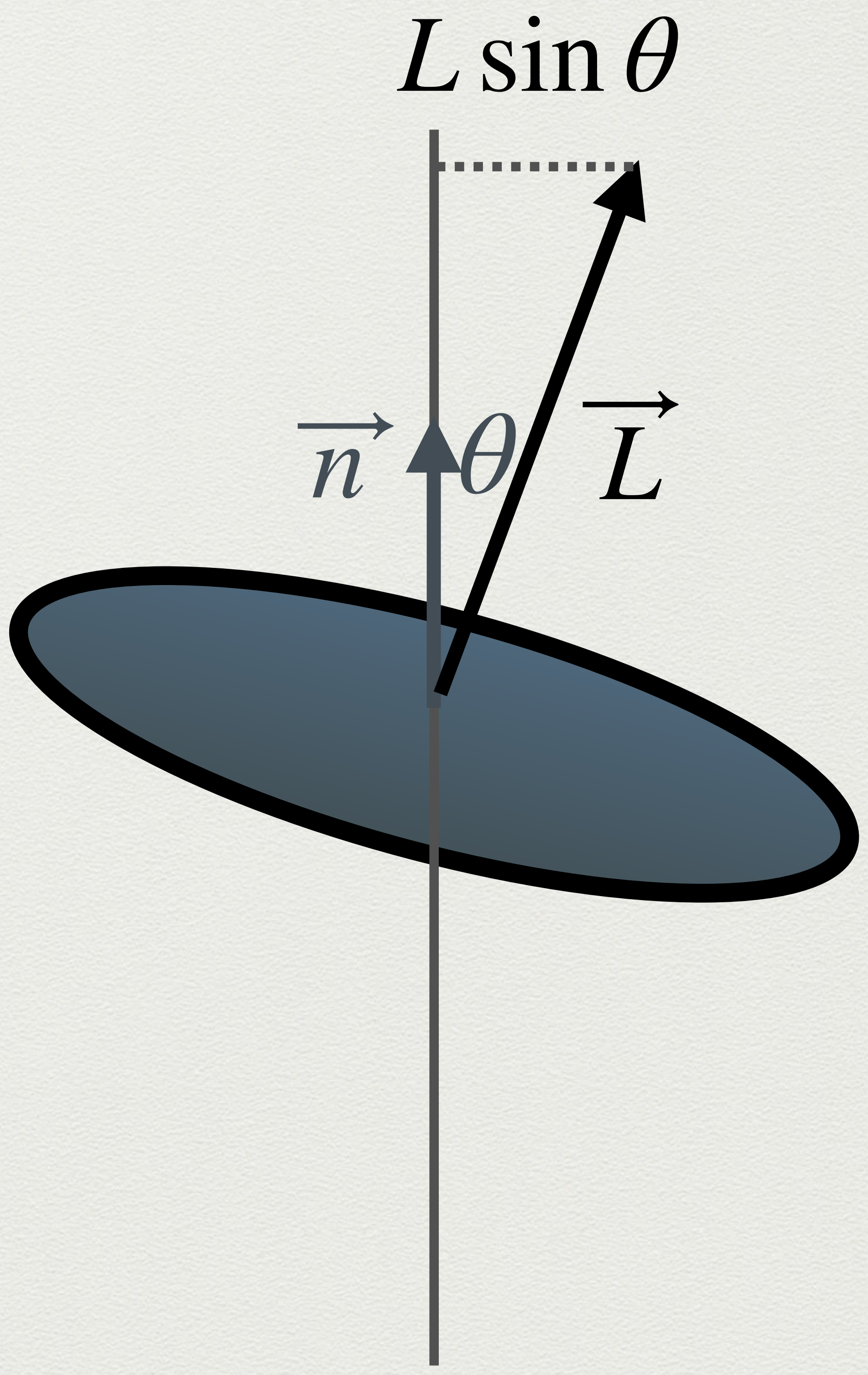
- ak sa $\overrightarrow{\omega}$ nemení, iné veci sa menia: tenzor momentu zotrvačnosti aj vektor momentu hybnosti sa napríklad otáčajú spolu s telesom

- koncový bod vektora $\overrightarrow{L}$ sa pohybuje rovnomerne po kružnici



moment sily pôsobiaci na pevnú os pri takejto rotácii

- moment sily pôsobiacej na os = rýchlosť zmeny $\vec{L}$: $\vec{M} = \dot{\vec{L}}$
- rýchlosť tejto zmeny je rovná obvodovej rýchlosti koncového bodu vektora $\vec{L}$ pri jeho rovnomernom pohybe po kružnici
- polomer kružnice, po ktorej sa pohybuje tento bod je $L\sin\theta$ čo môžeme napísať aj ako $|\vec{n} \times \vec{L}|$
- uhlová rýchlosť tohto pohybu je ω, obvodová je uhlová krát polomer, čiže $\dot{\vec{L}} = \vec{\omega} \times \vec{L}$ (overte správny smer vektora $\dot{\vec{L}}$)
- moment sily pôsobiaci na pevnú os je teda: $\boxed{\vec{M} = \vec{\omega} \times \bar{\bar{I}}(\vec{\omega})}$



zhrnutie

- rotácie 3D telies okolo pevnej osi sa dajú efektívne popísať ako 2D rotácie s momentom zotrvačnosti $I = \vec{n} \cdot \bar{\bar{I}}(\vec{n})$ a momentom sily $M = \vec{n} \cdot \vec{M}$ (zvykne sa o nich hovoriť ako o momentoch vzhľadom k osi v smere $\vec{n}$)
- trojrozmernosť rotácie sa prejavuje v nenulovom momente sily kolmom na os rotácie, ktorý je potrebný na udržanie osi rotácie v danom smere
- pri rotácii uhlovou rýchlosťou $\vec{\omega}$ sme pre tento moment sily dostali
$$\vec{M} = \vec{\omega} \times \bar{\bar{I}}(\vec{\omega})$$
(čím väčší moment zotrvačnosti a čím vyššia uhlová rýchlosť, tým väčší moment sily je potrebný na udržanie rotácie okolo dporedu vybranej osi)

and now something completely different

- teraz sa pozrieme na pohyb detského vĺčika, čo je pohyb rotujúceho telesa jedným pevným bodom (nie celou osou)
- ten bod nemusí byť v realite pevný (vĺčik sa pomerne často po podložke pohybuje), ale my budeme pre jednoduchosť uvažovať prípad s nepohybujúcim sa oporným bodom
- pri povrchnom pohľade môže tento prípad pripomínať rotáciu okolo pevnej osi, preto radšej hneď od začiatku explicitne zdôrazňujeme, že ide o niečo výrazne odlišné
- vĺčiku sa vo fyzike často hovorí symetrický zotrvačník

precesia vĺčika

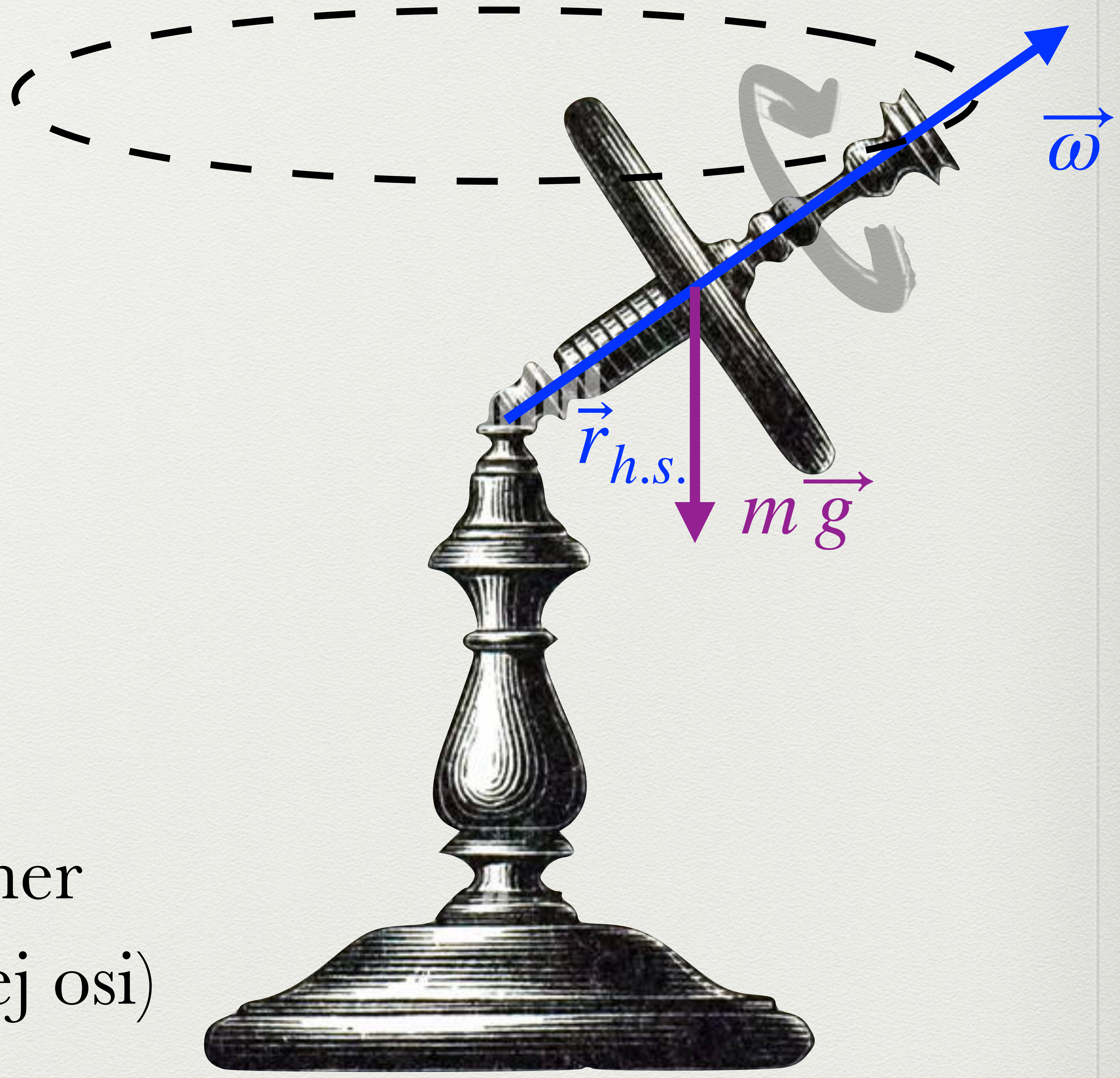
- nech vĺčik rotuje uhlovou rýchlosťou $\vec{\omega}$ okolo jednej zo svojich hlavných osí

- jeho moment hybnosti je v takom prípade $\vec{L} = I\,\vec{\omega}$ kde I je moment zotrvačnosti vzhľadom k tej osi rotácie

- moment gravitačnej sily vzhľadom k bodu kontaktu je $\vec{M} = \vec{r}_{\mathrm{h.s.}} \times m\,\vec{g}$ a smeruje do roviny obrázka (moment kontaktnej sily vzhľadom k tomuto bodu je nulový)

- keďže $\vec{M} = \dot{\vec{L}} \perp \vec{L}$, vektor $\vec{L}$ nemení svoju veľkosť, len smer (čo vzhľadom na smer $\dot{\vec{L}}$ znamená pootočenie okolo zvislej osi)

- po pootočení sa situácia presne zopakuje, a to znova a znova, čiže vektor $\vec{L}$ rovnomerne rotuje okolo zvislej osi

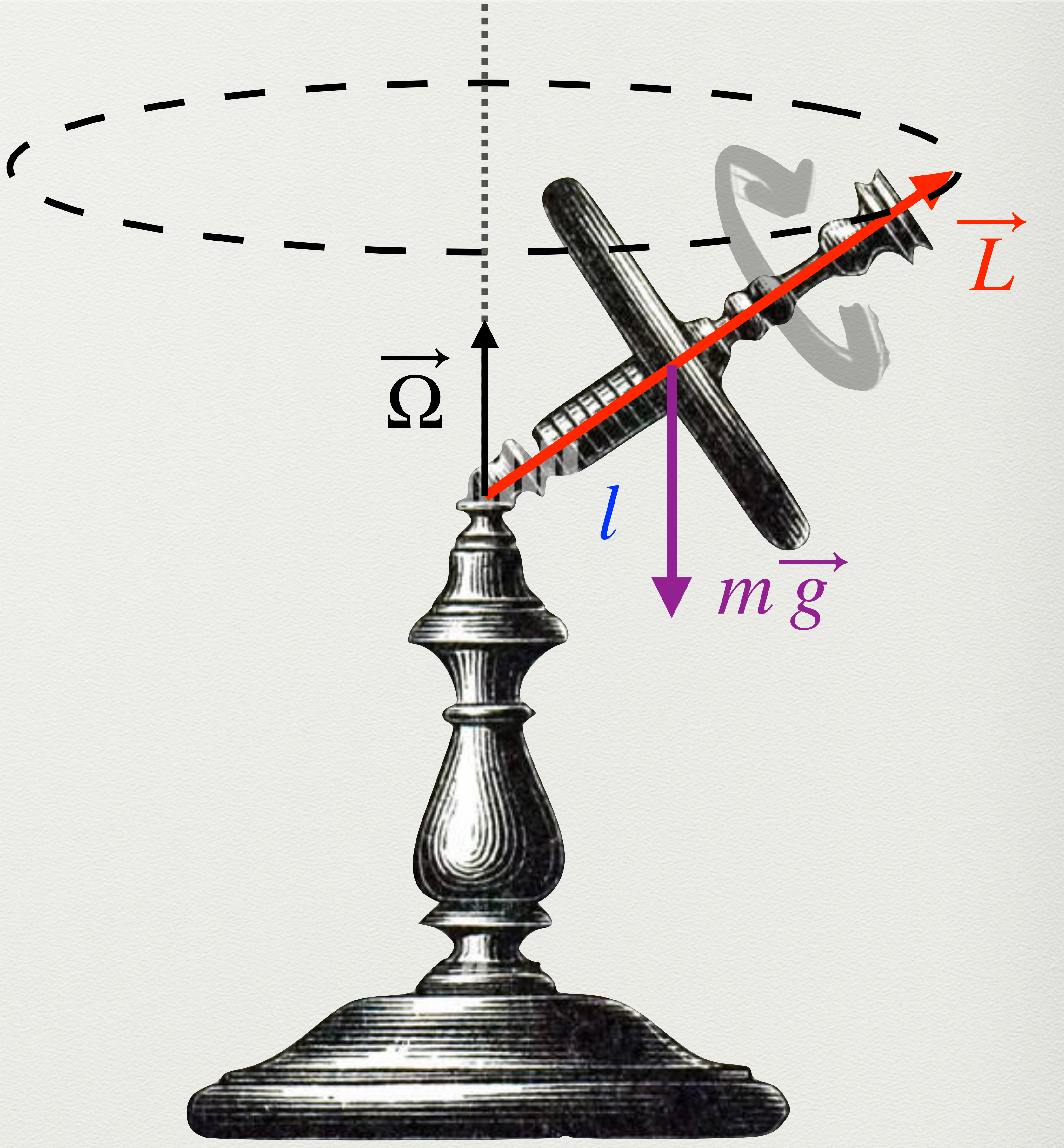


uhlová rýchlosť precesie vĺčika

- koniec vektora $\vec{L}$ sa pohybuje rovnomerne po kružnici obvodovou rýchlosťou $|\dot{\vec{L}}| = |\vec{M}| = m\,l\,g\sin\theta$, kde l je vzdialenosť hmotného stredu vĺčika od bodu podopretia
- polomer tejto kružnice je $L\sin\theta = I\omega\,\sin\theta$
- uhlová rýchlosť pre rovnomerný pohyb po kružnici je (ako vždy) daná pomerom obvodová rýchlosť / polomer
- pre uhlovú rýchlosť precesie vĺčika teda dostávame

$$\Omega = \frac{m\,g\,l}{I\omega}$$

- čím vyššia ω, tým menšia Ω



závery odporujúce predpokladom

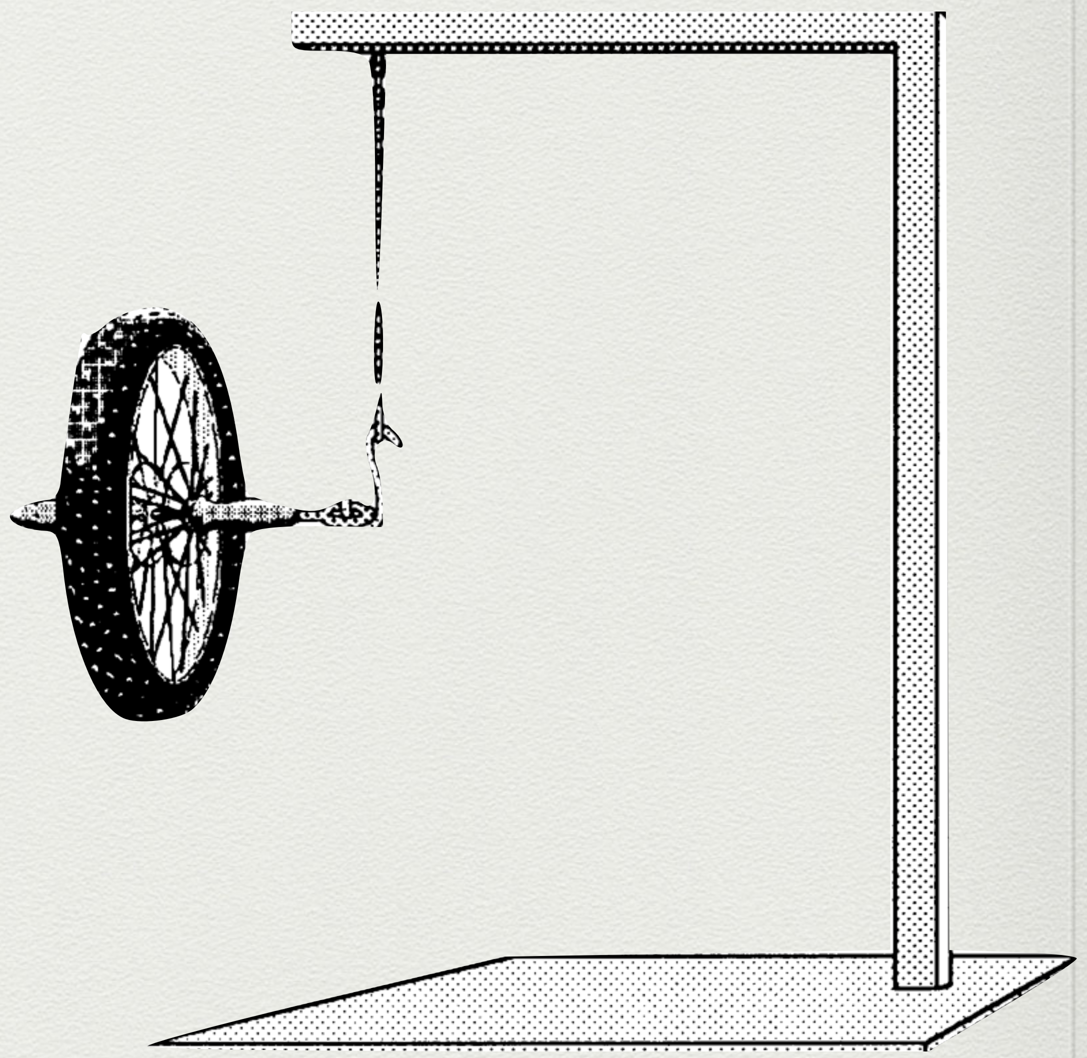
- výsledná uhlová rýchlosť vĺčika je súčtom uhlových rýchlostí $\vec{\omega}$ a $\vec{\Omega}$
- to je ale v rozpore s predpokladom, že uhlová rýchlosť vĺčika je len $\vec{\omega}$
- čo je dosť blbé: výsledok vyvracia predpoklad, čiže sa mu nedá dôverovať
- jedine, že by nesúlad výsledku s predpokladom bol dostatočne malý (čím menší rozdiel, tým dôveryhodnejší výsledok)
- pre veľké $\vec{\omega}$ (a tým pádom malé $\vec{\Omega}$) sú výsledky našich úvah o precesii vĺčika pomerne spoľahlivé, s klesajúcim $\vec{\omega}$ klesá aj spoľahlivosť tých úvah

toto je nedokončená prezentácia

čo nasleduje, sú len náznaky budúcich slidov
nie je potrebné ich vedieť na skúške

and now something not completely, but different

- niekedy sa vĺčik prezentuje v pomerne atraktívnej forme zaveseného bicyklového kolesa a v divákoch vtedy môže vzniknúť pocit, že precesia tohto kolesa-vĺčika vysvetľuje zatáčanie nakloneného kolesa

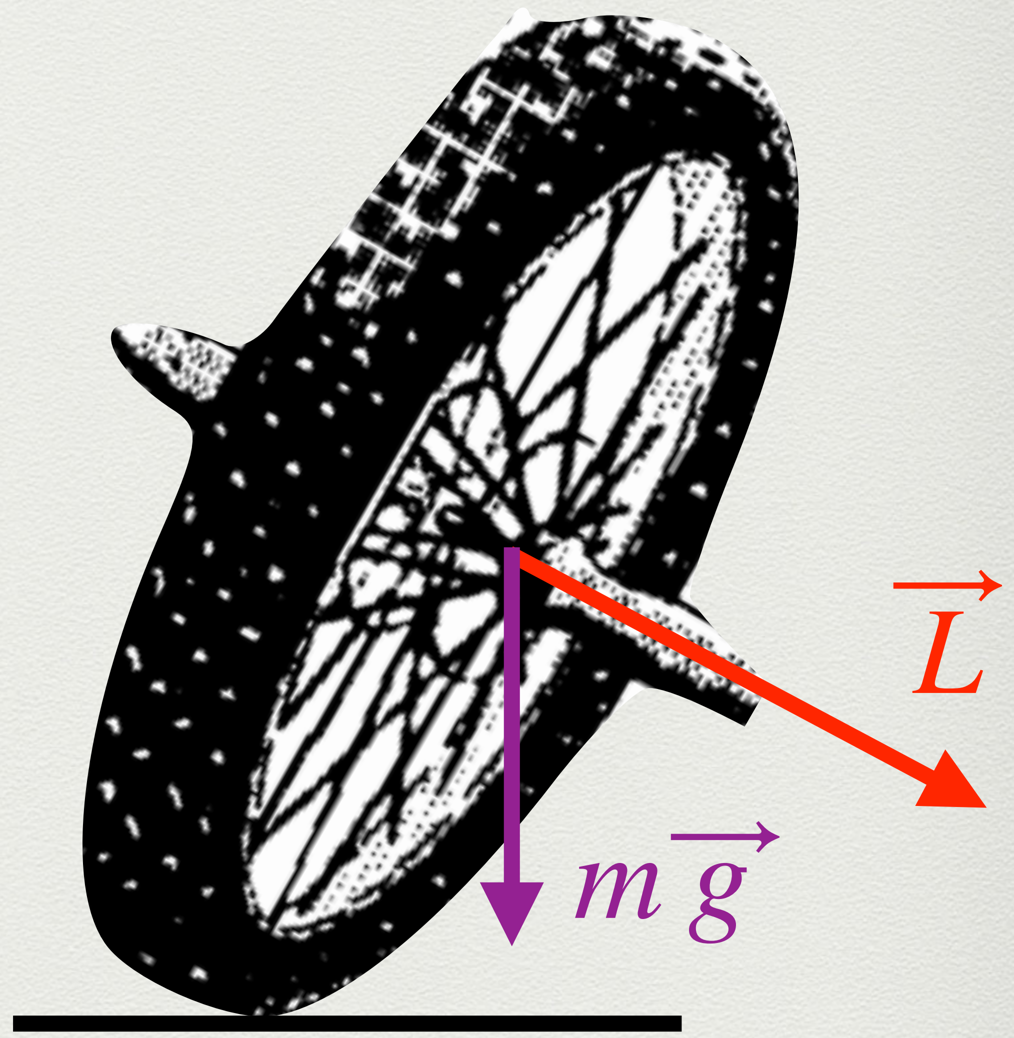


- ale naklonené rotujúce koleso zodpovedá inej situácii, s bodom dotyku na obvode kolesa a nie na jeho osi

- čo nám vie povedať starý dobrý zákon (ne)zachovania momentu hybnosti v takomto prípade?

polomer zatáčky nakloneného kolesa

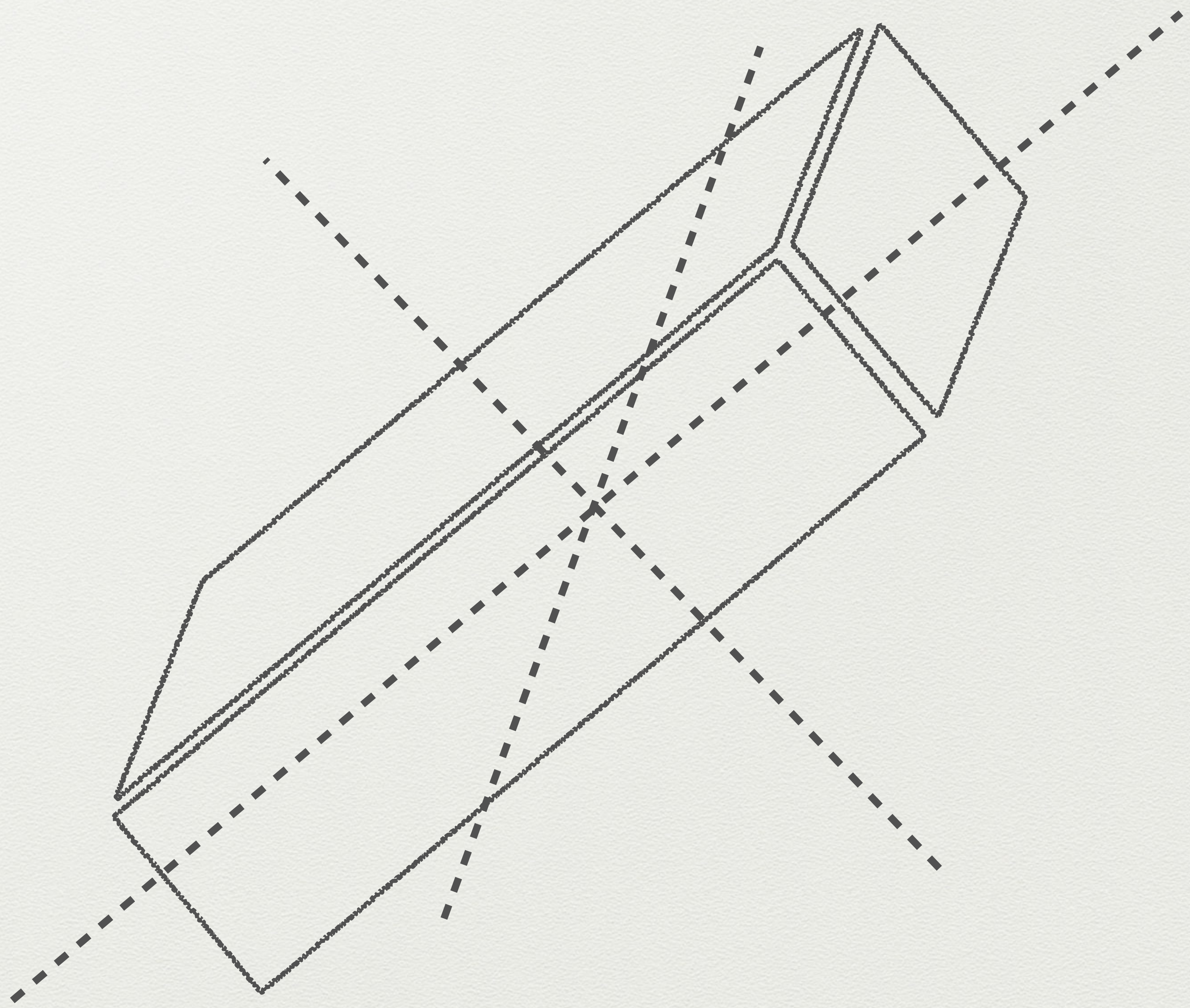
- $v = \omega r$
- $\vec{M} = \vec{r}_{\text{h.s.}} \times m\vec{g}$ $\qquad$ $M = m\,g\,r\sin\theta$
- $\vec{\Omega} \times \vec{L} = \vec{M}$ $\qquad$ $\Omega\,L\,\cos\theta = M$
- $\Omega = \dfrac{mgr}{I\omega}\tan\theta$
- $R = \dfrac{v}{\Omega} = \dfrac{I\omega^2}{mg}\cot\theta$



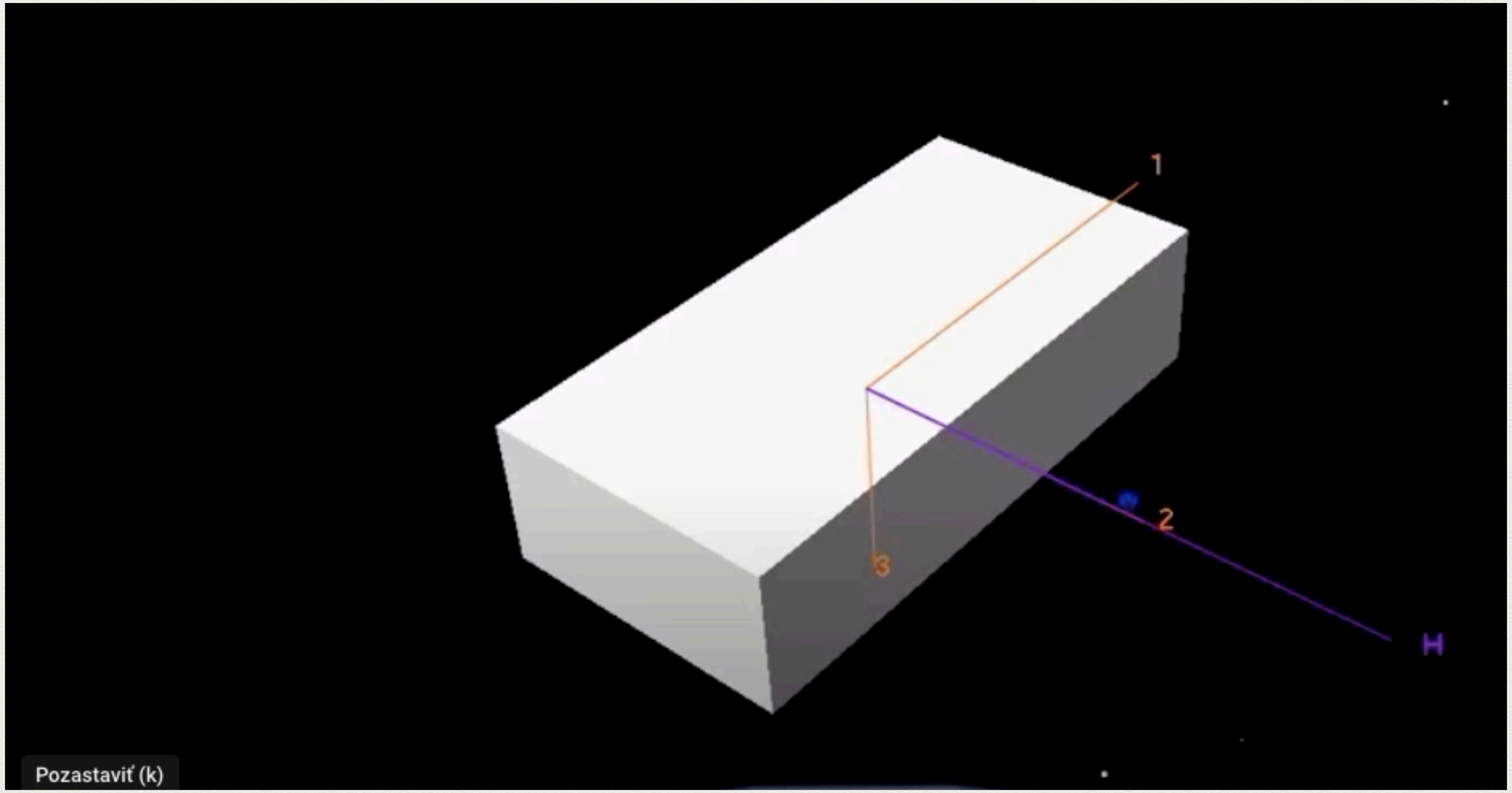
ohraničená použiteľnosť kvalitatívnych úvah

- ak by sme namiesto rugbyovej lopty uvažovali kváder, potom pre dve z troch hlavných osí by analogická úvaha prešla, ale pre tretiu nie (pre jednu z hlavných osí dá riešenie pohybových rovníc niečo podstatne iné ako precesiu)

- všetky naše úvahy treba preto brať s rezervou, len ako akýsi prvotný pokus o porozumenie niektorým pohybom (nie je to naozajstné porozumenie)



pohyb kvádra v bezváhovom stave



neprecesný pohyb okolo jednej z osí

ešte jeden príklad

nesymetrické teleso v bezváhovom stave

precesia detského vĺčika

- prílad zjednodušených úvah vedúcich k celkom užitočnému kvantitatívnemu výsledku
- moment gravitačnej sily vzhľadom k bodu dotyku $\overrightarrow{M} = mgl \sin \alpha$