# KOLESÁ (A INÉ TELESÁ) V 3D

čo vieme povedať zo zákona (ne)zachovania momentu hybnosti

mechanika 35

# zhrnutie minulej prednášky

- stav tuhého telesa je určený polohou jedného bodu a orientáciou v 3D
- orientáciu telesa v 3D určujú tri čísla, ktoré však netvoria vektor
- formálnemu opisu orientácie sme sa poriadne nevenovali (niečo málo sme si povedali, zvyšok sme nechali na prednášku z Teoretickej mech.)
- tým pádom sme ani neodvodili pohybové rovnice pre tuhé teleso v 3D
- takže máme k dispozícii len rovnicu (ne)zachovania momentu hybnosti

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}$$

# stačí rovnica $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ na popis rotácií tuhého telesa?

- <u>nie, nestačí</u>, pretože moment sily závisí od polohy a orientácie telesa
- v plnom znení vyzerá rovnica takto: $\dot{\vec{L}}(t) = \vec{M}\left(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), \text{orientacia}(t), \vec{\omega}(t)\right)$
kde $\vec{r}$, $\dot{\vec{r}}$ sú poloha a rýchlosť niektorého bodu telesa, prípadne hmotného stredu
- samotná táto diferenciálna rovnica nám nemôže "vydať" neznámu funkciu $\vec{\omega}(t)$, pretože okrem nej obsahuje aj iné neznáme funkcie
- okrem toho, ak vyjadríme $\vec{L}$ cez $\vec{\omega}$, do rovnice vstúpi aj moment zotrvačnosti $\bar{\bar{I}}$, ktorý tiež závisí od polohy a orientácie telesa

# a na čo teda rovnica $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ stačí?

- ako všetky zákony (ne)zachovania nám umožní nahliadnuť niektoré dôležité veci bez riešenia pohybových rovníc (tentoraz dokonca aj bez ich napísania)
- ukážeme si to na príklade 3D telesa upevneného v dvoch bodoch (rotácia okolo pevnej osi), v jednom bode (precesia detského vĺčika, zatáčanie nakloneného kolesa) a v žiadnom bode (kde si len ukážeme nejaké prekvapenia)
- v prvom prípade si vyjasníme, prečo sa niektoré 3D rotácie dajú popisovať formalizmom 2D rotácií a prečo to platí len do istej miery, v druhom prípade pochopíme niečo z mágie 3D rotácií, v treťom prípade pochopíme, že veľa vecí sa bez napísania a vyriešenia skutočných pohybových rovníc pochopiť nedá

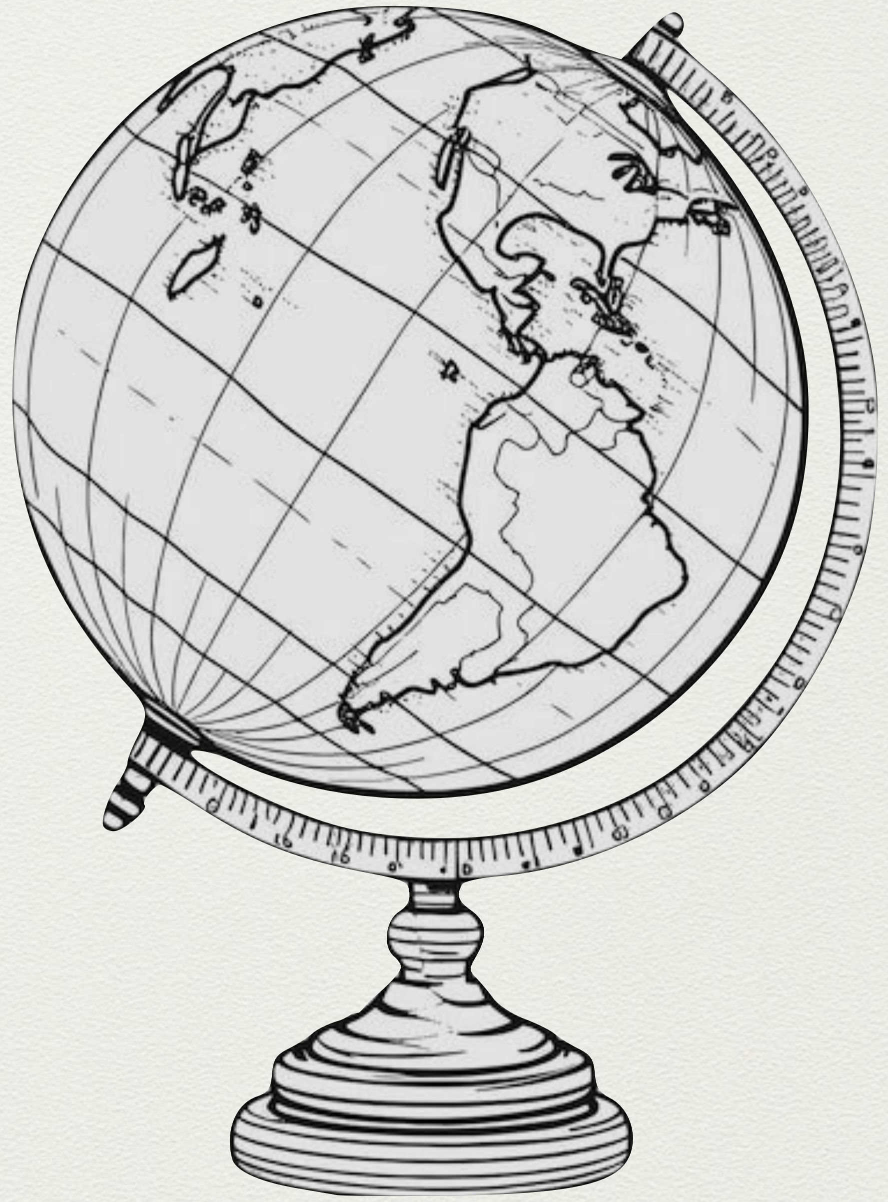
# pohyb telies upevnených v dvoch bodoch

- 3D teleso s dvomi upevnenými bodmi (napríklad glóbus) sa pohybuje okolo osi prechádzajúcej týmito bodmi

- rotácie okolo pevnej osi sa dajú opisovať ako 2D rotácie a často sa to naozaj tak robí

- jednotlivé momenty (zotrvačnosti, sily a hybnosti) v dvoch a troch rozmeroch sú však dosť odlišné rôzne veci:
  v 2D sú to tri čísla, v 3D sú to tenzor a dva vektory

- aký je súvis medzi momentami v 2D a 3D?
  ako vypočítame $I$, $L$ a $M$ ak poznáme $\overline{\overline{I}}$, $\overrightarrow{L}$ a $\overrightarrow{M}$ ?



ako sa prejavuje trojrozmernosť vo formálne dvojrozmerných rotáciách okolo pevnej osi?

# rotácia okolo pevnej osi

- teleso rotujúce okolo pevnej osi si môžeme predstaviť ako kebab, t.j. ako nakrájané na tenké plátky rotujúce okolo bodov ležacich na osi otáčania celého telesa (plátky očíslujeme indexom $n$)

- pre každý plátok platí rovnica pre 2-rozmerné rotácie $I_n \dot{\omega} = M_n$ (pre tuhé teleso sú uhlové rýchlosti všetkých plátkov rovnaké)

- medzi plátkami pôsobia rôzne komplikované sily, ktorých sa môžeme zbaviť štandardným trikom – sčítaním cez celé teleso

$$I \dot{\omega} = M$$

kde $I$ je súčet momentov zotrvačnosti jednotlivých plátkov a $M$ je výsledný moment sily v smere osi otáčania

# od súm cez plátky k sumám cez hmotné body

- pre 3D rotácie okolo pevnej osi sme dostali akoby rovnicu pre 2D rotácie:
$$I\,\dot{\omega} = M$$
- momenty *I* a *M* sme našli rozložením telesa na plátky kolmé na os otáčania
- celkové momenty sú sumy cez plátky (ktoré sú číslované indexom *n*)
$$I = \sum_n I_n \qquad M = \sum_n M_n^{\text{vonk}}$$
- čo prepíšeme ako sumy nie cez plátky, ale cez jednotlivé hmotné body telesa

- pre každý plátok platí (premyslite si to)
$$I_n = \sum_i m_i\,\rho_i^2 \qquad \text{cez } n\text{-tý plátok}$$
$$M_n = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)\big|_{\text{v smere osi rotacie}} \qquad \text{cez } n\text{-tý plátok}$$
kde $\rho_i$ je vzdialenosť *i*-teho bodu od osi rotácie
- spolu teda
$$I = \sum_i m_i\,\rho_i^2$$
$$M = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{vonk}})\big|_{\text{v smere osi rotacie}}$$
kde sumy idú <u>cez všetky hmotné body</u> telesa

# ako to súvisí s 3D rovnicou $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ ?

- vezmime 3D rovnicu a urobme jej priemet do osi rotácie (to sa urobí vynásobením oboch strán rovnice skalárne jednotkovým vektorom $\vec{n}$ v smere osi rotácie – zdôvodnite)

$$\vec{n} \cdot \dot{\vec{L}} = \vec{n} \cdot \vec{M}$$

- pre pre pevnú os platí $\dot{\vec{n}} = 0$ a teda

$$\vec{n} \cdot \dot{\vec{L}} = \dot{\vec{n}} \cdot \vec{L} + \vec{n} \cdot \dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}(\vec{n} \cdot \vec{L})$$

- $\vec{n} \cdot \vec{L} = \vec{n} \cdot \bar{\bar{I}}(\vec{\omega}) = \vec{n} \cdot \bar{\bar{I}}(\vec{n})\ \omega$

  pretože $\bar{\bar{I}}$ je lineárne zobrazenie

- ďalej platí $\vec{n} \cdot \bar{\bar{I}}(\vec{n}) = \sum_i m_i \rho_i^2$

  (návod: najprv to ukážte pre $\vec{n}$ v smere osi z, a potom si premyslite, že to už je vlastne všeobecný dôkaz)

- hodnota posledného výrazu sa pri rotáciách okolo pevnej osi nemení čiže sme opäť dostali $I\dot{\omega} = M$, kde

$$\boxed{I = \vec{n} \cdot \bar{\bar{I}}(\vec{n})} \quad \text{a} \quad \boxed{M = \vec{n} \cdot \vec{M}}$$

# ako sa prejavuje 3D vo formálne 2D pohybe

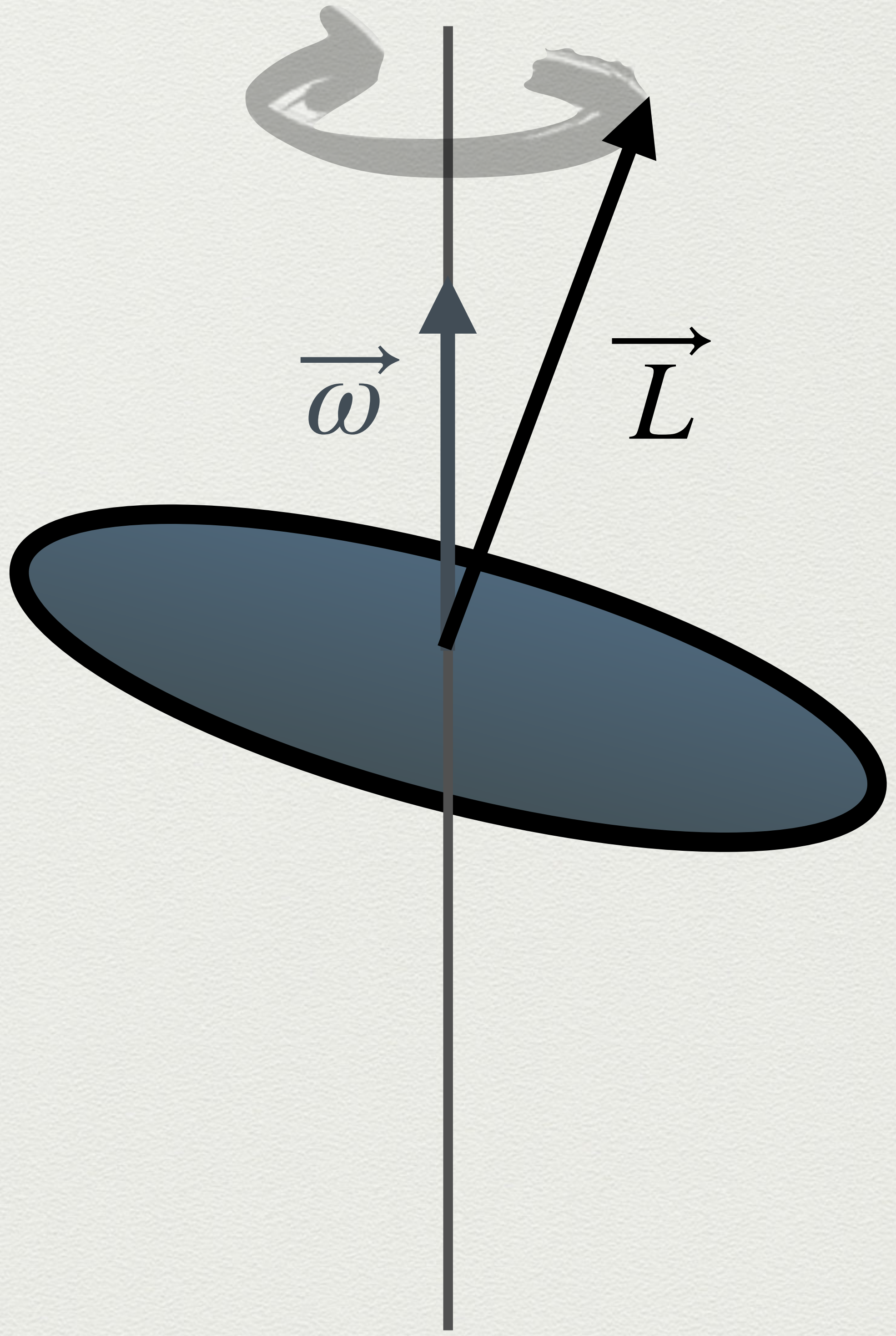
- predstavme si teraz teleso rovnomerne rotujúce okolo pevnej osi, ktorá však nie je totožná s niektorou z jeho hlavných osí

- v takom prípade nebude moment hybnosti tohto telesa smerovať rovnobežne s vektorom jeho uhlovej rýchlosti

$$\vec{L} = \bar{\bar{I}}(\vec{\omega}) \nparallel \vec{\omega}$$

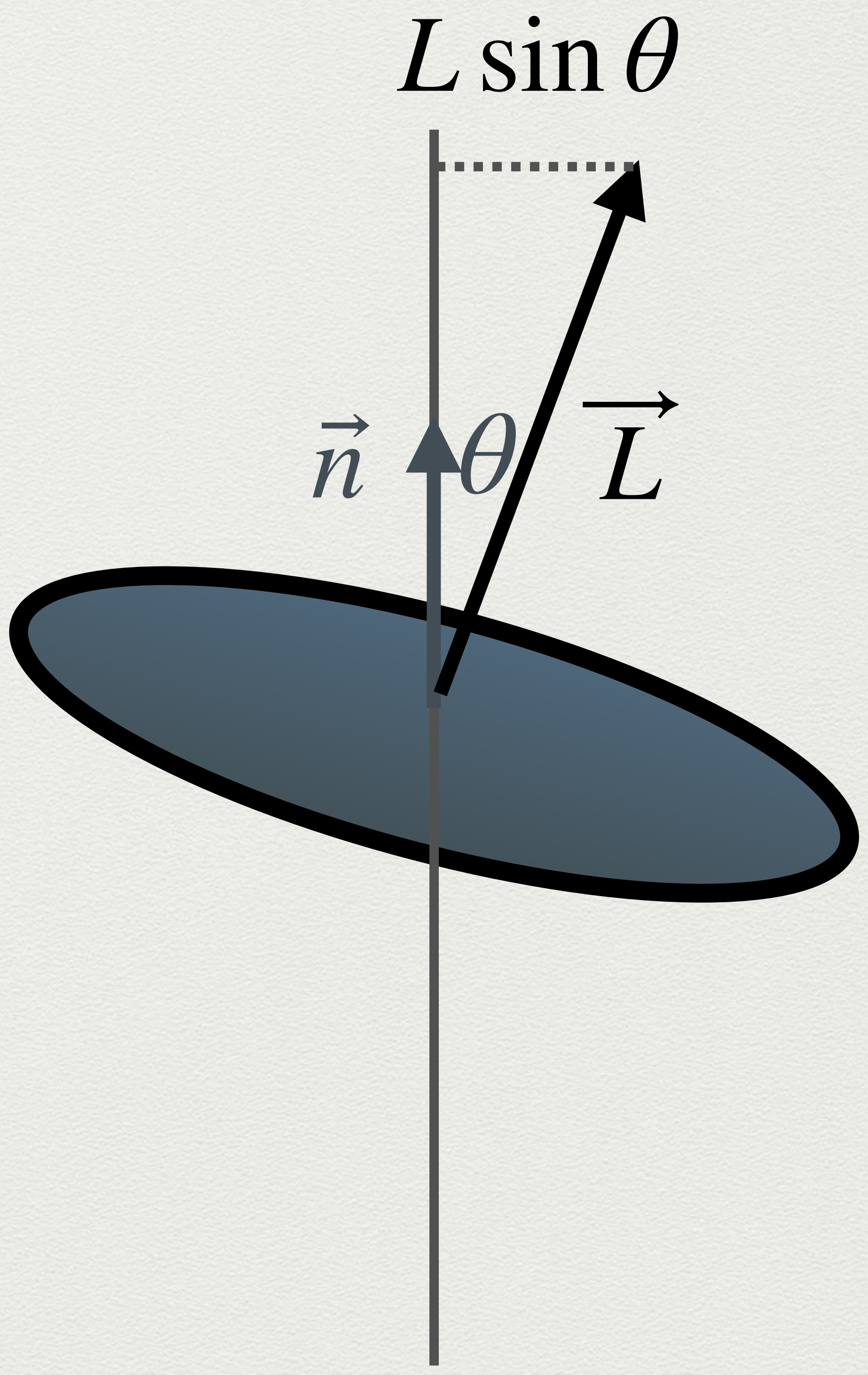
- ak sa $\vec{\omega}$ nemení, iné veci sa menia: tenzor momentu zotrvačnosti aj vektor momentu hybnosti sa napríklad otáčajú spolu s telesom

- koncový bod vektora $\vec{L}$ sa pohybuje rovnomerne po kružnici



# moment sily pôsobiaci na pevnú os pri takejto rotácii

- moment sily pôsobiacej na os = rýchlosť zmeny $\vec{L}$: $\vec{M} = \dot{\vec{L}}$
- rýchlosť tejto zmeny je rovná obvodovej rýchlosti koncového bodu vektora $\vec{L}$ pri jeho rovnomernom pohybe po kružnici
- polomer kružnice, po ktorej sa pohybuje tento bod je $L\sin\theta$ čo môžeme napísať aj ako $|\vec{n} \times \vec{L}|$
- uhlová rýchlosť tohto pohybu je $\omega$, obvodová je uhlová krát polomer, čiže $\dot{\vec{L}} = \vec{\omega} \times \vec{L}$ (overte správny smer vektora $\dot{\vec{L}}$)
- moment sily pôsobiaci na pevnú os je teda: $\boxed{\vec{M} = \vec{\omega} \times \bar{\bar{I}}(\vec{\omega})}$

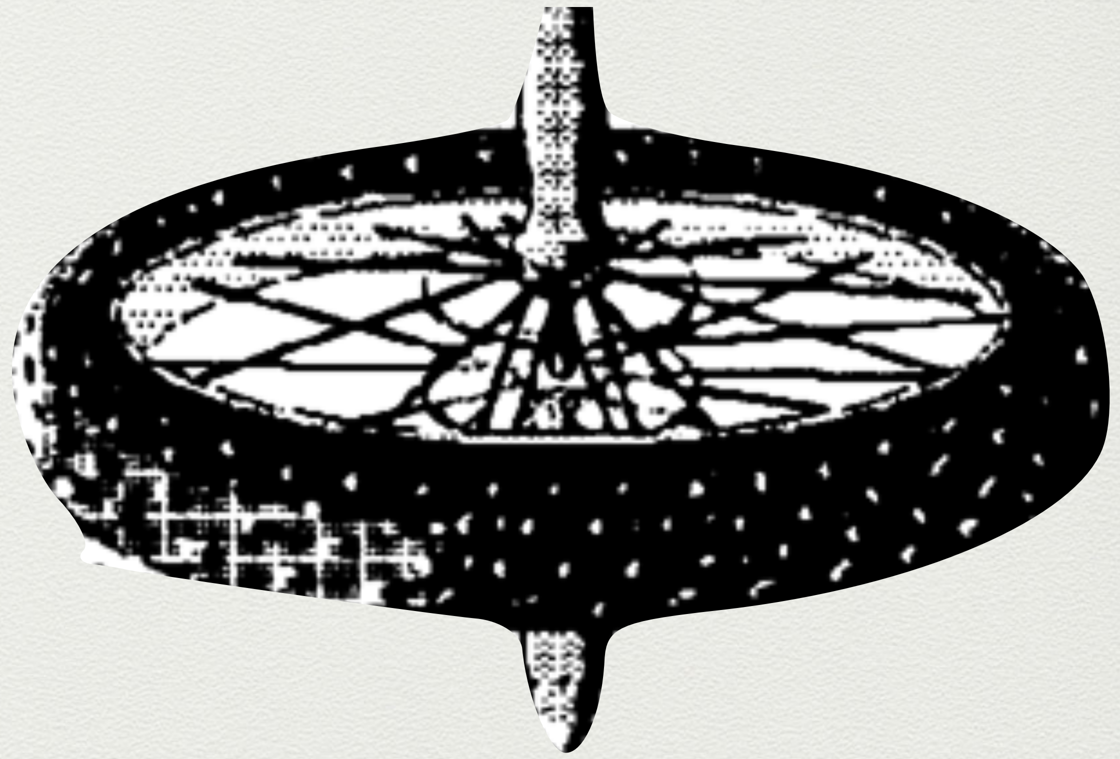


# zhrnutie

- rotácie 3D telies okolo pevnej osi sa dajú efektívne popísať ako 2D rotácie s momentom zotrvačnosti $I = \vec{n} \cdot \bar{\bar{I}}(\vec{n})$ a momentom sily $M = \vec{n} \cdot \vec{M}$ (zvykne sa o nich hovoriť ako o momentoch vzhľadom k osi v smere $\vec{n}$)
- trojrozmernosť rotácie sa prejavuje v nenulovom momente sily kolmom na os rotácie, ktorý je potrebný na udržanie osi rotácie v danom smere
- pri rotácii uhlovou rýchlosťou $\vec{\omega}$ sme pre tento moment sily dostali
$$\vec{M} = \vec{\omega} \times \bar{\bar{I}}(\vec{\omega})$$
(čím väčší moment zotrvačnosti a čím vyššia uhlová rýchlosť, tým väčší moment sily je potrebný na udržanie rotácie okolo dopredu vybranej osi)

# vsuvka: ako má človek otáčať os rotujúceho kolesa

- toto nie je úloha s pevnou osou rotácie, ale úzko s ňou súvisí, je jednoduchá a pritom poučná
- koleso sa otáča okolo vertikálnej osi, konce tejto osi držíme v rukách – akými silami máme na os pôsobiť, aby sa otáčala v rovine slidu?
- odpoveď: sily musia pôsobiť nie v rovine slidu, ale kolmo na rovinu slidu (prekvapko)
- úloha: ukážte, že je to nozaj tak
  návod: ako smerujú $\vec{L}$, $\dot{\vec{L}}$, $\vec{M}$ a sily našich rúk?



# pohyb telies upevnených v jednom bode

- teraz sa pozrieme na pohyb detského vĺčika, čo je pohyb rotujúceho telesa jedným pevným bodom (nie celou osou)

- ten bod nemusí byť v realite pevný (vĺčik sa pomerne často po podložke pohybuje), ale my budeme pre jednoduchosť uvažovať prípad s nepohybujúcim sa oporným bodom

- vo vhodnej vzťažnej sústave a pri povrchnom pohľade môže tento prípad pripomínať rotáciu okolo pevnej osi, ale v skutočnosti ide o niečo výrazne odlišné
- vĺčiku sa vo fyzike často hovorí symetrický zotrvačník

# precesia vĺčika

- asi najprekvapujúcejšou vlastnosťou nakloneného rotujúceho vĺčika je, že namiesto toho, aby spadol, sa jeho os rotácie začne otáčať okolo zvislej osi

- v ďalšom nahliadneme, prečo je to tak, a tiež ktorým smerom a akou uhlovou rýchlosťou os vĺčika rotuje

- nahliadnutie nebude úplne vodotesné, pretože bude založené na istom (zo začiatku tichom) predpoklade, ktorý v skutočnosti nie je skoro nikdy celkom splnený

- ale často je čiastočne splnený, čo nám bude stačiť

# prečo dochádza k precesii

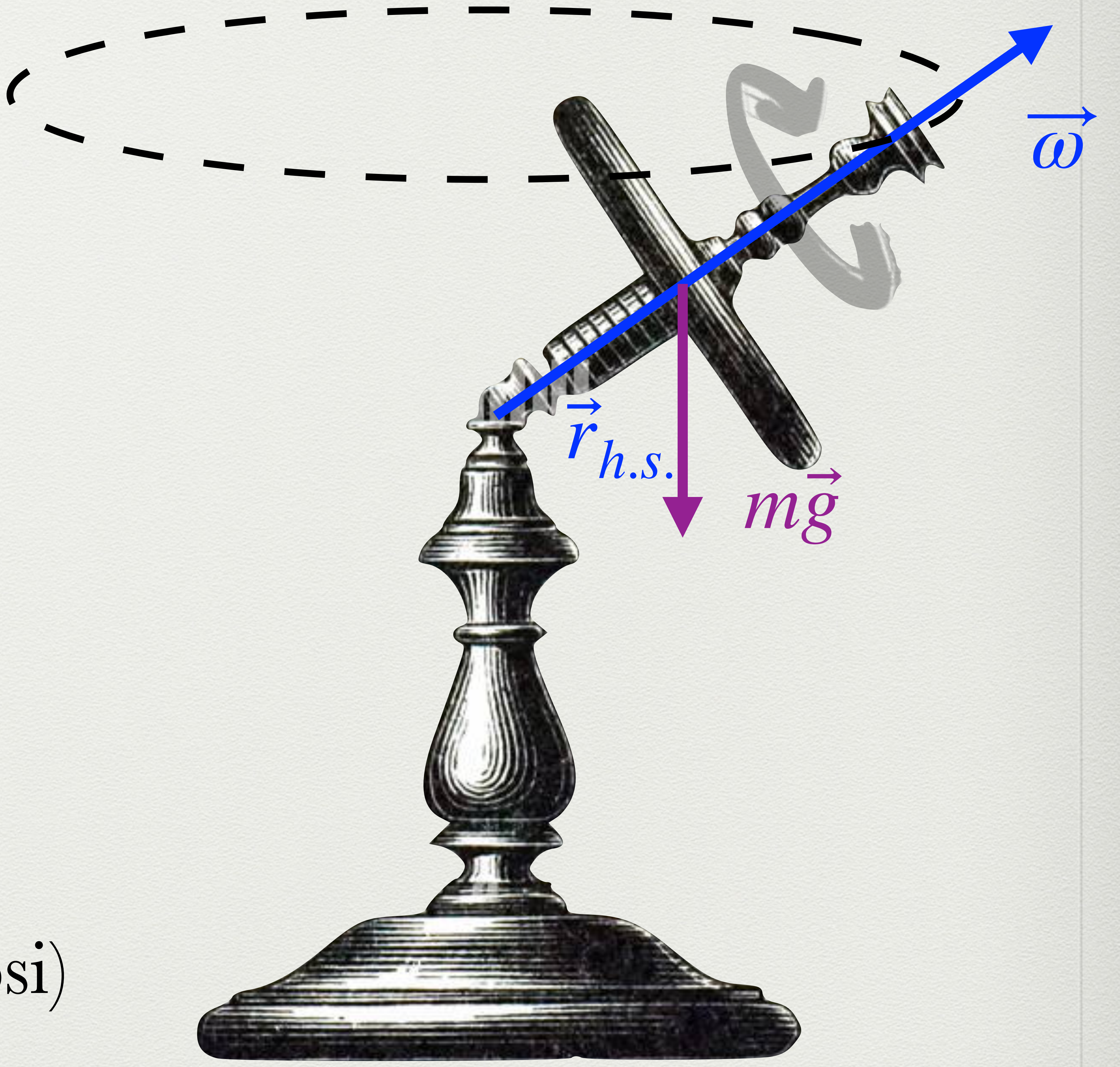
- nech vĺčik rotuje uhlovou rýchlosťou $\vec{\omega}$ okolo jednej zo svojich hlavných osí

- jeho moment hybnosti je v takom prípade $\vec{L} = I\,\vec{\omega}$ kde $I$ je moment zotrvačnosti vzhľadom k tej osi rotácie

- moment gravitačnej sily vzhľadom k bodu kontaktu je $\vec{M} = \vec{r}_{\mathrm{h.s.}} \times m\,\vec{g}$ a smeruje do roviny obrázka (moment kontaktnej sily vzhľadom k tomuto bodu je nulový)

- keďže $\vec{M} = \dot{\vec{L}} \perp \vec{L}$, vektor $\vec{L}$ nemení svoju veľkosť, len smer (čo vzhľadom na smer $\dot{\vec{L}}$ znamená pootočenie okolo zvislej osi)

- po pootočení sa situácia presne zopakuje, a to znova a znova, čiže vektor $\vec{L}$ rovnomerne rotuje okolo zvislej osi



# uhlová rýchlosť precesie vĺčika

- koniec vektora $\vec{L}$ sa pohybuje rovnomerne po kružnici obvodovou rýchlosťou $|\dot{\vec{L}}| = |\vec{M}| = m\,l\,g \sin\theta$ , kde $l$ je vzdialenosť hmotného stredu vĺčika od bodu podopretia

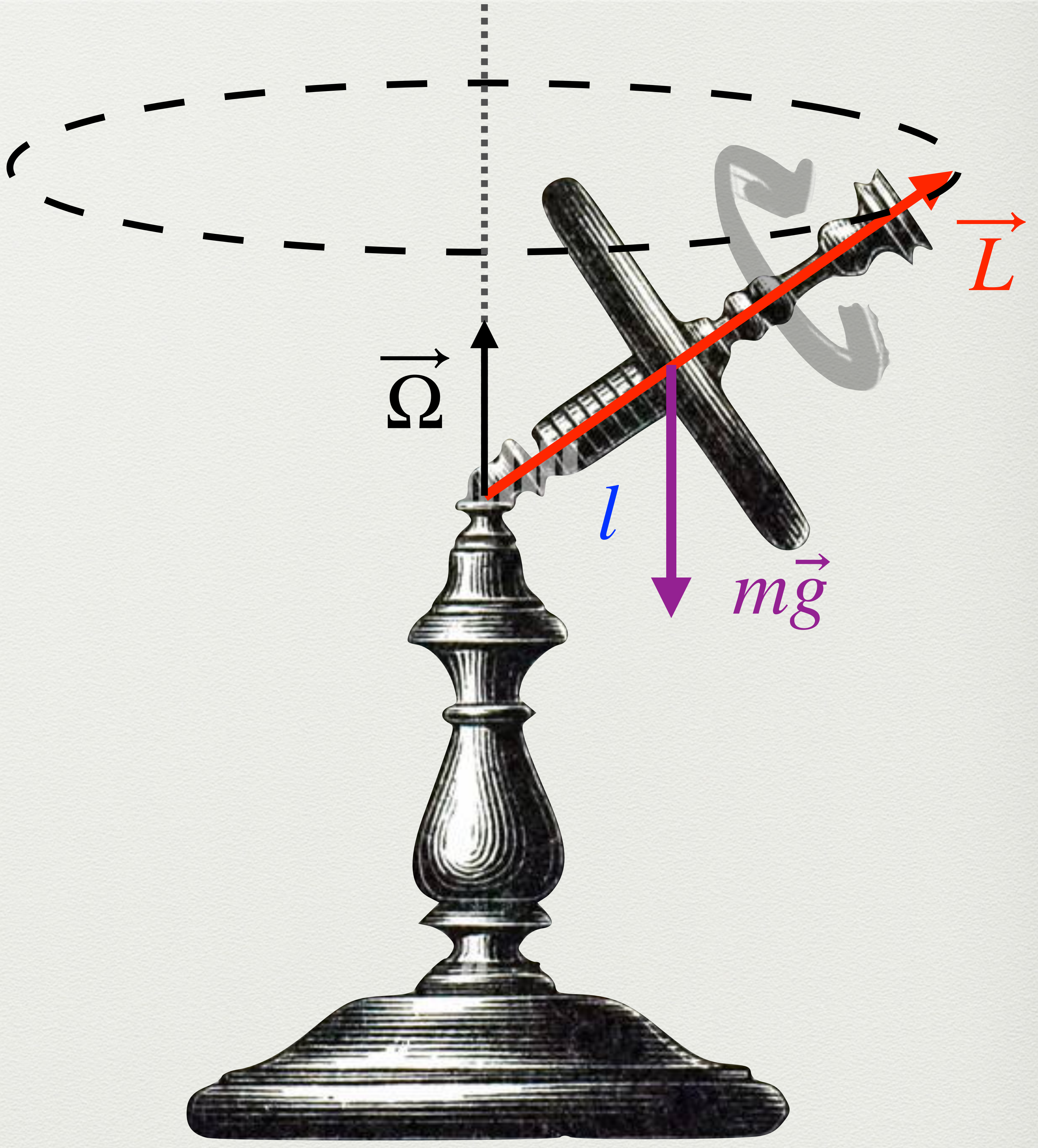
- polomer tejto kružnice je $L \sin\theta = I\omega\, \sin\theta$

- uhlová rýchlosť pre rovnomerný pohyb po kružnici je (ako vždy) daná pomerom obvodová rýchlosť / polomer

- pre uhlovú rýchlosť precesie vĺčika teda dostávame

$$\Omega = \frac{m\,g\,l}{I\omega}$$

- čím vyššia $\omega$, tým menšia $\Omega$

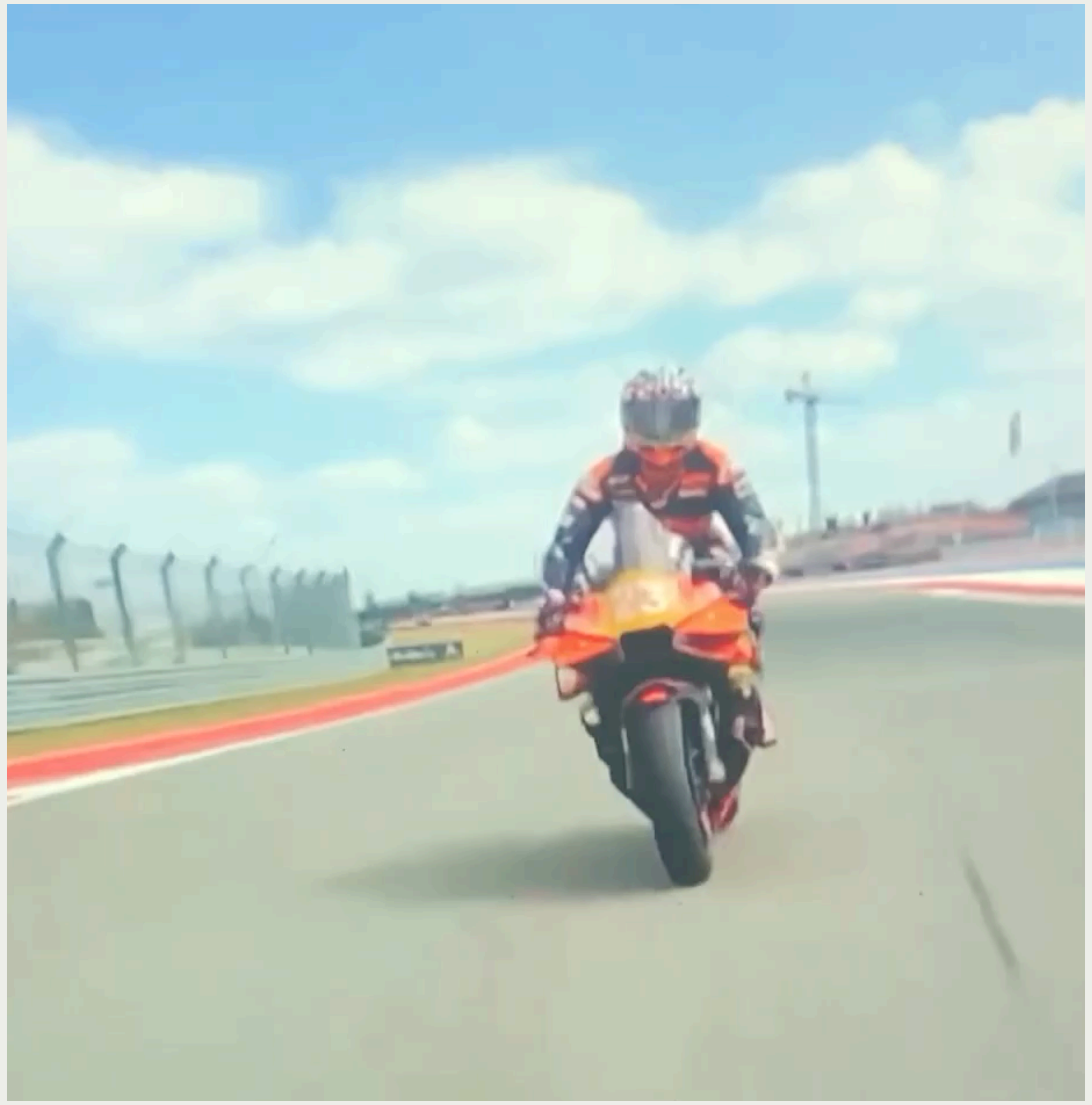


# poznámka o záveroch odporujúcich predpokladom

- výsledná uhlová rýchlosť vĺčika je súčtom uhlových rýchlostí $\vec{\omega}$ a $\vec{\Omega}$
- to je ale v rozpore s predpokladom, že uhlová rýchlosť vĺčika je len $\vec{\omega}$
- čo je dosť blbé: výsledok vyvracia predpoklad, čiže sa mu nedá dôverovať
- jedine, že by nesúlad výsledku s predpokladom bol dostatočne malý (čím menší rozdiel, tým dôveryhodnejší výsledok)
- pre veľké $\vec{\omega}$ (a tým pádom malé $\vec{\Omega}$) sú výsledky našich úvah o precesii vĺčika pomerne spoľahlivé, s klesajúcim $\vec{\omega}$ klesá aj spoľahlivosť tých úvah

# zatáčanie kolesa

- prekvapujúcou vlastnosťou nakloneného rotujúceho kolesa je, že nespadne, ale začne zatáčať
- v ďalšom nahliadneme, prečo je to tak, a tiež aký je polomer príslušnej zákruty
- nahliadnutie opäť nebude úplne vodotesné, pretože bude založené na istom (opäť zo začiatku tichom) predpoklade, ktorý je nie vždy splnený
- znova teda pôjde len o približné (aj keď v zásade celkom uspokojivé) vysvetlenie pozoruhodného a dôležitého javu



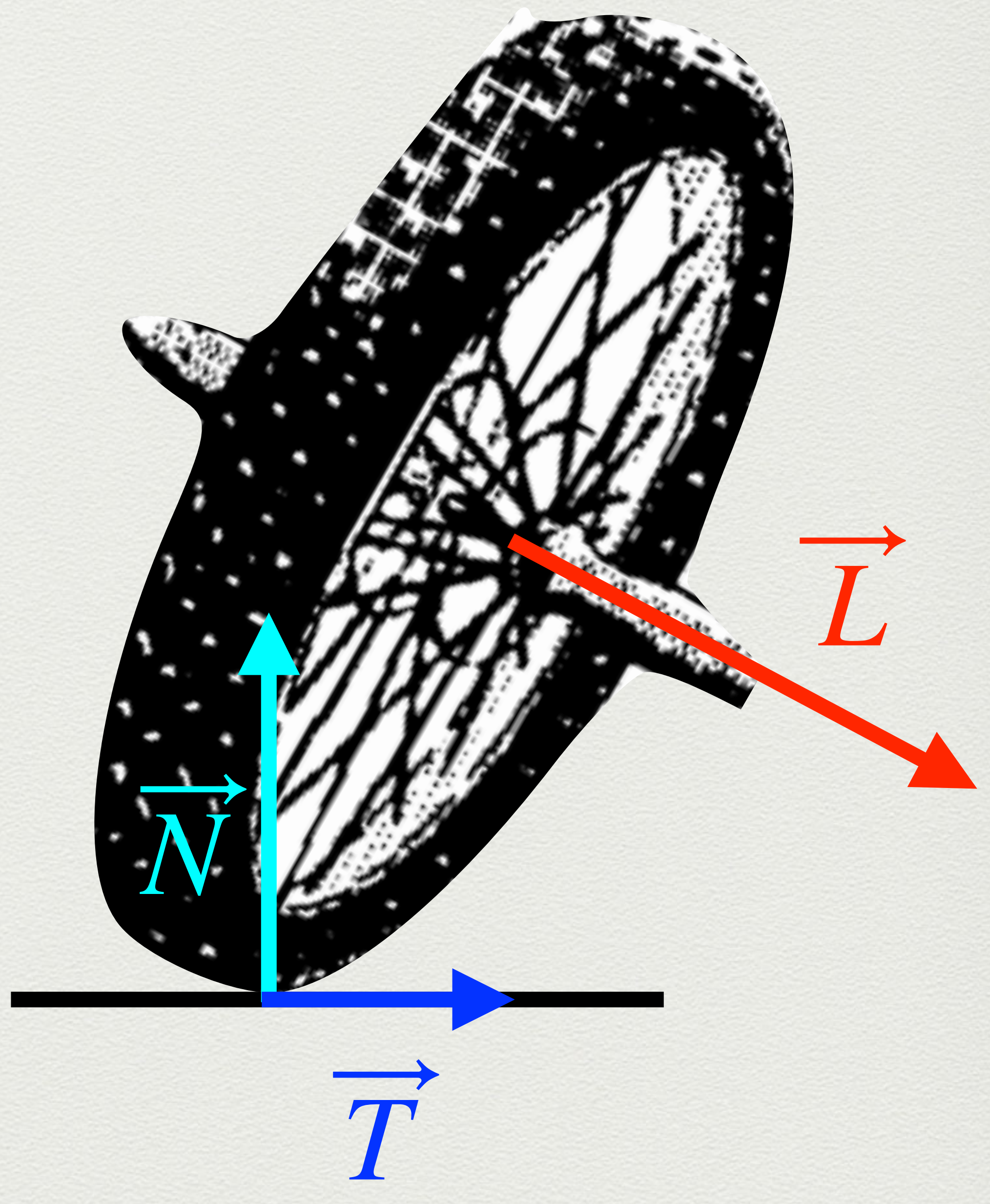
# prečo dochádza k zatáčaniu nakloneného kolesa

- uvažujme celú situáciu v sústave pohybujúcej sa spolu s hmotným stredom kolesa (ale nerotujúcej spolu s kolesom)

- momenty uvažujme vzhľadom k hmotnému stredu – vzhľadom k nemu je moment gravitačnej aj fiktívnej zotrvačnej sily nulový

- na koleso pôsobí podložka vo vertikálnom smere pružnou silou, a v horizontálnom smere statickým trením (ak nedochádza k šmyku)

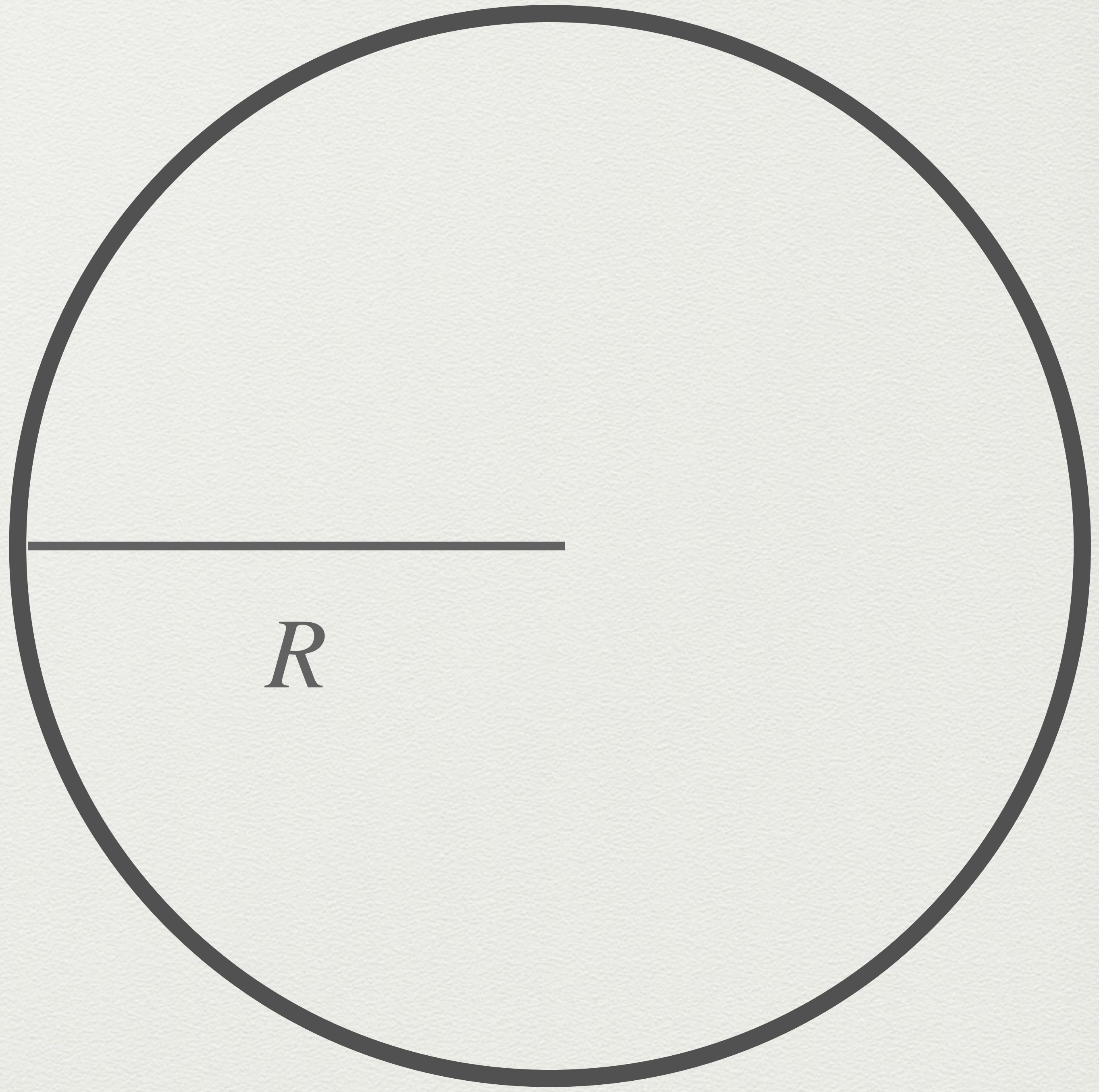
- moment týchto dvoch síl smeruje kolmo na rovinu obrázka, čiže $\vec{M} = \dot{\vec{L}} \perp \vec{L}$ a $\vec{L}$ teda nemení veľkosť, ale len smer (čo znamená pootočenie kolesa v našej vzťažnej sústave)




- po pootočení sa situácia presne zopakuje ⇒ otáčanie v našej sústave ⇒ zatáčanie vzhľadom k ceste

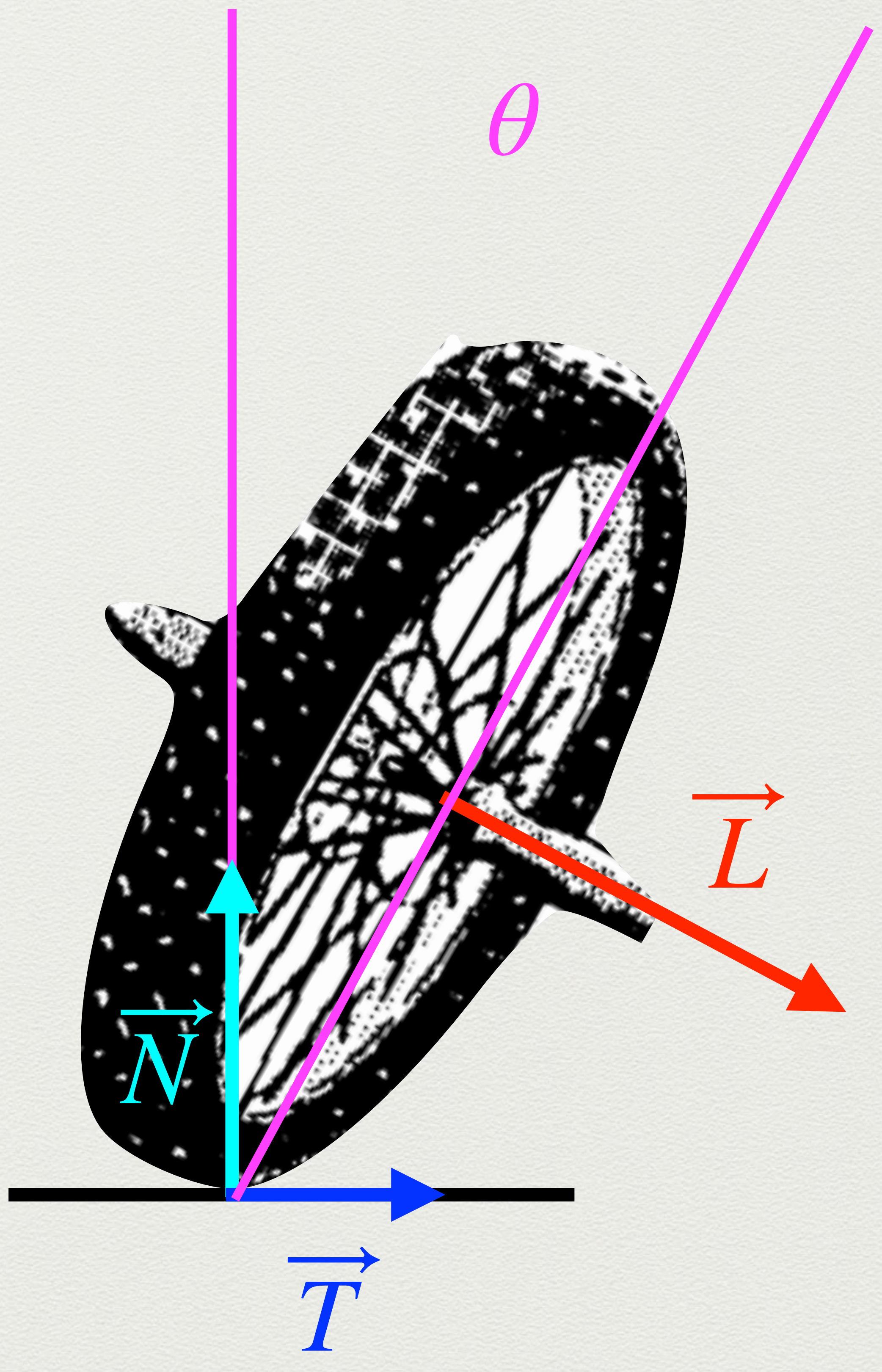
# polomer zatáčky nakloneného kolesa

- vo vzťažnej sústave hmotného stredu sa koleso otáča okolo vertikálnej osi uhlovou rýchlosťou, ktorú označíme $\Omega$
- z hľadiska sústavy "cesta" sa pohyb kolesa javí ako pohyb po kružnici, ktorej polomer označme R
- veľkosť rýchlosti pohybu nášho kolesa po kružnici $v = \Omega R$ je pritom rovnaká ako obvodová rýchlosť kolesa $v = \omega r$
- pre pohyb po kružnici musí byť dostredivou silou práve trecia sila (nijaká iná nie je k dispozícii), čiže $T = m\Omega^2 R$
- v ďalšom bude užitočné prepísať to do tvaru $T = m\Omega\omega r$



# otáčanie nakloneného kolesa okolo vertikálnej osi

- ak sa koleso v našej vzťažnej sústave otáča, koncový bod vektora $\vec{L}$ sa pohybuje po kružnici s polomerom $L\cos\theta$
- obvodová rýchlosť pohybu po tejto kružnici je $\Omega\, L\cos\theta$ a táto obvodová rýchlosť nie je nič iné, ako $\dot{\vec{L}}$, čo je rovné $\vec{M}$
- $L = I\omega$, kde $\omega$ je uhlová rýchlosť rotácie kolesa okolo vlastnej osi a $I$ je moment zotrvačnosti vzhľadom k tejto osi
- veľkosť momentu sily vzhľadom k hmotnému stredu kolesa $M = N r \sin\theta - T r \cos\theta$ (kladný smer = smer do obrázka)
- spolu teda dostávame: $\Omega\, I\, \omega \cos\theta = N r \sin\theta - T r \cos\theta$
- odkiaľ už vcelku jednoducho nájdeme $\Omega$ a z neho aj $R$




$$\Omega = \frac{mgr\tan\theta}{(I + mr^2)\,\omega} \qquad R = \frac{(I + mr^2)\,\omega^2}{mg\tan\theta}$$

# a opäť závery odporujúce predpokladom

- podobne ako pri precesii zotrvačníka sme na začiatku predpokladali, že uhlová rýchlosť je $\vec{\omega}$, ale na konci sme dostali ďalší nenulový príspevok k uhlovej rýchlosti $\vec{\Omega}$, čo je v rozpore s predpokladom
- celý postup je teda ako tak spoľahlivý len ak je $\Omega \ll \omega$
- výsledok nie celkom spoľahlivého odvodenia: $\Omega = \dfrac{mgr\tan\theta}{(I + mr^2)\,\omega}$
- takže naše odvodenie je tým spoľahlivejšie, čím rýchlejšie koleso rotuje a čím menej je naklonené

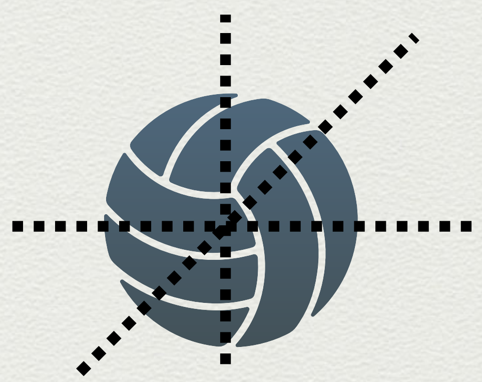
# mravné ponaučenia

- rotujúce telesá v 3D priestore sa často chovajú veľmi neintuitívne
- čiastočný vhľad do ich chovania môžeme získať na základe zákona (ne)zachovania momentu hybnosti, ale výsledky takýchto úvah sú rozumne spoľahlivé len v určitých špecifických prípadoch
- skutočné porozumenie pohybu tuhého telesav 3D vedie cez riešenie pohybových rovníc pre takéto teleso (pričom my sme tie rovnice ani len nenapísali, nechali sme to na prednášku z Teoretickej mechaniky)
- spomínané pohybové rovnice sa vo všeobecnosti riešia dosť ťažko (vždy sa však dajú riešiť starou dobrou metódou “krok za krokom”)

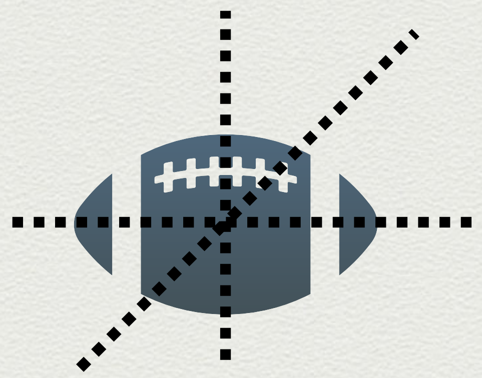
# pohyb neupevneného tuhého telesa

- cieľom tejto poslednej časti je ukázať, aký intuitívne neočakávaný môže byť pohyb tuhého telesa aj v tom najjednoduchšom možnom prípade, keď na toto teleso nepôsobia nijaké sily

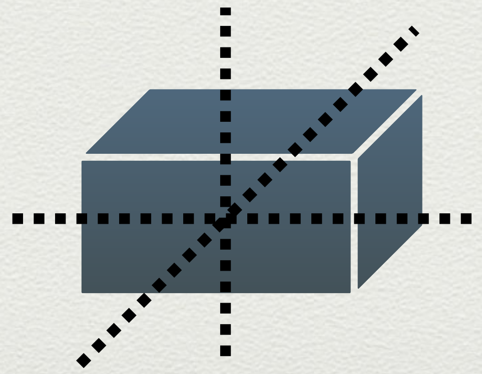
- pre sféricky symetrické teleso bude všetko úplne jasné (bude to vyplývať zo zákona zachovania momentu hybnosti)



- pre rotačne symetrické teleso dostaneme zložitejší pohyb (bude to precesia, ktorej sa dá porozumieť pomocou $\dot{\vec{L}} = 0$)



- pre rotačne nesymetrické teleso nás čaká úplné prekvapko (ktoré by nás malo varovať pred spoliehaním sa na intuíciu)



# rotácia guľatej a šišatej lopty

- guľatá lopta: v dôsledku symetrie platí $\vec{L} = I\,\vec{\omega}$

  $\vec{M} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \vec{L}$ sa zachováva $\;\Rightarrow\;\; \vec{\omega}$ sa zachováva

  jednoduchá rotácia v zhode s intuíciou

- šišatá lopta: vo všeobecnosti $\vec{L} = \bar{\bar{I}}(\vec{\omega}) \nparallel \vec{\omega}$

  $\vec{M} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \vec{L}$ sa zachováva, ale $\vec{\omega}$ sa nezachováva

  precesia podobná (aj keď iná) ako pri zotrvačníku

# and now for something completely different

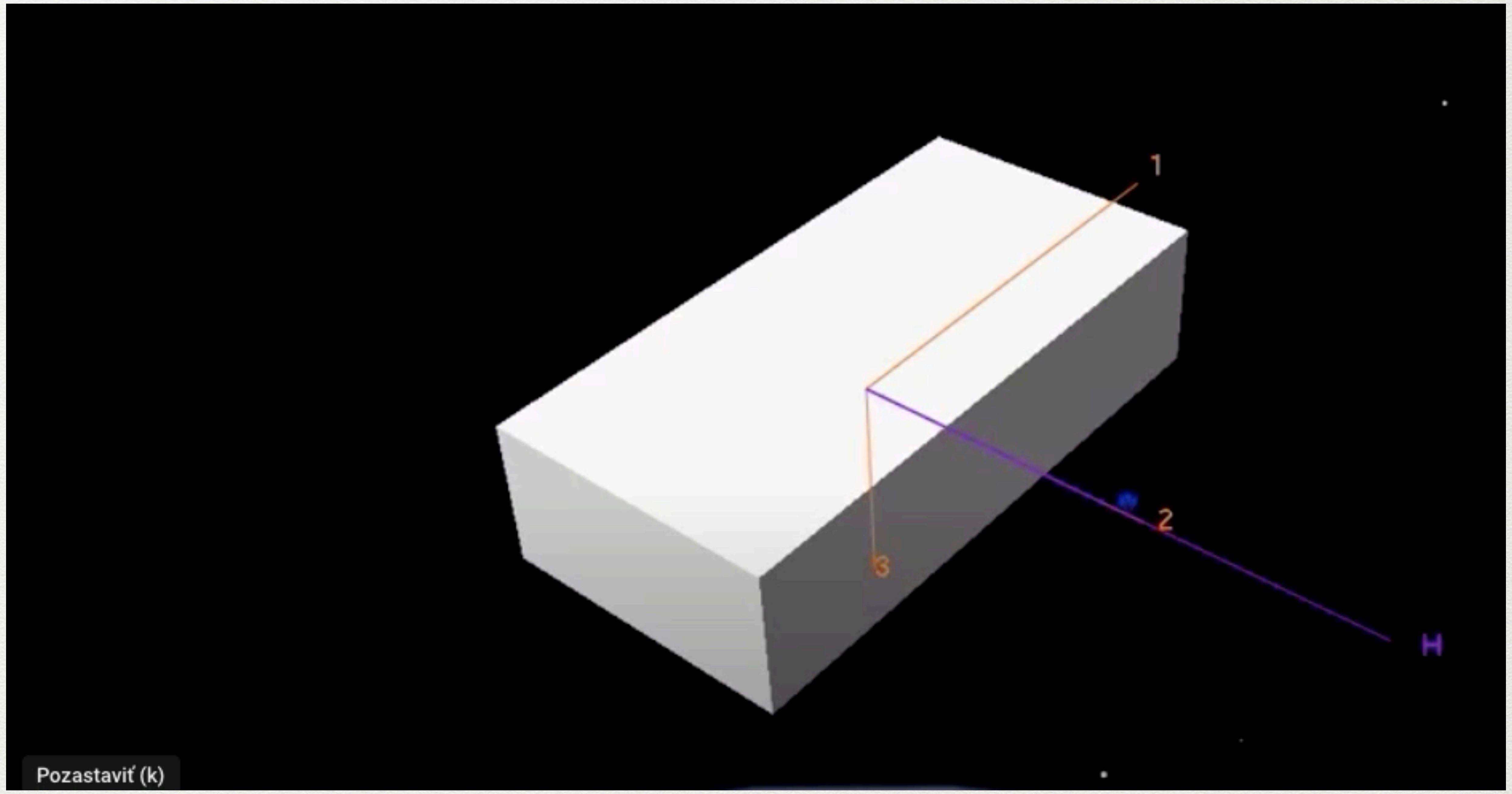
- hranatá lopta (domácke meno: tehla)

  pohyb získaný riešením pohybových rovníc (ktoré sme si ani len neodvodili) metódou krok za krokom

  nečakaný "kotrmelec" nielen pre tehlu, ale aj pre našu intuíciu

- "kotrmelec" rozhodne neznamená, že moment hybnosti sa nezachováva

  práve naopak – je nutným dôsledkom zachovania momentu hybnosti




varovanie: pri 3D rotáciách sa nikdy nepokúšajme pochopiť všeobecný pohyb na základe intuície získanej na jednoduchých špeciálnych prípadoch

# reálny príklad na záver


nesymetrické teleso v bezváhovom stave