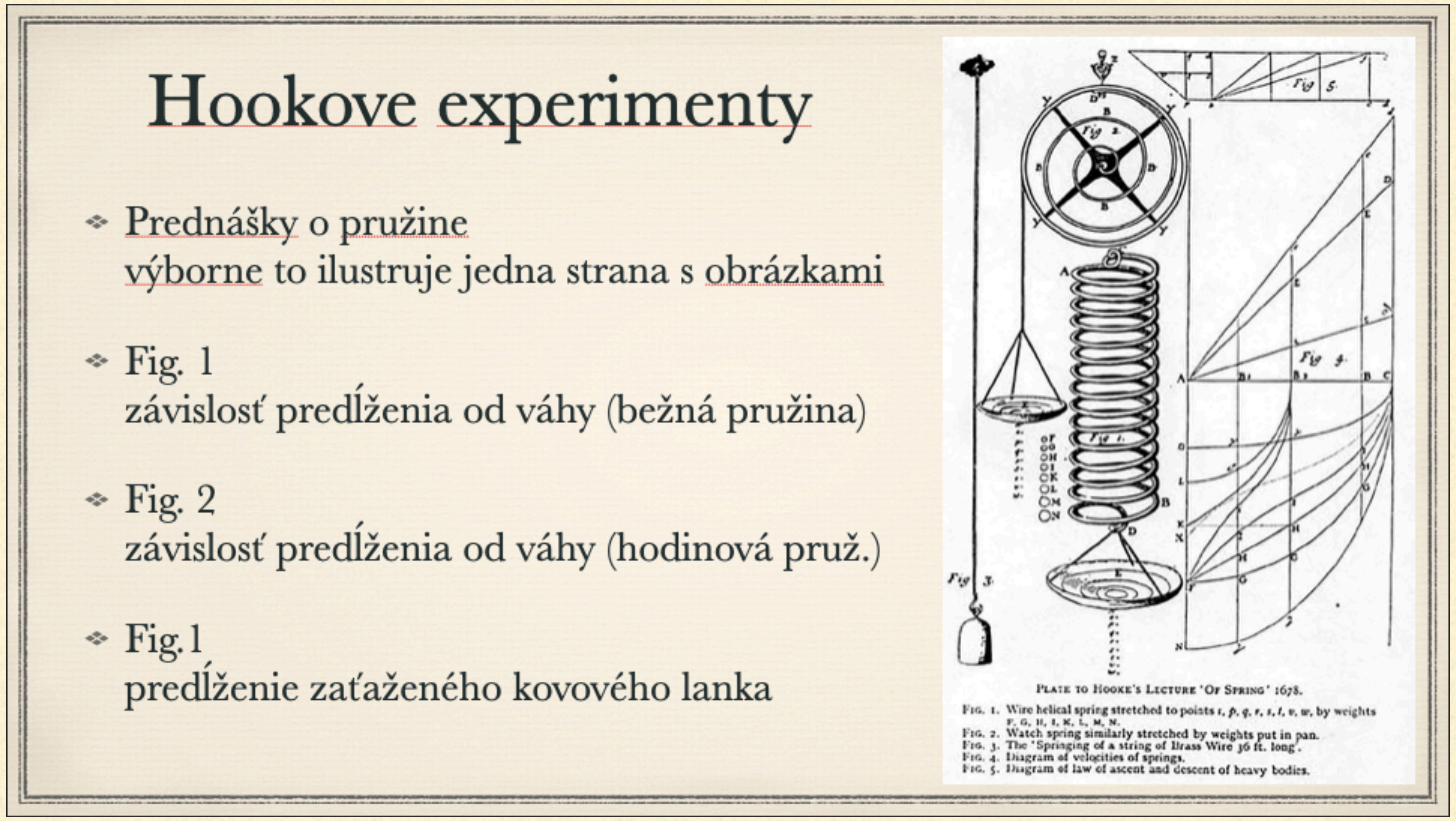
ROVNOVÁHA PRUŽNÉHO TELESA

Hookov zákon a základy statiky

mechanika 36

Hookov zákon

- v pôvodnom znení hovoril tento zákon o makrosopických telesách (tyče, laná, ...)
- ide o experimentálny výsledok: relatívne predĺženie je priamo úmerné tlaku (resp. ťahu) na koncoch telesa
- dnešný pohľad na deformáciu telies: zákony pružnosti formulujeme pre malé (infinitezimálne) kúsky a deformáciu telies potom z týchto zákonov vypočítame



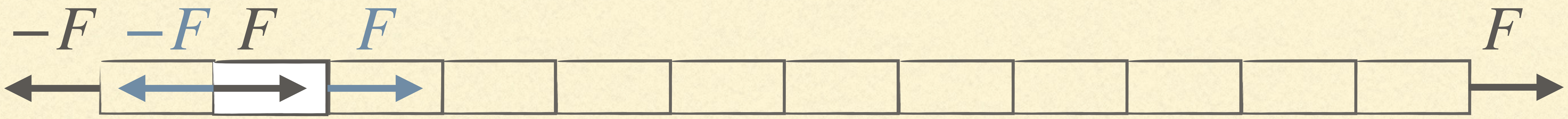
$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}\frac{F}{S}$$

porozumenie Hookovmu zákonu

- v skutočnosti je Hookov zákon natoľko prirodzený, že sa dá vlastne celý uhádnuť
- lineárna závislosť predĺženia Δl od sily F (pre rozumne malé F) – Taylorov rad
- lineárna závislosť predĺženia Δl od dĺžky l – princíp vláčika (vysvetlíme hneď)
- nepriama úmernosť predĺženia Δl a plochy S – Svätoplukov princíp (hneď potom)
- poznámka: “princíp vláčika” a “Svätoplukov princíp” nie sú bežné názvy
  sú to umelé termíny vymyslené len pre účely tejto prednášky

princíp vláčika

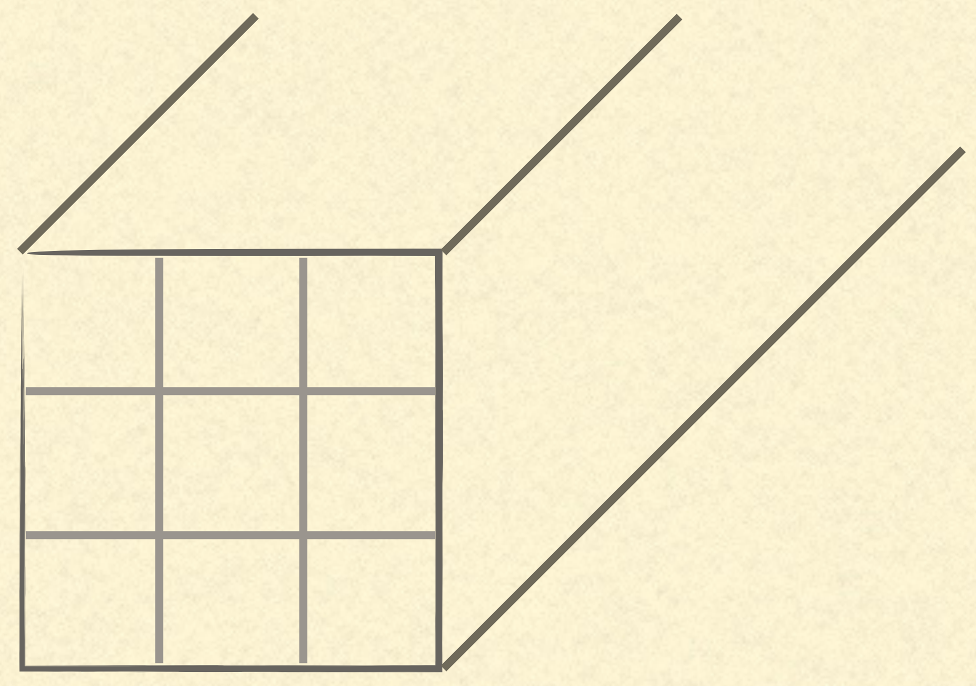
- rozdeľme si tyč na *n* rovnakých kúskov (vozňov) v smere pôsobenia sily



- ak sa kúsky nehýbu, potom na každý z nich pôsobia z oboch strán rovnaké sily
  na prvý kúsok pôsobí zľava sila $-F$, čiže sprava musí pôsobiť druhý kúsok silou F
- podľa zákona akcie a reakcie pôsobí prvý kúsok na druhý silou $-F$, a tak ďalej
  každý kúsok je teda rozťahovaný silami $-F$ a F, celok je natiahnutý *n*-krát
- ak je celkové predĺženie úmerné počtu dielikov *n*, tak je úmerné celkovej dĺžke l

zovšeobecnený Svätoplukov princíp

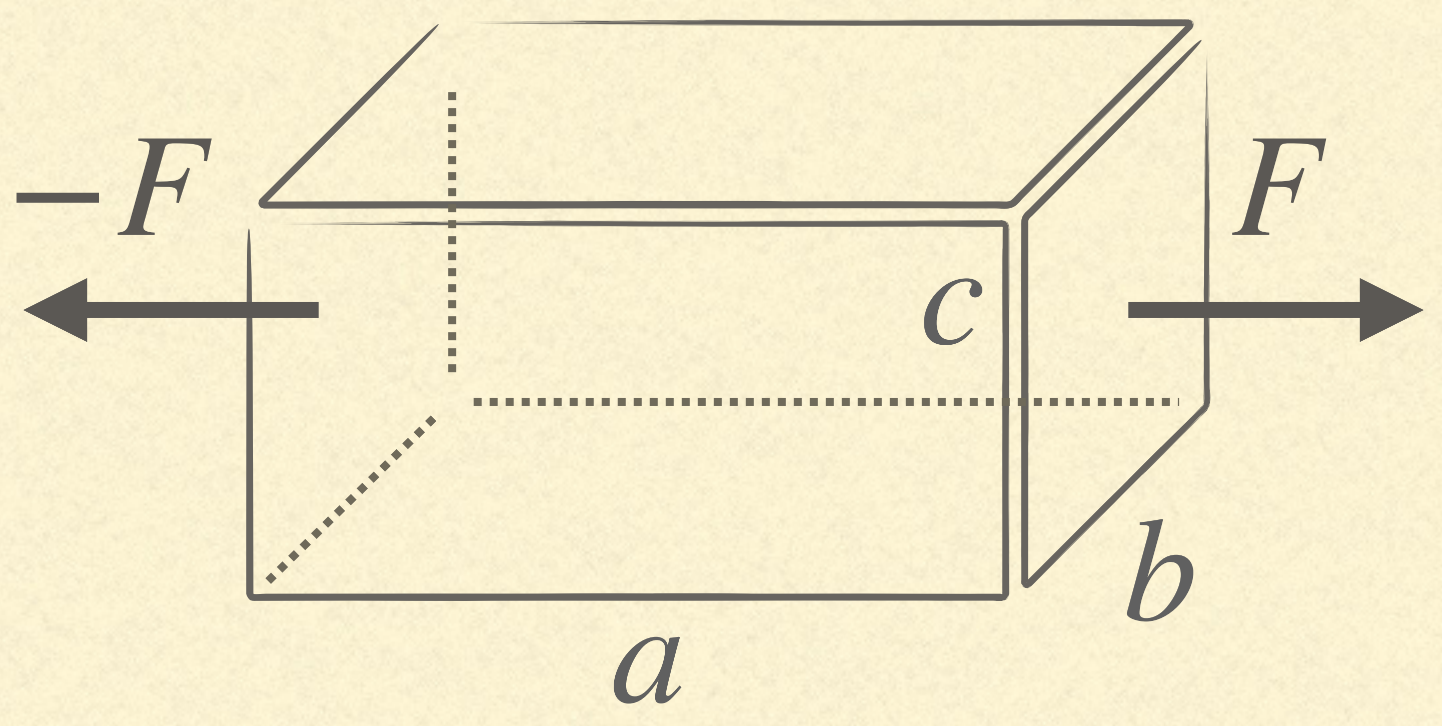
- rozdeľme si tyč na *n* rovnakých tenkých prútov (budeme ich naťahovať a nie zohýbať, preto zovšeobecnený Svätoplukov princíp)
- na každý prút pôsobí len *n*-tina sily F, ale natiahnu sa rovnako



- na každý prút pritom pôsobí rovnaký ťah resp. tlak
- natiahnutie resp. stlačenie teda nie je jednoznačne dané silou, ale ťahom resp. tlakom (silou predelenou obsahom plochy) a je teda priamo úmerné sile a nepriamo úmerné obsahu plochy, na ktorú táto sila pôsobí

Hookov zákon pre malé kúsky

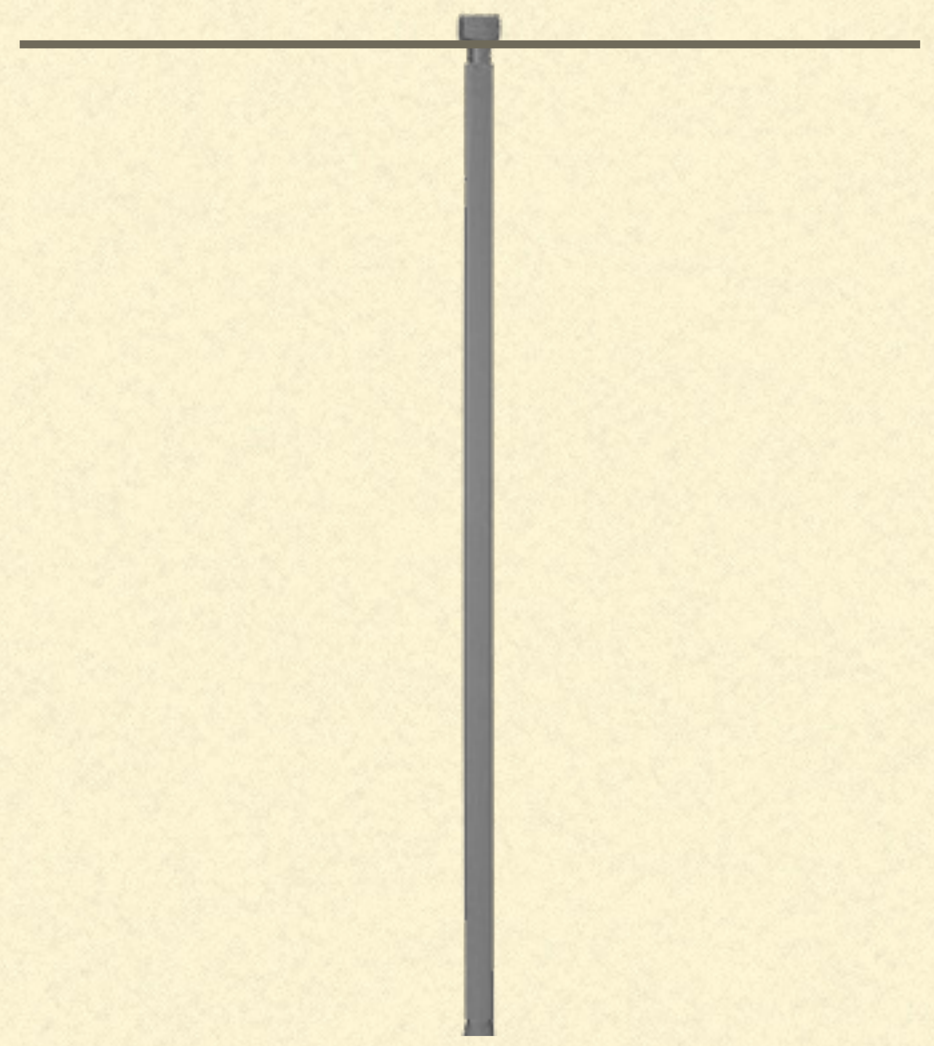
- v skutočnosti je toto základný zákon teórie pružnosti a tiež sa dá celý uhádnuť
- lineárna závislosť predĺženia Δa od sily F vyplýva (pre malé F) z Taylorovho radu
- lineárna závislosť predĺženia Δa od tlaku F/S vyplýva zo Svätoplukovho princípu
- lineárna závislosť predĺženia Δa od dĺžky a vyplýva z princípu vláčika



$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{1}{E}\frac{F}{bc}$$

od malých kúskov k veľkým telesám

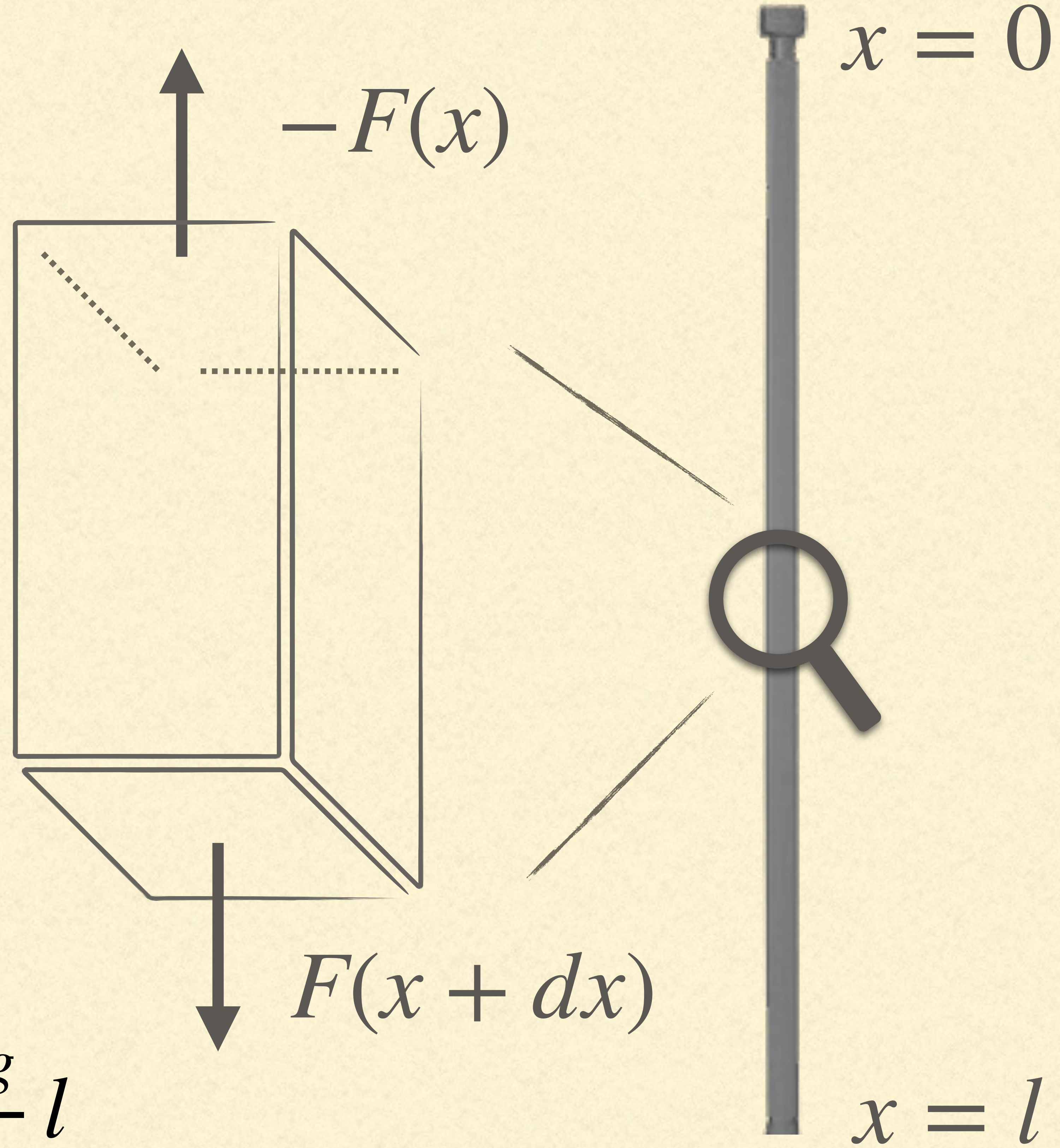
- dve formulácie pre Hookov zákon (jedna pre malý kúsok a jedna pre dlhú tyč) vyzerajú ako dve ekvivalentné veci
- princíp vláčika nám umožňuje z platnosti jednej z týchto formulácií rýchlo nahliadnuť platnosť tej druhej
- v skutočnosti je oveľa dôležitejší Hookov zákon pre malé kúsky, pretože z neho sa dá vypočítať deformácia telesa v mnohých navzájom veľmi odlišných prípadoch (na ktoré už jednoduchý princíp vláčika nestačí)



príklad: ako sa predĺži visiaca tyč vlastnou tiažou?

deformácia visiacej tyče vlastnou tiažou

- malý kúsok vo vzdialenosti x od bodu závesu
- gravitačná sila: $g\,\rho\,S\,dx$
- sila zospodu: $g\,\rho\,S\,(l - x - dx)$
- sila zvrchu: $g\,\rho\,S\,(l - x)$
- predĺženie kúska: $\Delta\,dx = \frac{g\,\rho}{E}\,(l - x)\,dx$
- predĺženie tyče: $\Delta l = \int_0^l \frac{g\,\rho}{E}\,(l - x)\,dx = \frac{g\,\rho}{E}(l^2 - \frac{l^2}{2}) = \frac{1}{2}\frac{1}{E}\frac{mg}{S}\,l$



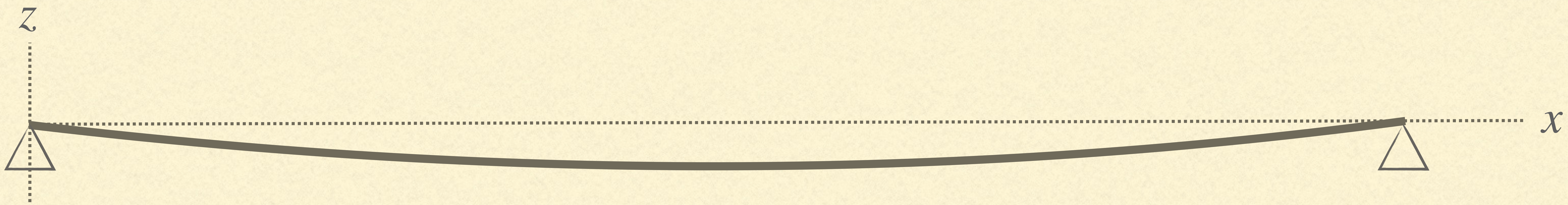
nepovinné

deformácia nosníka vlastnou tiažou

nepovinné

- nasledujúci príklad je len (škaredou) ilustráciou skutočných (škaredých) výpočtov v teórii pružnosti; netreba všetkému rozumieť, ale je užitočné to aspoň raz vidieť

- majme tzv. nosník (t.j. tyč resp. dosku určitého profilu) podopretý v dvoch bodoch



ako sa nosník prehne pod vplyvom vlastnej tiaže?

aká konkrétna funkcia $z = f(x)$ opisuje priehyb nosníka?

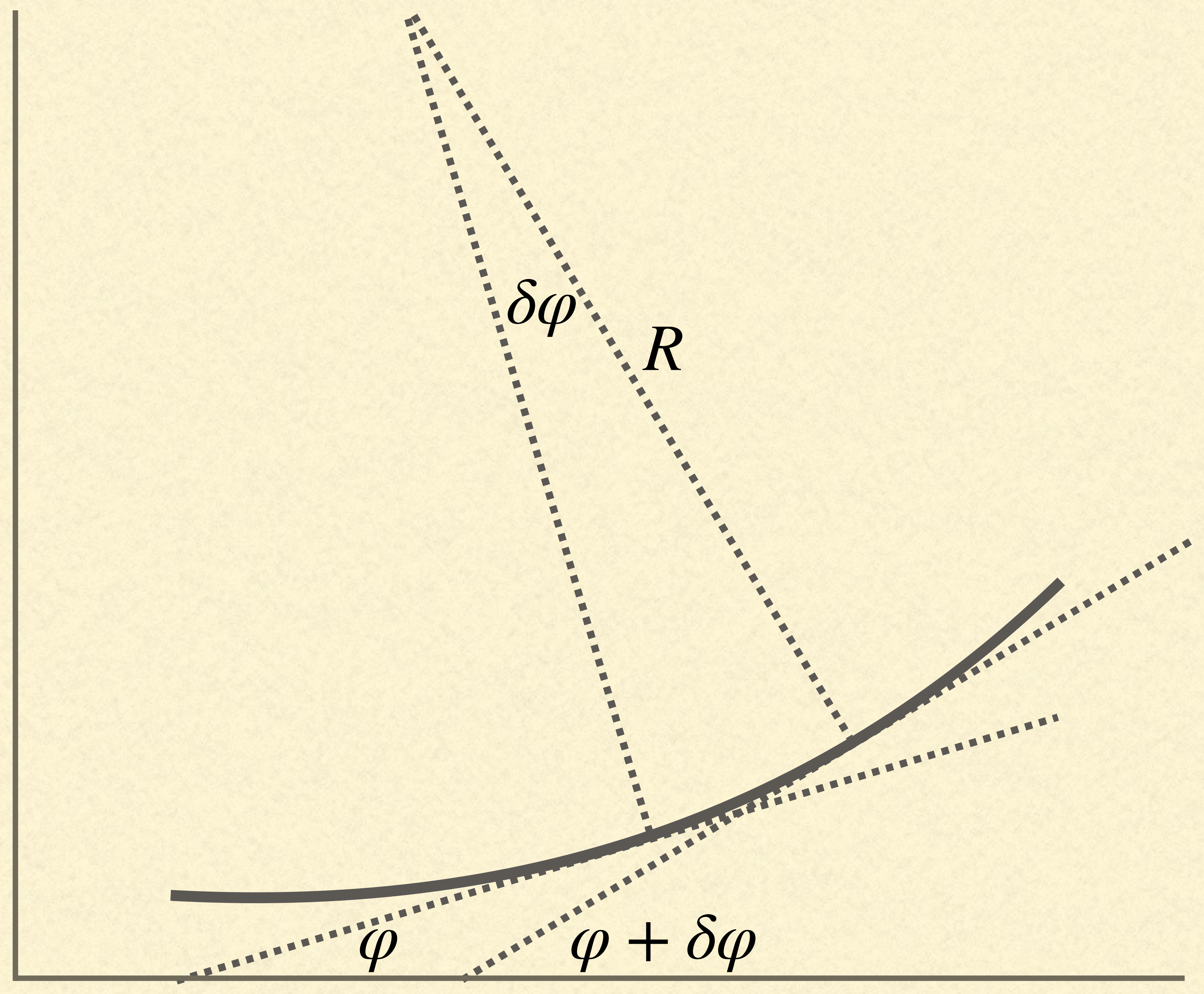
nepovinné

funkcia a jej polomer krivosti

nepovinné

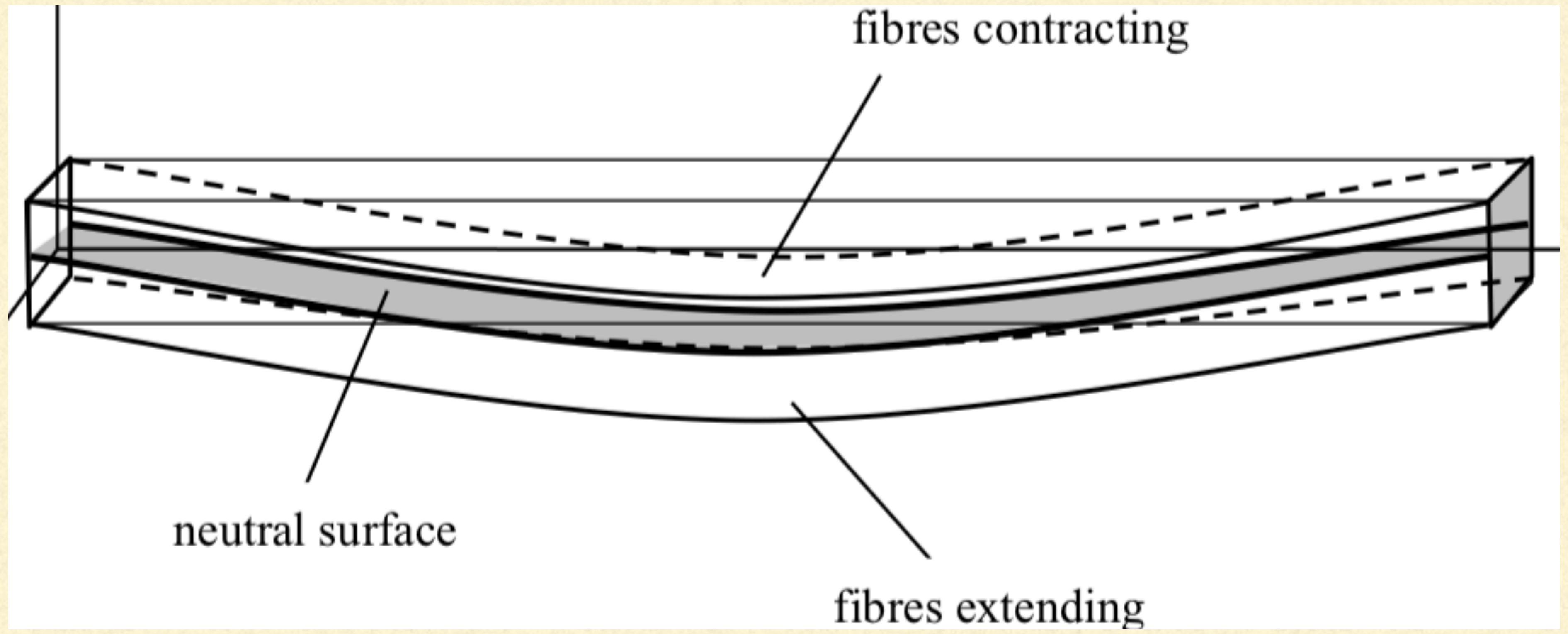
- riešenie spočíva v použití niekoľkých trikov, prvým je použitie tzv. polomeru krivosti
- ak sa pohybujeme po kúsku nejakej krivky, zodpovedá to v každom bode pohybu po nejakej kružnici – aký je jej polomer?
- $R = \dfrac{v}{\omega} = \dfrac{d\sqrt{dx^2 + dz^2}/dt}{d\varphi/dt} = \dfrac{d\sqrt{dx^2 + dz^2}}{d\varphi}$
- pre plytkú krivku $dz \ll dx$ a $\varphi \approx \tan\varphi = f'$

$$\frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d^2f}{dx^2}$$

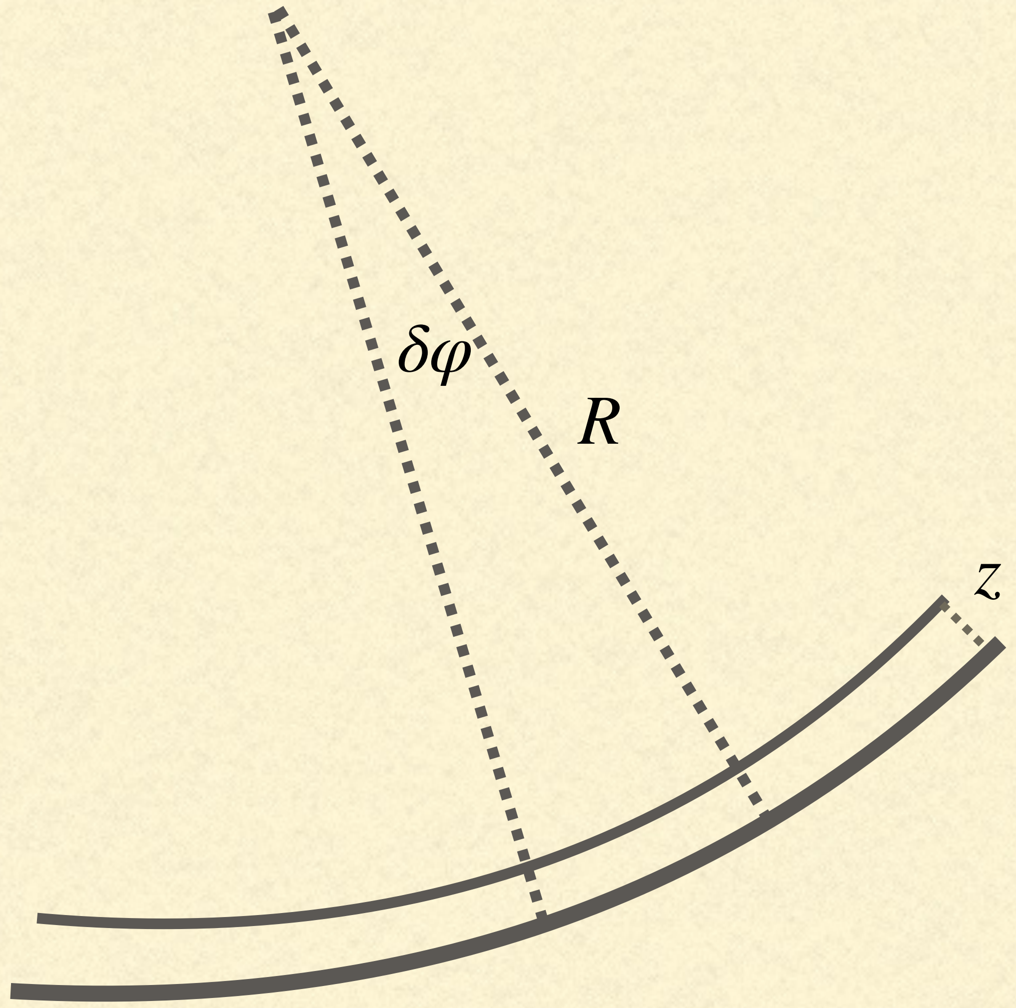


pružné sily pôsobiace na prierez

- polomer krivosti sa vyskytuje v pružnej sile pôsobiacej v ohnutej tyči, v ktorej sa rôzne vlákna predĺžia rôznym spôsobom



- vlákno vo vertikálnej vzdialenosti y od neutrálneho (nepredĺženého) vlákna má polomer krivosti $R + z$ a teda relatívne predĺženie $\frac{(R+z)\delta\varphi - R\delta\varphi}{R\delta\varphi} = \frac{z}{R}$



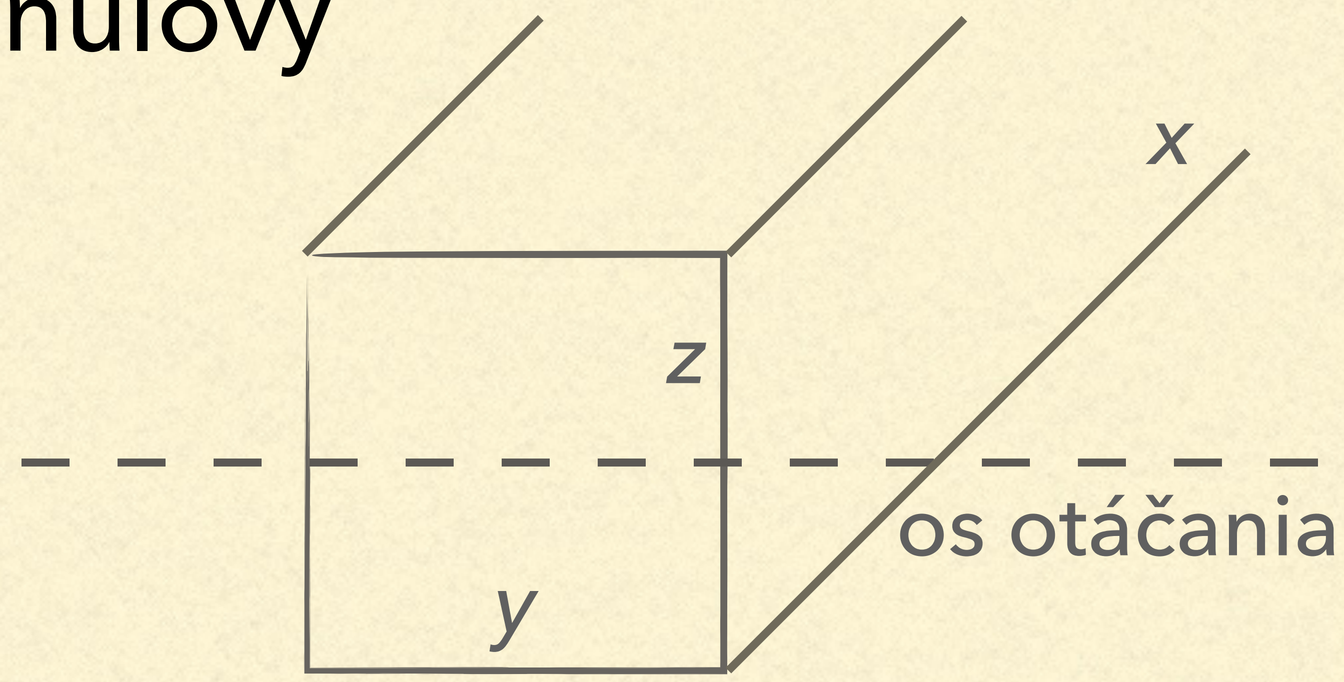
- čiže pružný tlak vo vertikálnej vzdialenosti y od neutrálneho vlákna je $\frac{Ez}{R}$

nepovinné

moment sily pôsobiaci na prierez

nepovinné

- ďalší trik: celkové predĺženie tyče či dosky považujeme za zanedbateľné, t.j. celkovú pružnú silu pôsobiacu na prierez neberieme do úvahy
- celkový moment sily pružných síl pôsobiacich na prierez je však nenulový a práve z neho vytiahneme kľúčový vzťah pre funkciu $f(x)$



- ďalší trik: uvažovať moment sily vzhľadom k osi prierezu v smere y

$$M = \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} dz\, dy\, z\, \frac{E\, z}{R} = \frac{E\, I}{R}$$

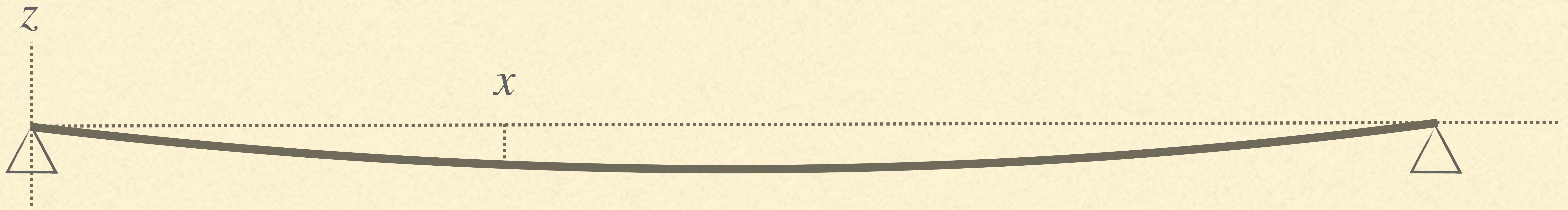
symbol I označuje príslušný integrál (nie veľmi šťastne sa mu hovorí moment zotrvačnosti)

- v spojení s vyjadrením polomeru krivosti dostávame: $$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{1}{E\, I}\, M(x)$$

nepovinné

moment sily pôsobiaci na kus tyče

nepovinné



- posledný trik: na kus tyče od počiatku až po x pôsobí v rovnováhe nulový moment sily
- moment sily od podpery vzhľadom k stredu prierezu v mieste x je $-\frac{1}{2}mg\,x$
- moment gravitačnej sily pôsobiacej na tento kus vzhľadom k tomu istému bodu je $\frac{mgx}{l}\frac{x}{2}$
- moment pružných síl musí vykompenzovať tieto dva momenty, čiže $M(x) = \frac{1}{2}mgx\,(1-\frac{x}{l})$

nepovinné

konečne vzt'ah pre funkciu $f(x)$

nepovinné

- spojením rovnice pre súvis polomeru krivosti s momentom sily a vyjadrením momentu sily

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{mg}{2EI}\, x\,(1 - \frac{x}{l})$$

- zintegrujeme a máme prvú deriváciu

- $$\frac{df(x)}{dx} = \frac{mg}{EI}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6\,l}\right) + c$$

- konštantu určíme z podmienky $\frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=l/2} = 0$, dostaneme $c = -\frac{mgl^2}{24EI}$

nepovinné

nepovinné

konečne funkcia $f(x)$

- ešte raz zintegrujeme

$$f(x) = \frac{mg}{EI}\left(\frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{24\,l} - \frac{xl^2}{24}\right) + c'$$

- konštanta sa určí z podmienky $f(0) = 0$ (dostaneme $c' = 0$)
- odtiaľto už vieme povedať všetko, napríklad maximálny priehyb

$$f(l/2) = -\frac{5}{384}\frac{mg\,l^3}{EI}$$

záverečné povzdychy k nosníku

- prečo sme uvedený výpočet priehybu nosníka nazvali škaredým, a nie pekným?
- pretože bol založený na priveľkom množstve trikov, predpokladov a priblížení
- celý postup navyše nebol veľmi prirodzený (oveľa prirodzenejšie by bolo získať diferenciálnu rovnicu pre deformáciu veľkého nosníka z podmienok rovnováhy pre jeho malé kúsky – my sme ju ale získali z podmienky rovnováhy pre veľký kus)
- ale bola to zrejme celkom užitočná ilustrácia toho, ako počítajú tieto veci inžinieri (podobne by sa počítalo prehnutie nosníka podopretého v troch bodoch, čo je príklad, ktorý nemá jednoznačné riešenie v rámci mechaniky tuhého telesa)

úvodné povzdychy k pružnosti v 3D

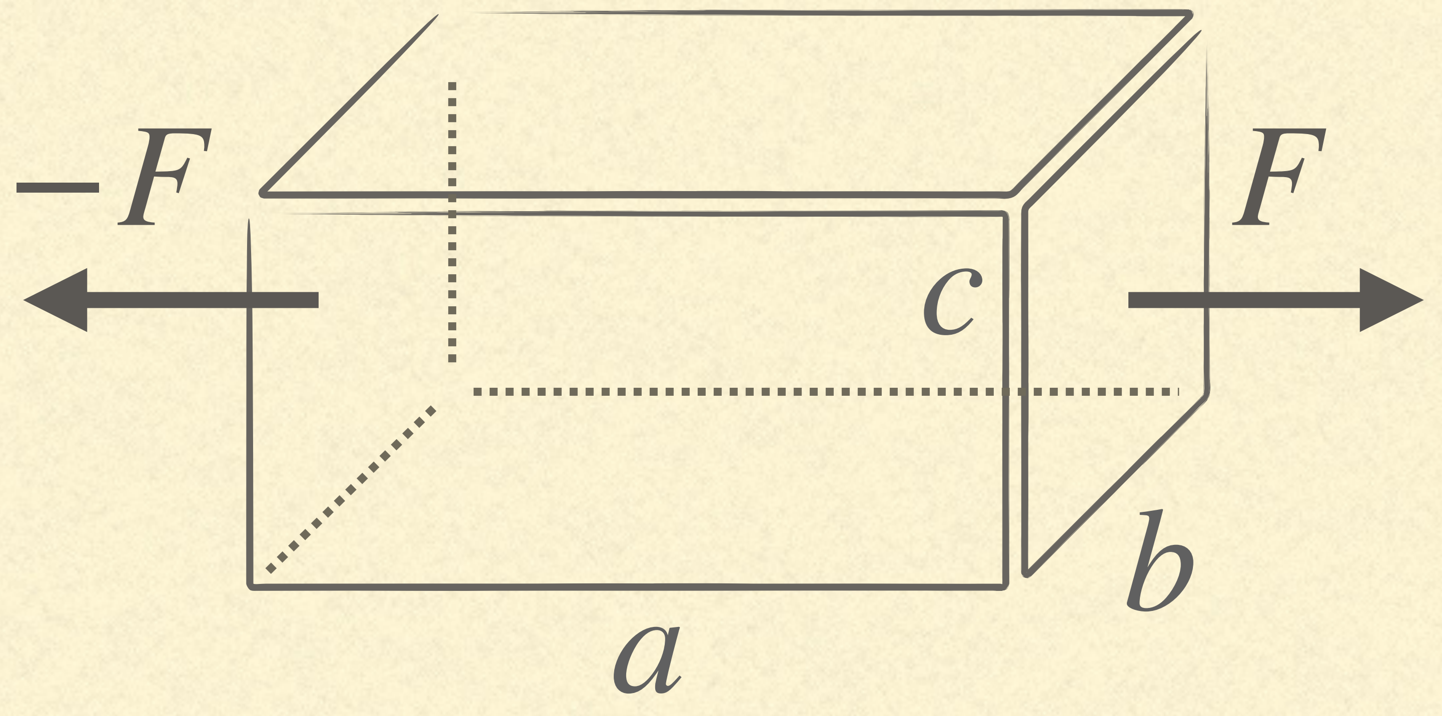
- mechanika pružných telies v 3D je oveľa komplikovanejšia ako v 1D
- konkrétne samotný Hookov zákon v 3D je 81-krát komplikovanejší ako v 1D
  (našťastie to nie je až také zlé, v skutočnosti je len 36-krát komplikovanejší)
  (v ešte skutočnejšej skutočnosti je dokonca iba 21-krát komplikovanejší)
- čo znamenajú v tomto prípade čísla 81, 36 a 21, to si hneď vysvetlíme
- ale skoro nič viac si už z mechaniky pružných telies v 3D nepovieme
  (nie preto, že by to nebolo dôležité a zaujímavé, ale preto,
  že na prvý semester je to asi predsa len príliš veľké sústo)

Hookov zákon pre priečnu deformáciu

- ak malý kúsok pružnej látky stláčame alebo naťahujeme v jednom smere, deformuje sa aj v kolmých smeroch

- pre relatívne predĺženia v kolmých smeroch platia analogické zákony ako v pozdĺžnom smere, akurát Youngov modul pružnosti E je v nich nahradený konštantami E', E''

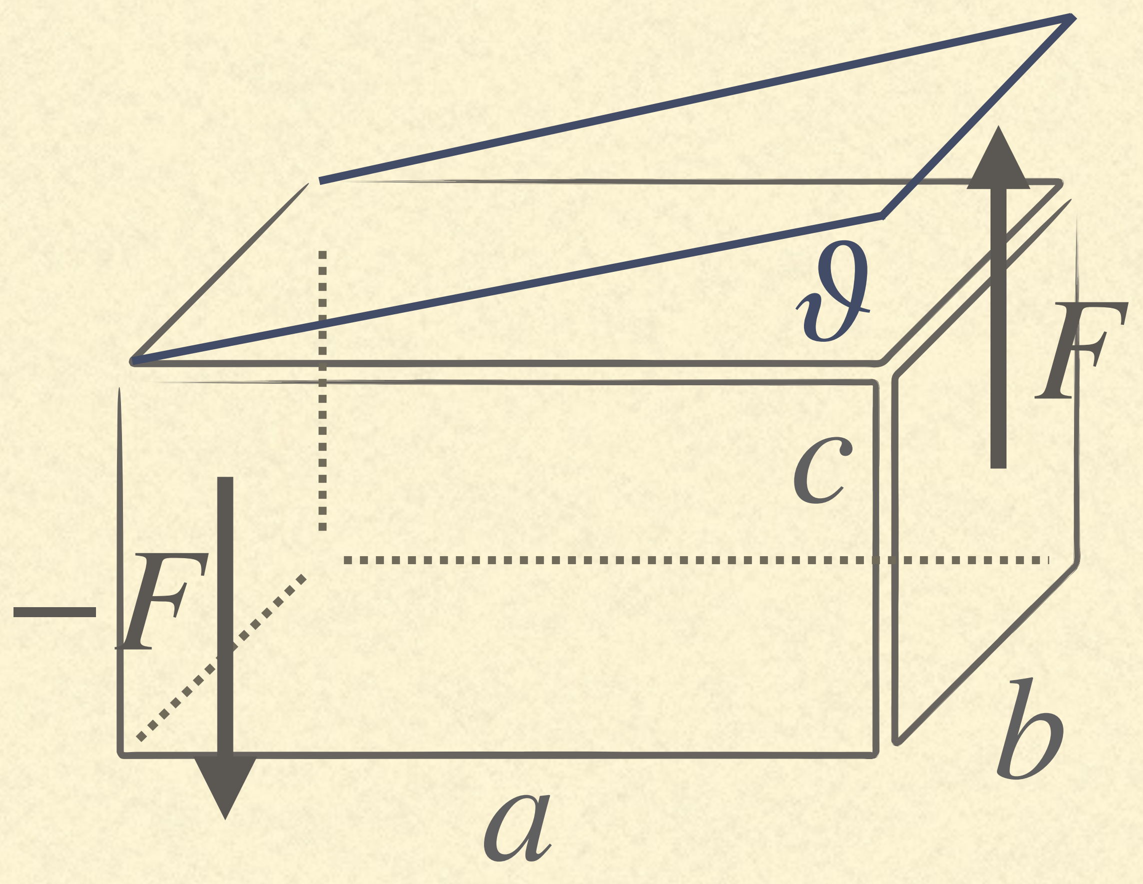
- v izotropnej pružnej látke platí $E' = E''$ a konštantu $1/E'$ zapisujeme obvykle ako σ/E, kde σ je tzv. Poissonova konštanta



$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{1}{E'}\frac{F}{bc} \qquad \frac{\Delta c}{c} = \frac{1}{E''}\frac{F}{bc}$$

Hookov zákon pre deformáciu v šmyku

- na malý kúsok pružnej látky môže pôsobiť nielen sila kolmá na plôšku tohto kúska, ale aj sila rovnobežná s plôškou
- ak je pritom celkový moment sily nulový, kúsok sa neroztočí, ale zdeformuje sa
- posunutie (nie predĺženie) v smere sily teraz nie je úmerné veľkosti kúska v tomto smere, ale veľkosti kúska v smere kolmom na silu
- zákon sa často formuluje aj pomocou uhla ϑ (pričom pre malé uhly $\Delta c/a = \tan\vartheta = \vartheta$)



$$\frac{\Delta c}{a} = \frac{1}{G}\frac{F}{bc}$$

koľko je napätí a koľko deformácií?

- na každdú dvojicu protiľahlých stien kvádra môžu pôsobiť tri navzájom kolmé sily (po delení plochou steny ich voláme napätia)
- dvojice protiľahlých stien sú tri, takže spolu máme deväť rôznych napätí
- každé z tých napätí spôsobuje deformáciu v niekoľkých rôznych smeroch
- každá stena sa môže deformovať v smere kolmom a v dvoch rovnobežných smeroch
- deformácie vyjadrujú vzájomné posunutie protiľahlých stien ⇒ týkajú sa dvojíc stien
- tri dvojice protiľahlých stien a pre každú deformácie v troch rôznych smeroch: spolu deväť rôznych deformácií

vo všeobecnosti hovorí Hookov zákon o tom, ako závisí týchto deväť deformácií od spomínaných deviatich napätí (tlakov resp. ťahov), Hookových zákonov je teda 81

nepovinné

matematická povaha napätí a deformácií

nepovinné

- napätie v pružnom telese je v skutočnosti tenzor, ktorý vektoru plôšky priradí vektor pružnej sily pôsobiacej na túto plôšku (pod vektorom plôšky sa rozumie vektor kolmý na túto plôšku, ktorého veľkosť je rovná veľkosti tejto plôšky)
- 9 napätí spomínaných na minulom slide je 9 kartézskych súradníc tenzora napätia

- deformácia v pružnom telese je tiež tenzor, ktorý pôvodnému polohovému vektoru priradí posunutý polohový vektor (a odráta od toho posunutie a otočenie telesa ako celku, aby to bola naozaj len deformácia)
- 9 deformácií spomínaných na minulom slide predstavuje 9 kartézskych súradníc tenzora deformácie

obidva tieto tenzory sú symetrické, čo znamená, že ich súradnicové matice sú symetrické
symetrická matica má 6 nezávislých komponent – nezávislých Hookových zákonov je teda 36
(v skutočnosti je nezávislých konštánt v Hookových zákonoch ešte menej, len 21)

dobrá správa na záver

- obidva tenzory (napätia aj deformácie) sú v pružnom telese funkciami polohy a času
- prirodzený jazyk fyziky pružných telies sú diferenciálne rovnice pre tenzory, čo je dosť zjavne mimo rámec prvých dvoch semestrov základného kurzu fyziky (to je zlá správa)
- preto podobne ako v prípade trojrozmerných rotácií tuhého telesa, aj trojrozmerné deformácie pružného telesa veľmi rýchlo opustíme a vrátite sa k nim, aspoň do určitej miery, na prednáške z Teoretickej mechaniky v druhom ročníku (to je tá dobrá správa)
- my sa na budúcej prednáške vrátime k jednému rozmeru a naučíme sa ako vyzerá mimoriadne (naozaj mimoriadne) dôležitý jednorozmerný pohyb pružného telesa