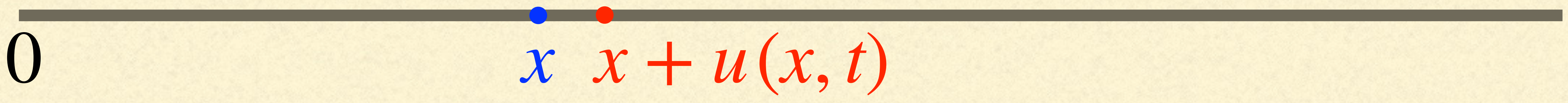
POHYB PRUŽNÉHO TELESA

Hookov zákon a dynamika v 1D

programové vyhlásenie (prvá časť)

- v minulej prednáške sme sa zaoberali statickou deformáciou pružných telies
- v tejto prednáške sa pozrieme na pohyb pružného telesa
- urobíme to len v jednorozmernom prípade, v ktorom môžu byť sily aj predĺženia len v jednom smere, a preto tam má Hookov zákon ten najjednoduchší tvar
- aj v tomto jednoduchom prípade dostaneme mimoriadne dôležitú pohybovú rovnicu, ktorá bude obsahovať nesmierne veľa fyziky, ďaleko presahujúcej tú konkrétnu vec, ktorú tu budeme skúmať (a ktorá sa volá pozdĺžne kmity tyče)

poloha vybraného kúska

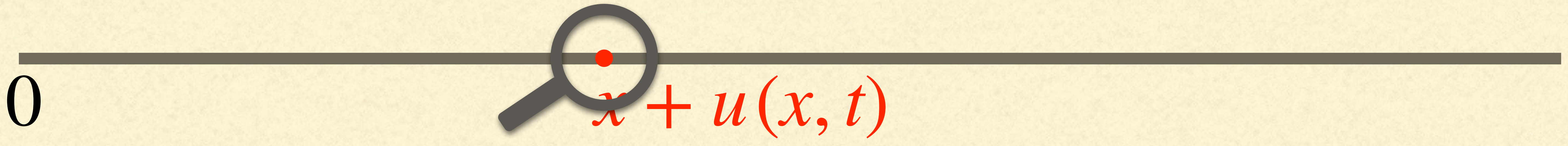


- majme tyč v stave pokoja
  každý jej kúsok má v tomto pokojovom stave nejakú polohu x
  toto x bude odteraz rodné číslo tohto kúska, týmto číslom ho budeme označovať

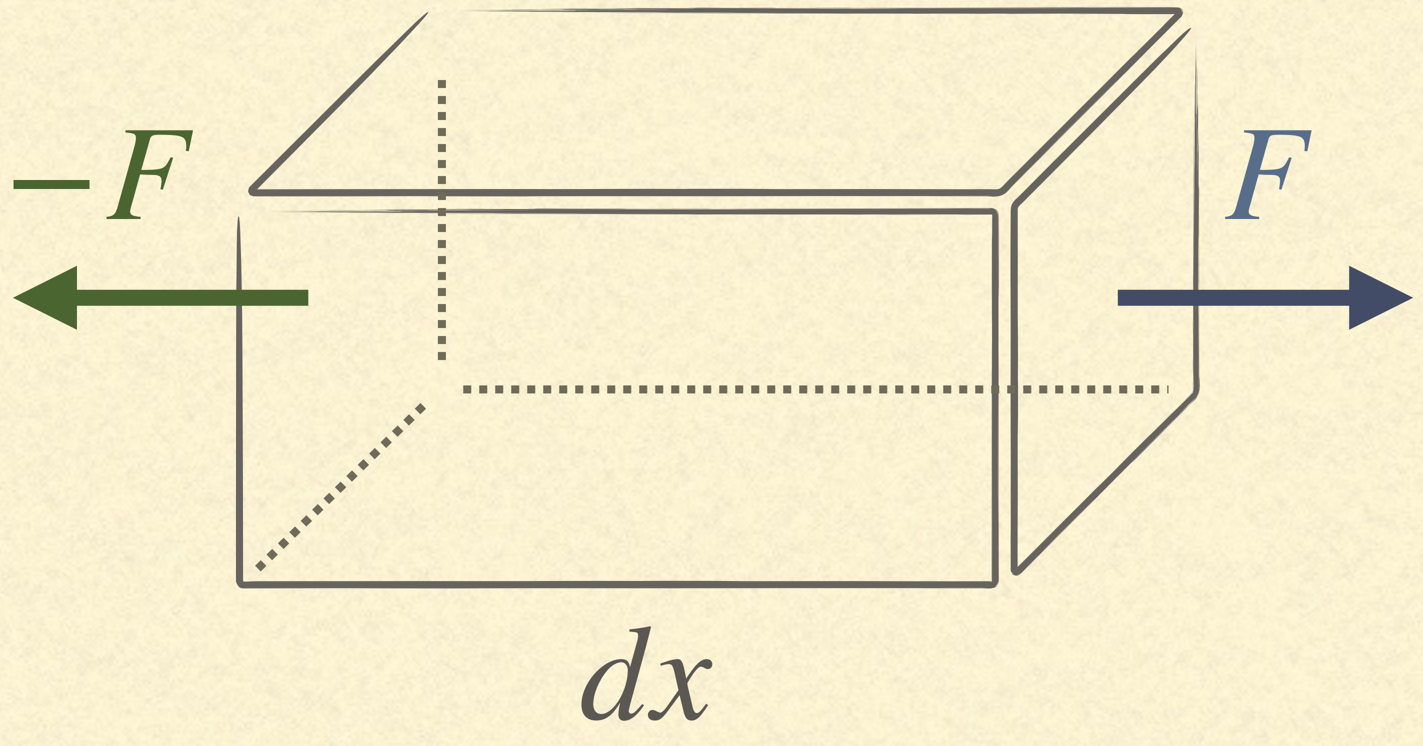
- pri pohyboch v rámci tyče sa jej kúsky premiestňujú, kúsok s menom x môže byť vychýlený o nejaké u, takže jeho okamžitá poloha je $x + u$

- výchylka u je pre rôzne kúsky rôzna, čiže závisí od kúska (od rodného čísla x)
  u je teda funkcia premenej x (a ak sa mení v čase, je funkciou aj času t)

sily pôsobiace na vybraný kúsok



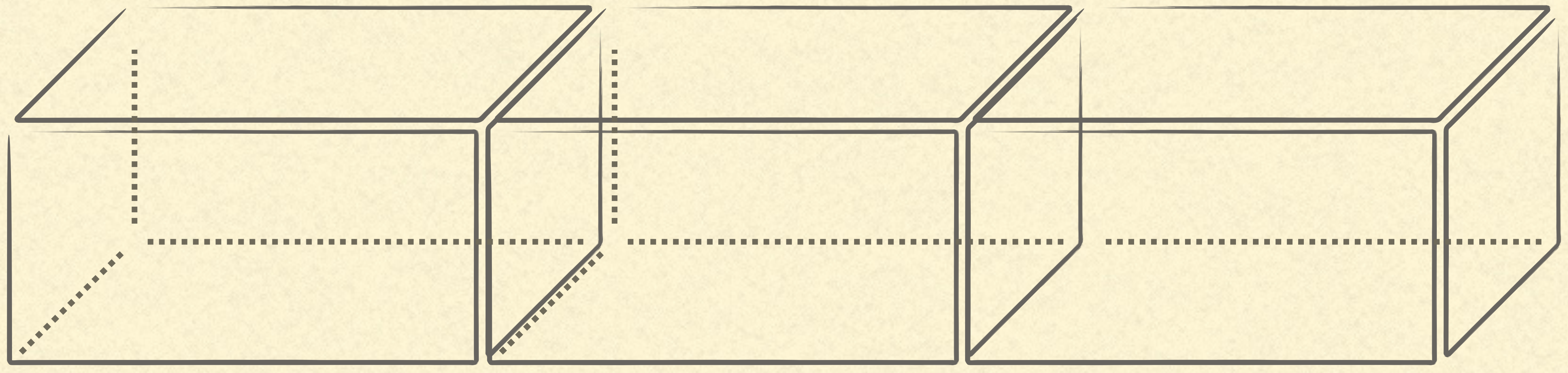
toto je pružná sila
od suseda vľavo



toto je pružná sila
od suseda vpravo

smerom dolu nepôsobí nijaká sila
sme v (takmer) jednorozmernom svete

relatívne predĺženia susedov



ľavý sused po vychýlení:

pravý okraj $x + u(x)$

ľavý okraj $x - dx + u(x - dx)$

dĺžka $x + u(x) - (x - dx + u(x - dx))$

$= dx + u(x) - u(x - dx)$

$$\frac{\Delta\, dx}{dx} = \frac{\text{dlzka} - \text{povodna dlzka}}{\text{povodna dlzka}} = \frac{u(x) - u(x - dx)}{dx}$$

pravý sused po vychýlení:

pravý okraj $x + 2dx + u(x + 2dx)$

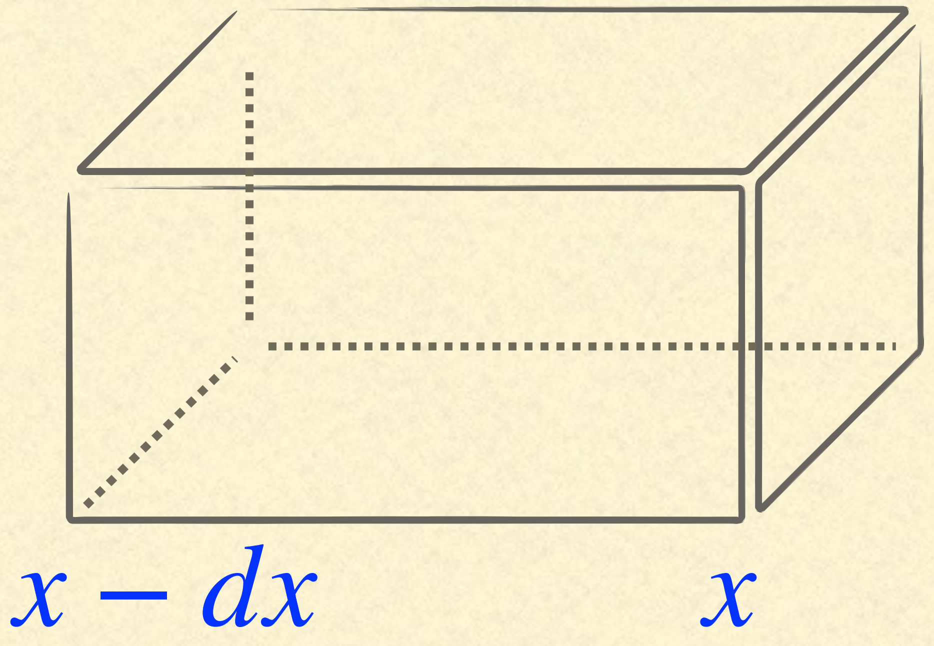
ľavý okraj $x + dx + u(x + dx)$

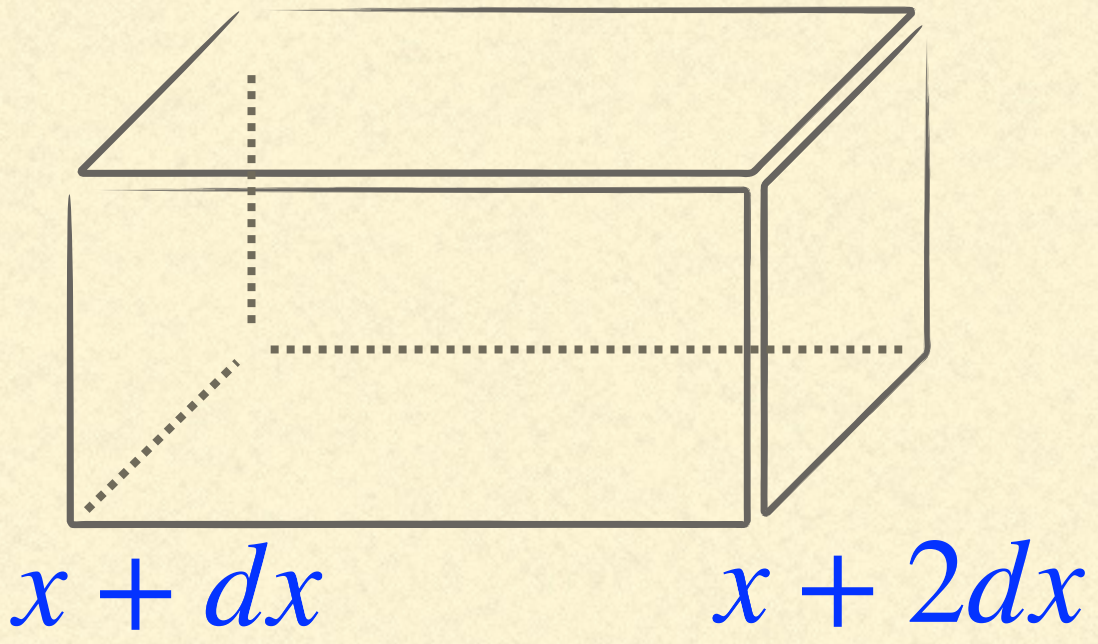
dĺžka pravý okraj - ľavý okraj

$= dx + u(x + 2dx) - u(x + dx)$

$$\frac{\Delta\, dx}{dx} = \frac{\text{dlzka} - \text{povodna}}{\text{povodna}} = \frac{u(x + 2dx) - u(x + dx)}{dx}$$

pružné sily pôsobiace na susedov





$$F(x) = E\,S\,\frac{\Delta\,dx}{dx} = E\,S\,\frac{u(x) - u(x - dx)}{dx}$$

v limite $dx \to 0$ dostaneme

$$F(x) = E\,S\,u'(x)$$

toto je derivácia zľava v bode x

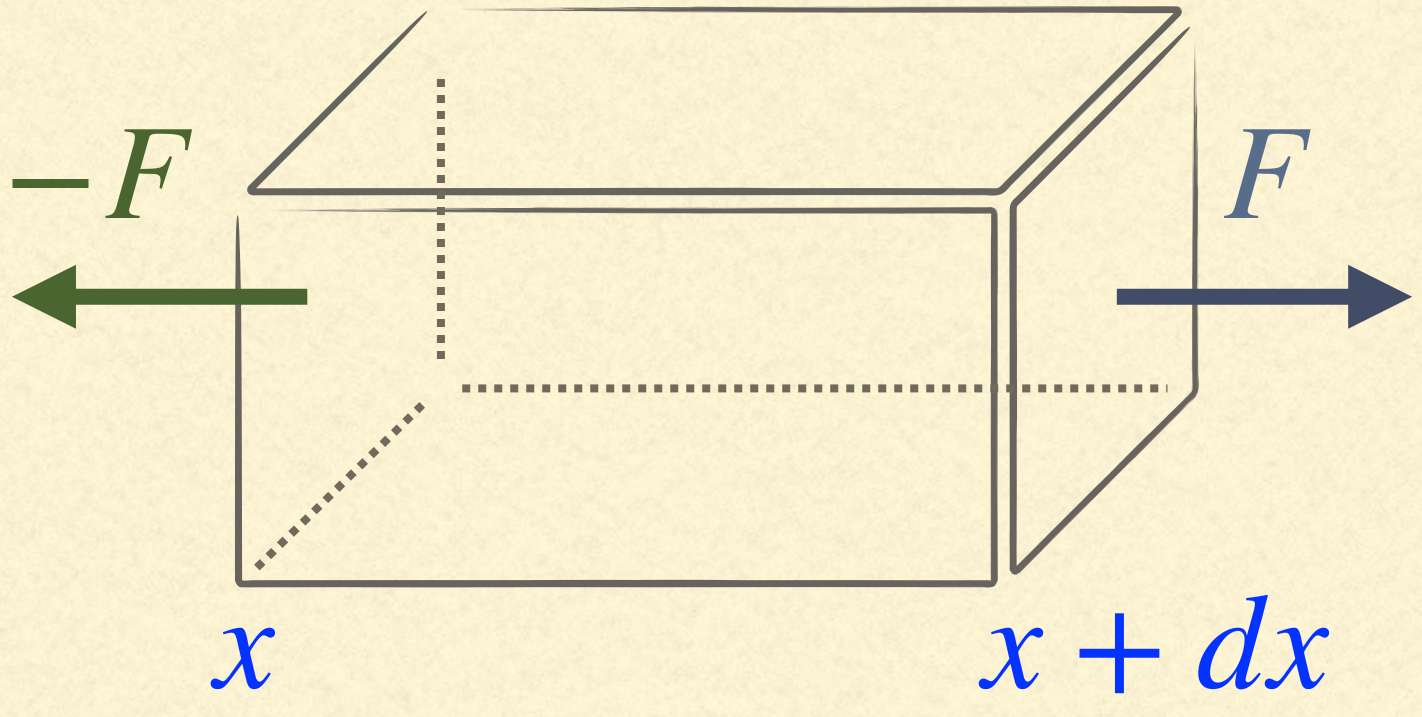
$$F(x + dx) = E\,S\,\frac{\Delta\,dx}{dx} = E\,S\,\frac{u(x + 2dx) - u(x + dx)}{dx}$$

v limite $dx \to 0$ dostaneme

$$F(x + dx) = E\,S\,u'(x + dx)$$

toto je derivácia zprava v bode $x + dx$

pružné sily pôsobiace na náš kúsok



- ak poznáme sily, ktorými pôsobí náš kúsok na susedné kúsky, tak zo zákona akcie a reakcie vieme aj to, akými silami pôsobia susedné kúsky na náš kúsok
- zľava pôsobí sila s veľkosťou $E\,S\,u'(x)$, zprava pôsobí sila s veľkosťou $E\,S\,u'(x+dx)$
- celková sila pôsobiaca na náš kúsok je rozdielom týchto dvoch síl

pohybová rovnica nášho kúska

- hmotnosť: $\rho\, S\, dx$
- poloha: $x + u(x,t)$
- rýchlosť: $\dot{u}(x,t)$
- zrýchlenie: $\ddot{u}(x,t)$
- zákon sily: $\rho\, S\, dx\, \ddot{u}(x,t) = F$
- celková sila: $F = E\, S\, \big(u'(x+dx) - u'(x)\big)$
- čiže: $\rho\, \ddot{u}(x,t) = E\, \dfrac{u'(x+dx) - u'(x)}{dx}$
- pre $dx \to 0$ $\boxed{\rho\, \ddot{u}(x,t) = E\, u''(x,t)}$

$x + u(x,t)$ nie poloha hmotného stredu, ktorá má vystupovať v pohybovej rovnici, je to poloha ľavého okraja, ktorá sa však od polohy hmotného stredu líši len infinitezimálne

poznámka o parciálnych deriváciách

- z funkcie $u(x,t)$ dvoch premenných sa pri fixovanom x stane funkcia len jednej premennej t
- derivácie tejto funkcie nazývame parciálnymi deriváciami podľa t
- $\dot{u}(x,t) = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \lim\limits_{dt \to 0} \dfrac{u(x,t+dt) - u(x,t)}{dt}$

- z funkcie $u(x,t)$ dvoch premenných sa pri fixovanom t stane funkcia len jednej premennej x
- derivácie tejto funkcie nazývame parciálnymi deriváciami podľa x
- $u'(x,t) = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \lim\limits_{dx \to 0} \dfrac{u(x+dx,t) - u(x,t)}{dx}$

vlnová rovnica

- pohybová rovnica pre pozdĺžne výchylky pružnej tyče (výchylky v jednom rozmere)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = 0$$

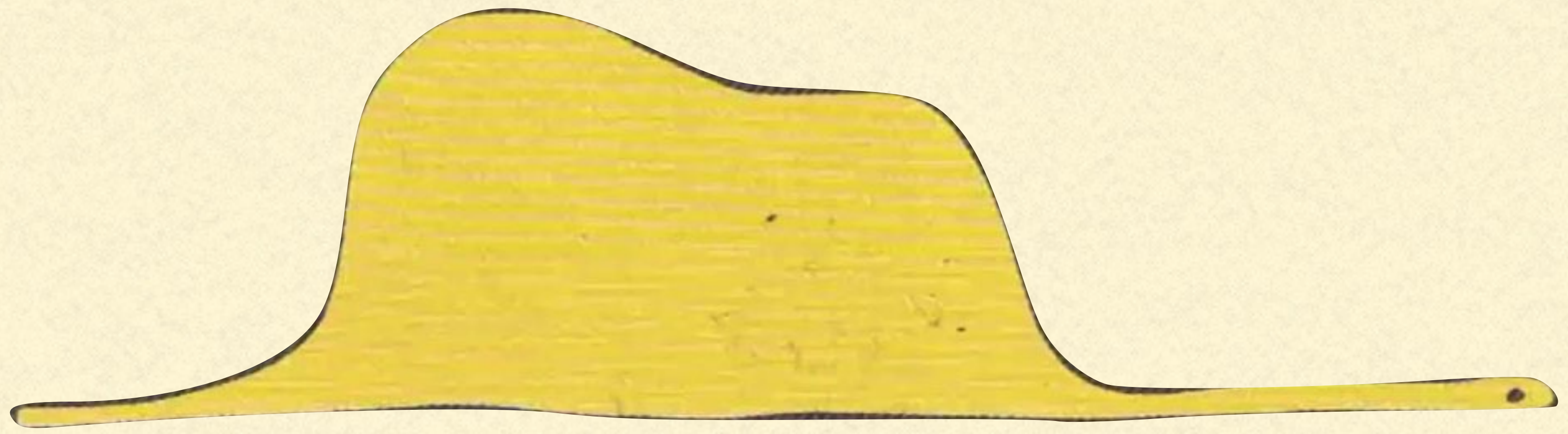
(spolu so zovšeobecneniami v 3D) je jednou z najdôležitejších rovníc celej fyziky

- je to tzv. parciálna diferenciálna rovnica (pretože obsahuje parciálne derivácie), hovorí sa jej vlnová rovnica a opisuje nielen tie výchylky pružnej tyče, ale aj mnohé iné vlny vo fyzike (a že ich je tam požehnane, pričom sú veľmi rôznorodej povahy)

čo je vlna?

- takéto niečo, pričom tie kopčeky sa pohybujú hore-dole?

- alebo to isté, ale kopčeky sa hýbu doprava alebo doľava?
- alebo takéto niečo, pričom celý profil sa pohybuje doprava alebo doľava?



- uvidíme, že v nejakom zmysle je najšikovnejšia tá tretia možnosť

pod (postupnou) vlnou budeme rozumieť akúkoľvek funkciu, ktorá nemení svoj tvar a pohybuje sa stálou rýchlosťou doprava alebo doľava

formálna definícia postupnej vlny

- hocijakú funkciu dvoch premenných x a t, ktorá je v skutočnosti funkciou len jednej premennej $\alpha = x \pm v \,.\, t$, nazývame postupnou vlnou

- grafom funkcie $f(x \pm v \,.\, t)$ v čase $t = 0$ je graf funkcie $f(x)$ a tento graf sa s časom posúva rýchlosťou v smerom doľava (ak je znamienko +) alebo doprava (ak je −)

- veľmi dôležitá úloha: vezmite nejakú funkciu $f(x \pm v \,.\, t)$, nakreslite jej graf v čase 0, potom nakreslite jej graf v čase $t = 1$ a $t = 2$. Pohybuje sa správnou rýchlosťou správnym smerom?

každá postupná vlna je riešením vlnovej rovnice

- ak $\alpha(x,t) = x \pm v\,.\,t$ potom funkciu $f\left(\alpha(x,t)\right)$ derivujeme ako zloženú funkciu

- $\dfrac{\partial}{\partial t} f(x \pm v\,.\,t) = \dfrac{df(\alpha)}{d\alpha}\,\dfrac{\partial \alpha}{\partial t} = \pm\, v\,\dfrac{df(\alpha)}{d\alpha}$

- $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x \pm v\,.\,t) = \dfrac{df(\alpha)}{d\alpha}\,\dfrac{\partial \alpha}{\partial x} = \dfrac{df(\alpha)}{d\alpha}$

- $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} f(x \pm v\,.\,t) = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\pm v\,\dfrac{df(\alpha)}{d\alpha}\right)$

  $= \pm\, v\,\dfrac{d^2 f(\alpha)}{d\alpha^2}\,\dfrac{\partial \alpha}{\partial t} = v^2\,\dfrac{d^2 f(\alpha)}{d\alpha^2}$

- $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} f(x \pm v\,.\,t) = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{df(\alpha)}{d\alpha}$

  $= \dfrac{d^2 f(\alpha)}{d\alpha^2}\,\dfrac{\partial \alpha}{\partial x} = \dfrac{d^2 f(\alpha)}{d\alpha^2}$

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \dfrac{E}{\rho}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(v^2 - \dfrac{E}{\rho}\right)\dfrac{d^2 f}{d\alpha^2}$ a to sa naozaj rovná nule, ak $\boxed{v^2 = E/\rho}$

poznámka o akustike

- z toho, čo sme urobili doteraz, to nevidno, ale pravda je taká, že tie naše pružné vlny sú zvukové vlny v tuhej látke v 1D svete, resp. zvukové vlny v tyči v 3D svete

- ako sa o tom môžeme presvedčiť? (alebo aspoň získať silné podozrenie, že je to naozaj tak?)

- zoberme rýchlosť našich vĺn $v = \sqrt{E/\rho}$ a porovnajme ju s nameranou rýchlosťou zvuku v niektorých tuhých látkach

- poučná hra: nájdite na internete E, ρ a rýchlosť zvuku v tyči pre niekoľko rôznych látok a porovnajte naše v s experimentom

- tu je zopár príkladov

	E			exp.

poznámka o priečnych vlnách

pozdĺžne vlny v tyči resp. v strune

- čisto 1D prípad, výchylky sú v tom istom smere, v ktorom je tyč resp. struna
- pohybovú rovnicu sme práve odvodili a videli sme, že je to vlnová rovnica
- ak kreslíme graf funkcie $u(x, t)$, vyzerá to, ako keby výchylka u bola v smere kolmom na smer x, ale to je len zdanie (tak proste kreslíme ten graf)

priečne vlny v tyči resp. v strune

- v skutočnosti viacrozmerný prípad s výchylkami kolmými na smer tyče
- pohybová rovnica je opäť vlnová rovnica (neodvodili sme to z časových dôvodov, ale vedeli by sme to odvodiť)
- graf funkcie $u(x, t)$, zodpovedá realite: výchylky sú v smere kolmom na tyč resp. na strunu

programové vyhlásenie (druhá časť)

- pre pohyb pružného telesa v 1D sme dostali vlnovú rovnicu, ktorá sa vyskytuje aj v mnohých iných oblastiach fyziky, a preto je veľmi užitočné naučiť sa ju riešiť

- pod riešením vlnovej rovnice rozumieme nájdenie takej funkcie, ktorá spĺňa
a) vlnovú rovnicu b) počiatočné podmienky $u(x,0) = f(x)$ a $\dot{u}(x,0) = g(x)$
c) tzv. okrajové podmienky (ak hľadáme riešenie len na ohraničenej oblasti)

- teraz sa naučíme jednu metódu riešenia tejto rovnice, ktorá skvelo funguje v 1D

- nabudúce sa naučíme inú metódu, ktorá funguje aj vo viacerých rozmeroch

jednoznačnosť riešenia vlnovej rovnice

- pre parciálnu diferenciálnu vlnovú rovnicu platí podobná veta o jednoznačnosti riešenia, aká platila pre obyčajné diferenciálne rovnice (len treba k počiatočným podmienkam pridať aj tzv. okrajové podmienky – ešte o nich bude reč)

- vetu tu nebudeme dokazovať, dôkaz sa ale robí na prednáške z Teórie elektromagnetického poľa v druhom ročníku

- princíp superpozície a veta o jednoznačnosti umožňujú veľmi ľahko riešiť vlnovú rovnicu v 1D

veta o existencii a jednoznačnosti riešenia

Každá slušná diferenciálna rovnica spolu s počiatočnými podmienkami má práve jedno riešenie, t.j. riešenie existuje a je jednoznačné

- počiatočnými podmienkami sú počiatočná poloha a rýchlosť: x_0, v_0
(ak je rád rovnice, t. j. stupeň najvyššej derivácie, rovný n, potom sú poč. podm. dané hodnotami derivácií od nultej až po n-1 v počiatočnom čase)

- klebeta: pod slušnosťou diferenciálnej rovnice $m\,.\,\ddot{x}(t) = F\left(x(t), \dot{x}(t), t\right)$ tu rozumieme spojitosť funkcie F a jej prvých parciálnych derivácií
(čo presne je parciálna derivácia v tejto chvíli vedieť nepotrebujeme)
(klebeta pre diferenciálne rovnice iných rádov znie úplne analogicky)

veta o jednoznačnosti nám umožňuje používať hádanie ako exaktnú metódu riešenia rovníc – ak uhádneme jedno riešenie, tak viac ich už neexistuje

superpozície postupných vĺn

- vlnová rovnica je lineárna parciálna diferenciálna rovnica (obsahuje dve druhé derivácie a každú z nich v prvej mocnine)
- pre lineárne diferenciálne rovnice (či už obyčajné alebo parciálne) platí princíp superpozície, ktorý pre vlnovú rovnicu hovorí toto: ak sú $u_1(x,t)$ a $u_2(x,t)$ riešeniami vlnovej rovnice, potom je aj ich superpozícia $c_1\, u_1(x,t) \;+\; c_2\, u_2(x,t)$ s ľubovoľnými konštantmi $c_1,\; c_2$ riešením tejto rovnice
- dôkaz: pozriem – vidím (úloha: naozaj pozrite)

princíp superpozície pre lineárne dif. rovnice

Toto je to kúzlo, ktoré robí z lineárnych diferenciálnych rovníc relatívne zvládnuteľnú vec.

- superpozíciou (alebo tiež lineárnou kombináciou) funkcií $x_1(t)$ a $x_2(t)$ nazývame funkciu $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ kde c_1 a c_2 sú ľubovoľné konštanty
- princíp superpozície: ak sú dve funkcie $x_1(t)$ a $x_2(t)$ riešeniami lineárnej diferenciálnej rovnice $a_0(t)x(t) + a_1(t)\dot{x}(t) + a_2(t)\ddot{x}(t) = b(t)$ s dvomi pravými stranami $b_1(t)$ a $b_2(t)$, potom ich superpozícia $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ je riešením tejto rovnice s pravou stranou $c_1b_1(t) + c_2b_2(t)$
- dôkaz: pozriem, vidím (derivácia superpozície je superpozícia derivácií) úloha: napriek triviálnosti si ten dôkaz samostatne poriadne urobte

nielen postupné vlny, ale aj ich ľubovoľné superpozície sú riešeniami vlnovej rovnice

d'Alembertova metóda

- v jednorozmernom svete sa riešenie vlnovej rovnice uhádne šokujúco ľahko

- začnime riešením rovnice na priamke (aby sme nemali okrajové podmienky), počiatočná výchylka nech je $u(x,0) = f(x)$ a počiatočná rýchlosť nech je nulová

- riešenie sa dá uhádnuť z fleku (prvý ho uhádol práve Jean d'Alembert v 18. stor.)

$$u(x,t) = \frac{1}{2} f(x - v\,.\,t) \,+\, \frac{1}{2} f(x + v\,.\,t)$$

- ako superpozícia postupných vĺn to spĺňa rovnicu a zjavne to spĺňa aj poč. podm. (vypočítajte deriváciu podľa času v čase $t = 0$ a ukážte, že je naozaj rovná nule)

slovný opis d’Alembertovho riešenia

- počiatočnú podmienku rozdelíme na dve rovnaké polovice a každú z nich pošleme svojím smerom (jednu doprava a jednu doľava)
- keď sa to povie takto, hneď začíname tušiť, prečo d’Alembertova metóda nebude dobre fungovať vo viacerých rozmeroch:
- vo viacerých rozmeroch je nekonečne veľa smerov a ak by sme chceli postupovať analogicky, potrebovali by sme rozdeliť počiatočnú podmienku na nekonečne veľa rovnakých častí – lenže to by bola každá z nich nulová
- skvelá d’Alembertova metóda je preto skvelá len v jednom rozmere (bohužiaľ)

nepovinná domáca úloha

- skúste uhádnuť riešenie vlnovej rovnice na priamke pre nulovú počiatočnú výchylku $u(x,0) = 0$ a nenulovú počiatočnú rýchlosť $\dot{u}(x,0) = g(x)$

- možno nebude zlý nápad využiť funkciu $G(x) = \dfrac{1}{v}\displaystyle\int g(x)\,dx$

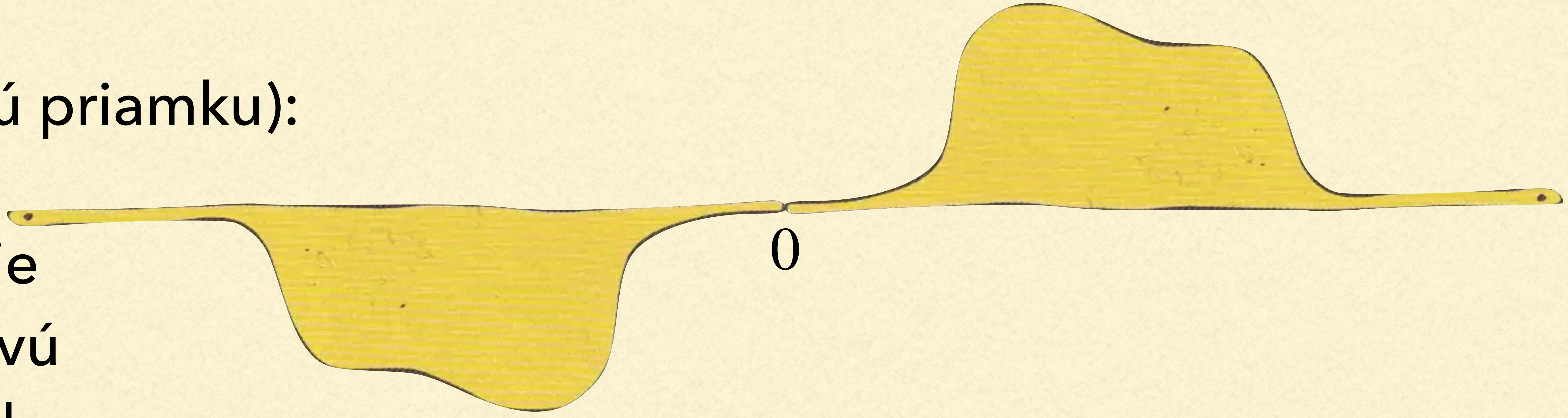
- premyslite si, že superpozícia tohto riešenia s riešením z predchádzajúceho slidu predstavuje úplne všeobecné riešenie vlnovej rovnice na priamke (a všimnite si, že nám na toto riešenie stačili štyri postupné vlny)

vlna na polpriamke (pevný koniec)

- ako príklad okrajových podmienok si predstavme vlnu na polpriamke s pevným (nevychýleným) koncom – ak má tento bod súradnicu 0, tak okrajová podmienka znie: $u(0,t) = 0$

- ako dosiahnuť pri počiatočnej podmienke "slon" splnenie okrajovej podmienky?

- takto (doplnením na celú priamku):



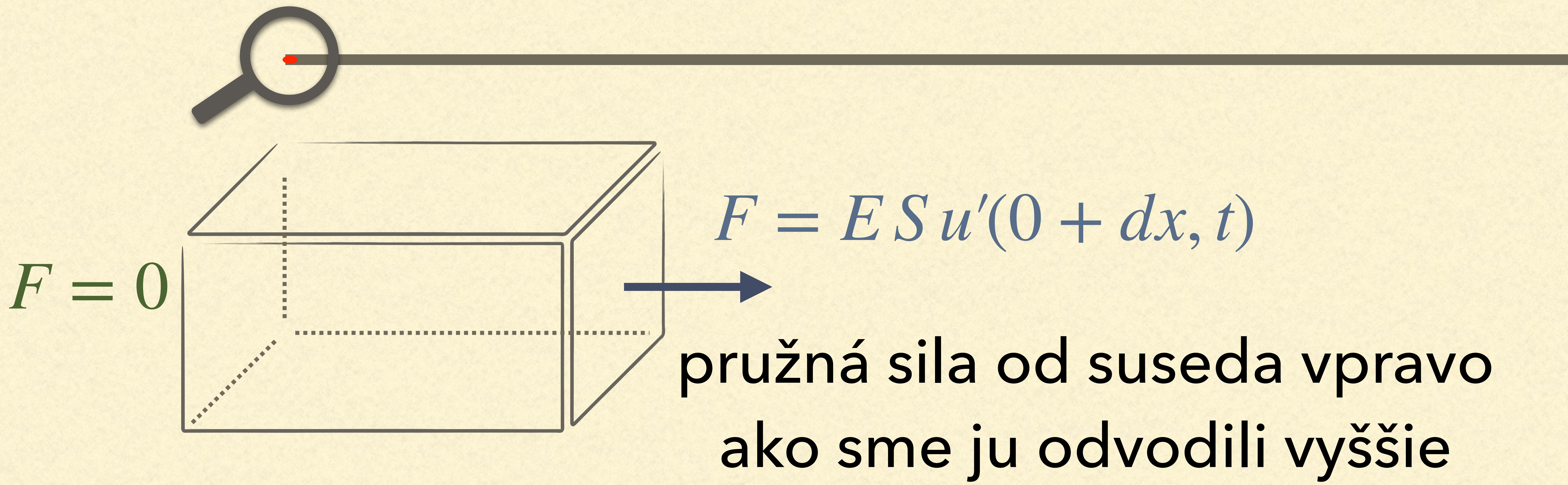
- presvedčte sa, že riešenie na priamke spĺňa okrajovú podmienku na polpriamke

okrajová podmienka pre voľný koniec

- ako ďalší príklad okrajových podmienok budeme uvažovať vlnu na polpriamke s voľným koncom (voľný znamená, že naňho nepôsobí nijaká vonkajšia sila)

- ako vyzerá okrajová podmienka v takomto prípade?

- aby sa infinitezimálne malý a ľahký kúsok nepohyboval s nekonečným zrýchlením, potrebujeme nulovú silu



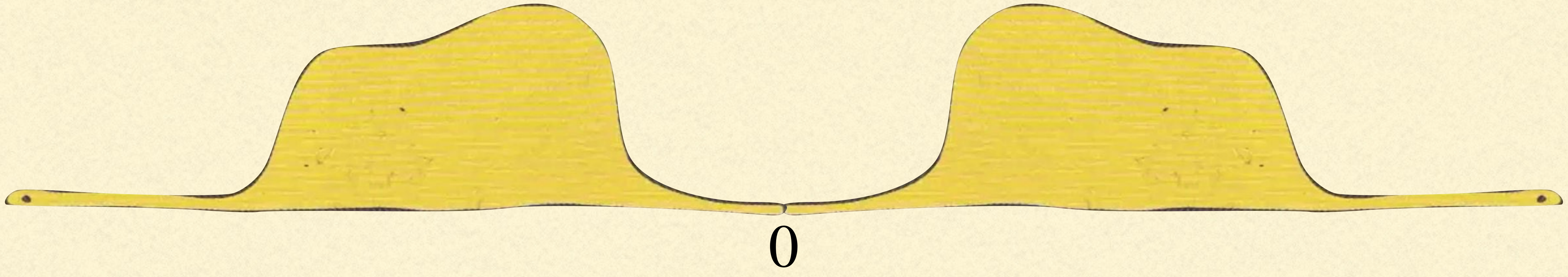
- v limite $dx \to 0$ dostávame podmienku: $\boxed{u'(0,t) = 0}$

vlna na polpriamke (voľný koniec)

- skúsme teraz nájsť riešenie vlnovej rovnice na polpriamke s voľným koncom (t.j. s koncom, na ktorý nepôsobí nijaká sila)
- na minulom slide sme si, že na vľnom konci musí platiť okrajová podmienka

$$u'(0,t) = 0$$

- ako to dosiahnuť?
- takto:
(presvedčte sa o tom)



odraz vlny na konci polpriamky

- riešenie na polpriamke sme dostali tak, že sme našli riešenie na priamke (ktoré uhádol už d'Alembert) s počiatočnými podmienkami na doplnenej polpriamke zvolenými tak vhodne, aby riešenie na priamke zabezpečilo splnenie okrajovej podmienky pre polpriamku

- ak sa teraz pozeráme len na pôvodnú polpriamku, vidíme polovicu "slona" odchádzať z polpriamky a zároveň sa z druhej strany vracať, čo vyzerá ako odraz

- v prípade pevného konca sa "slon" odráža tak, že prichádza zospodu (prevrátil sa) v prípade voľného konca sa odráža tak, že prichádza zvrchu (neprevrátil sa)

pohybujúci sa koniec polpriamky

- ako by sme riešili vlnovú rovnicu na polpriamke s predpísaným pohybom konca?
- uvažujme polpriamku $x \geq 0$ s okrajovou podmienkou $u(0,t) = \varphi(t)$ a nulové poč. podmienky (riešenie pre nenulové poč. podmienky nám dá princíp superpozície)
- rozšírme úlohu na priamku a skúsme vymysliet́ počiatočnú podmienku pre $x < 0$ tak, aby doprava idúca postupná vlna vytvorila v bode $x = 0$ vždy výchylku $\varphi(t)$
- takou počiatočnou podmienkou pre $x < 0$ je (premyslite si to) $u(x,0) = 2\,\varphi(x/v)$
- analogicky sa vyrieši úloha so zadanou silou pôsobiacou na koniec polpriamky

užitočná úloha na záver

- premyslite si, ako by sa šírila vlna s počiatočnou podmienkou “slon” na úsečke
  a) s obidvomi koncami pevnými (nehybnými)
  b) s obidvomi koncami voľnými
  c) s jedným koncom pevným a jedným voľným

- návod (ak potrebujete): doplňte vhodné počiatočné podmienky na celú priamku

- ťažšia (úplne nepovinná) úloha: ako sa zmenia riešenia predchádzajúcej úlohy, ak koncové body nie sú upevnené, ale je predpísaný ich pohyb, respektíve ak nie sú voľné, ale je predpísaná sila na ne pôsobiaca? (t.j. nájdite riešenia vlnovej rovnice na úsečke nie s nulovými, ale so všeobecnými okrajovými podmienkami)