

POHYB PRUŽNÉHO TELESA

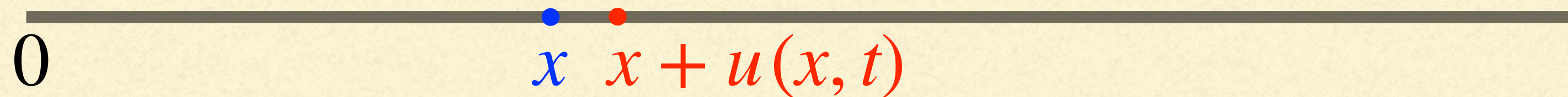
Hookov zákon a dynamika v 1D

mechanika 37

programové vyhlásenie

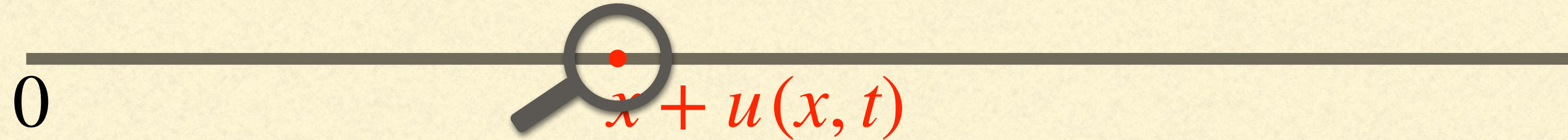
- v minulej prednáške sme sa zaoberali statickou deformáciou pružných telies
 - v tejto prednáške sa pozrieme na pohyb pružného telesa
 - urobíme to len v jednorozmernom prípade, v ktorom môžu byť sily aj predĺženia len v jednom smere, a preto tam má Hookov zákon ten najjednoduchší tvar
 - aj v tomto jednoduchom prípade dostaneme mimoriadne dôležitú pohybovú rovnicu, ktorá bude obsahovať nesmierne veľa fyziky, ďaleko presahujúcej tú konkrétnu vec, ktorú tu budeme skúmať (a ktorá sa volá pozdĺžne kmity tyče)
-

poloha vybraného kúska

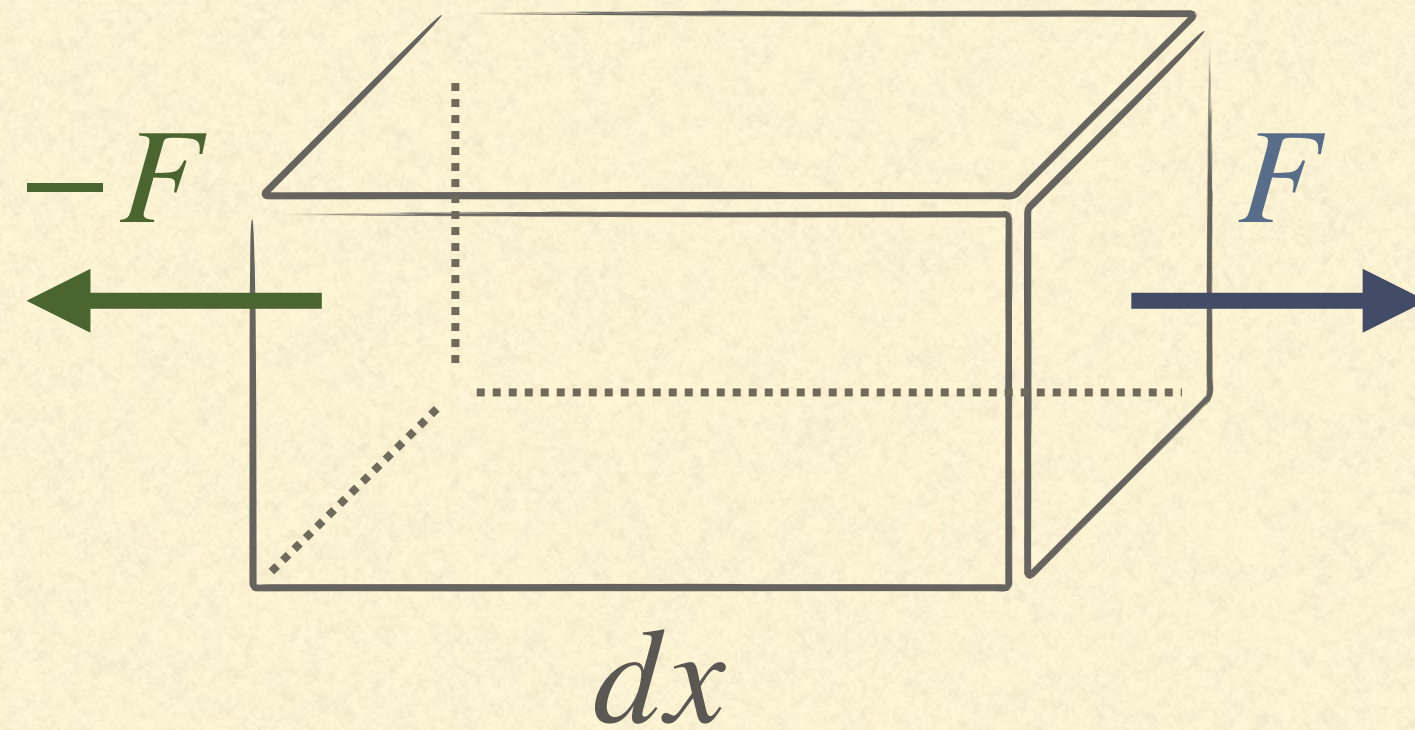


- majme tyč v stave pokoja
každý jej kúsok má v tomto pokojovom stave nejakú polohu x
toto x bude odteraz rodné číslo tohto kúska, týmto číslom ho budeme označovať
- pri pohyboch v rámci tyče sa jej kúsky premiestňujú, kúsok s menom x môže byť vychýlený o nejaké u , takže jeho okamžitá poloha je $x + u$
- výchylka u je pre rôzne kúsky rôzna, čiže závisí od kúska (od rodného čísla x)
 u je teda funkcia premenej x (a ak sa mení v čase, je funkciou aj času t)

sily pôsobiace na vybraný kúsok



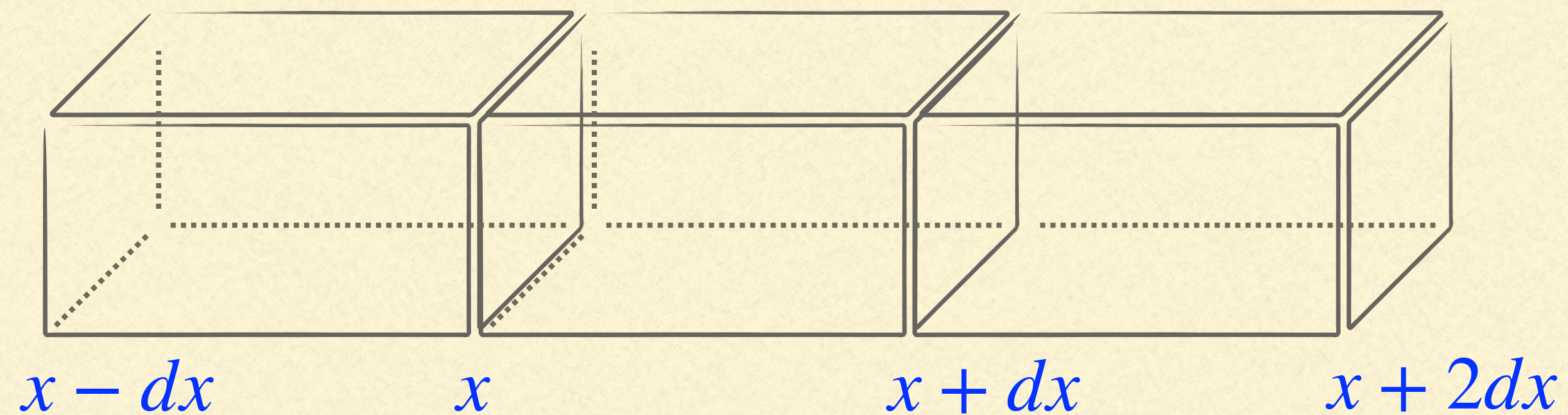
toto je pružná sila
od suseda vľavo



toto je pružná sila
od suseda vpravo

smerom dolu nepôsobí nijaká sila
sme v (takmer) jednorozmernom svete

relatívne predĺženia susedov



ľavý sused po vychýlení:

pravý okraj $x + u(x)$

ľavý okraj $x - dx + u(x - dx)$

dĺžka $x + u(x) - (x - dx + u(x - dx))$
 $= dx + u(x) - u(x - dx)$

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\text{dlzka} - \text{povodna dlzka}}{\text{povodna dlzka}} = \frac{u(x) - u(x - dx)}{dx}$$

pravý sused po vychýlení:

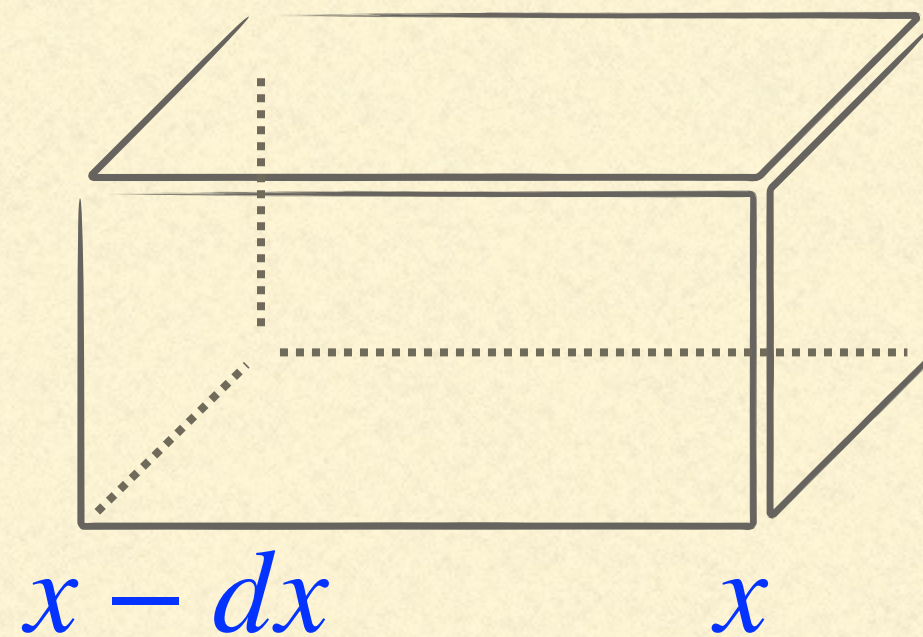
pravý okraj $x + 2dx + u(x + 2dx)$

ľavý okraj $x + dx + u(x + dx)$

dĺžka $\text{pravý okraj} - \text{ľavý okraj}$
 $= dx + u(x + 2dx) - u(x + dx)$

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\text{dlzka} - \text{povodna}}{\text{povodna}} = \frac{u(x + 2dx) - u(x + dx)}{dx}$$

pružné sily pôsobiace na susedov

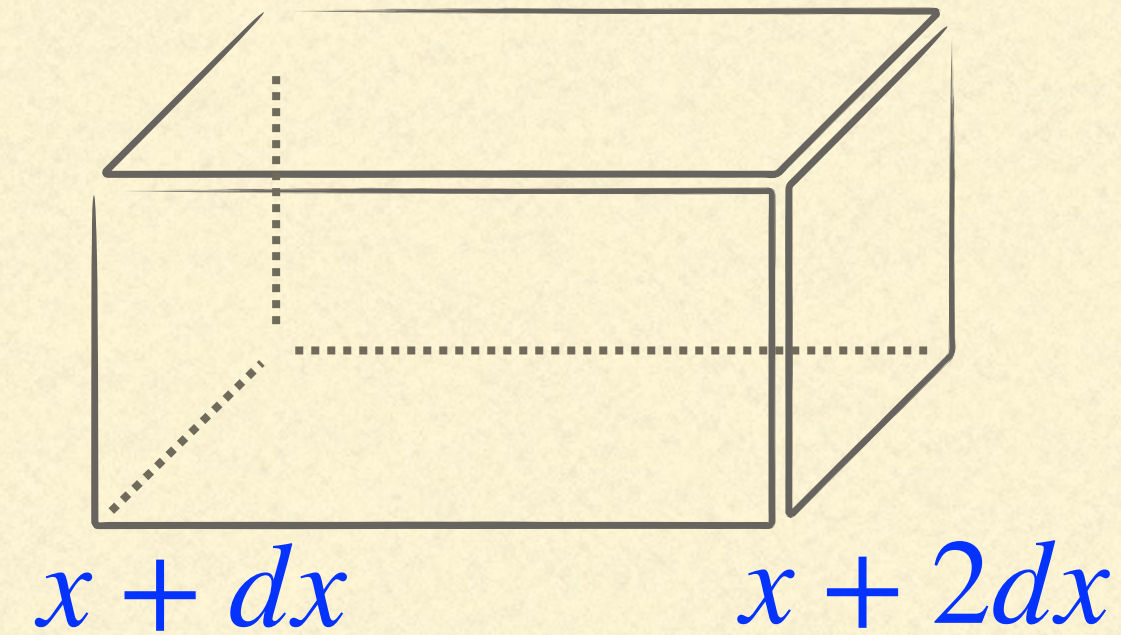


$$F(x) = E S \frac{\Delta dx}{dx} = E S \frac{u(x) - u(x - dx)}{dx}$$

v limite $dx \rightarrow 0$ dostaneme

$$F(x) = E S u'(x)$$

toto je derivácia zľava v bode x



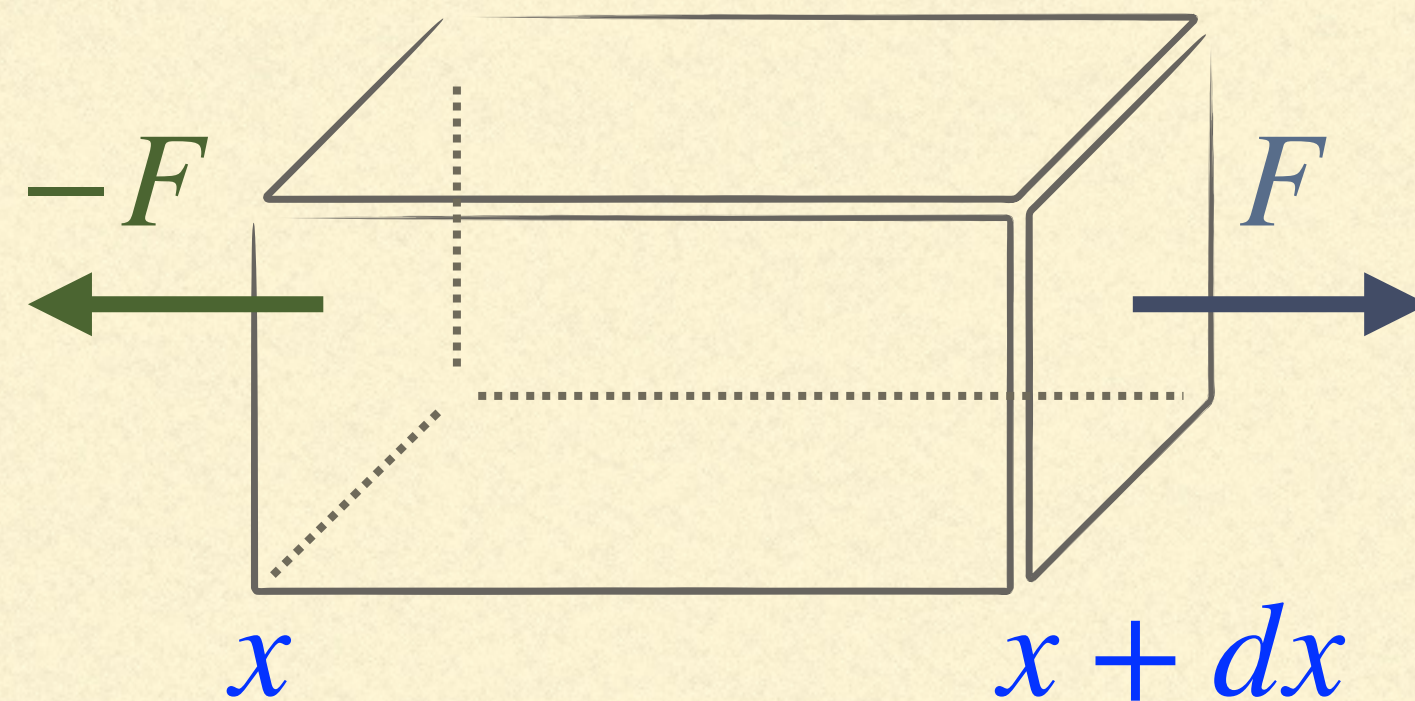
$$F(x + dx) = E S \frac{\Delta dx}{dx} = E S \frac{u(x + 2dx) - u(x + dx)}{dx}$$

v limite $dx \rightarrow 0$ dostaneme

$$F(x + dx) = E S u'(x + dx)$$

toto je derivácia zprava v bode $x + dx$

pružné sily pôsobiace na náš kúsok



- ak poznáme sily, ktorými pôsobí náš kúsok na susedné kúsky, tak zo zákona akcie a reakcie vieme aj to, akými silami pôsobia susedné kúsky na náš kúsok
- zľava pôsobí sila s veľkosťou $ESu'(x)$, zprava pôsobí sila s veľkosťou $ESu'(x + dx)$
- celková sila pôsobiaca na náš kúsok je súčtom týchto dvoch síl (síl, nie ich veľkostí)

pohybová rovnica nášho kúska

- hmotnosť: $\rho S dx$
- zákon sily: $\rho S dx \ddot{u}(x, t) = F$
- poloha: $x + u(x, t)$
- celková sila: $F = ES (u'(x + dx) - u'(x))$
- rýchlosť: $\dot{u}(x, t)$
- čiže: $\rho \ddot{u}(x, t) = E \frac{u'(x + dx) - u'(x)}{dx}$
- zrýchlenie: $\ddot{u}(x, t)$
- pre $dx \rightarrow 0$ $\rho \ddot{u}(x, t) = E u''(x, t)$

$x + u(x, t)$ nie je poloha hmotného stredu, ktorá má vystupovať v pohybovej rovnici, je to poloha ľavého okraja, ktorá sa však od polohy hmotného stredu líši len infinitezimálne

poznámka o parciálnych deriváciách

- z funkcie $u(x, t)$ dvoch premenných sa pri fixovanom x stane funkcia len jednej premennej t
- derivácie tejto funkcie nazývame parciálnymi deriváciami podľa t
- $\dot{u}(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{u(x, t + dt) - u(x, t)}{dt}$
- z funkcie $u(x, t)$ dvoch premenných sa pri fixovanom t stane funkcia len jednej premennej x
- derivácie tejto funkcie nazývame parciálnymi deriváciami podľa x
- $u'(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{u(x + dx, t) - u(x, t)}{dx}$

vlnová rovnica

- pohybová rovnica pre pozdĺžne výchylky pružnej tyče (výchylky v jednom rozmere)

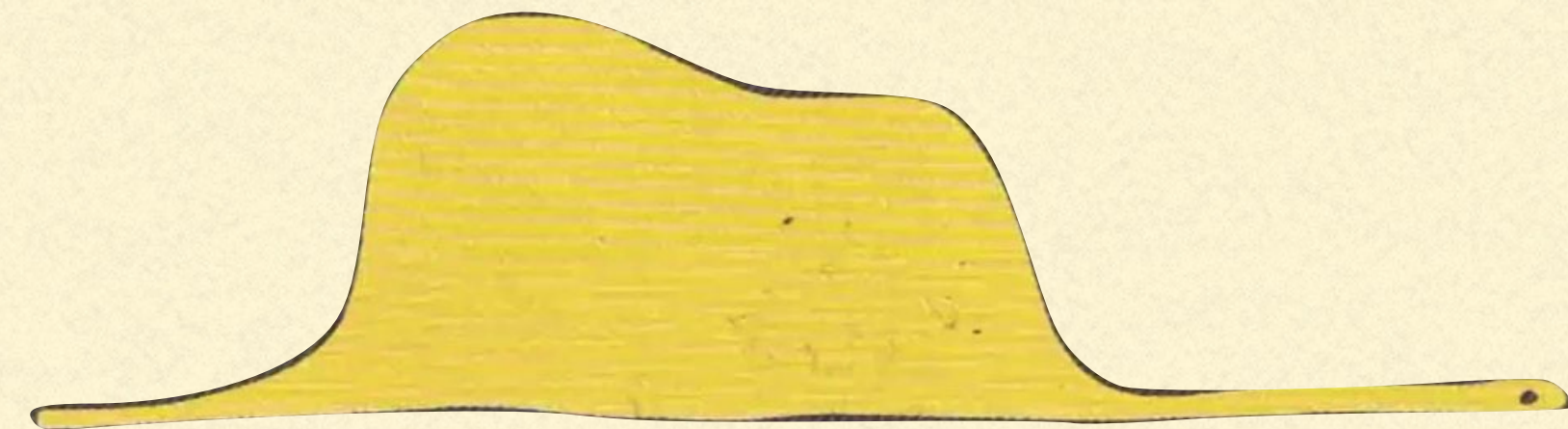
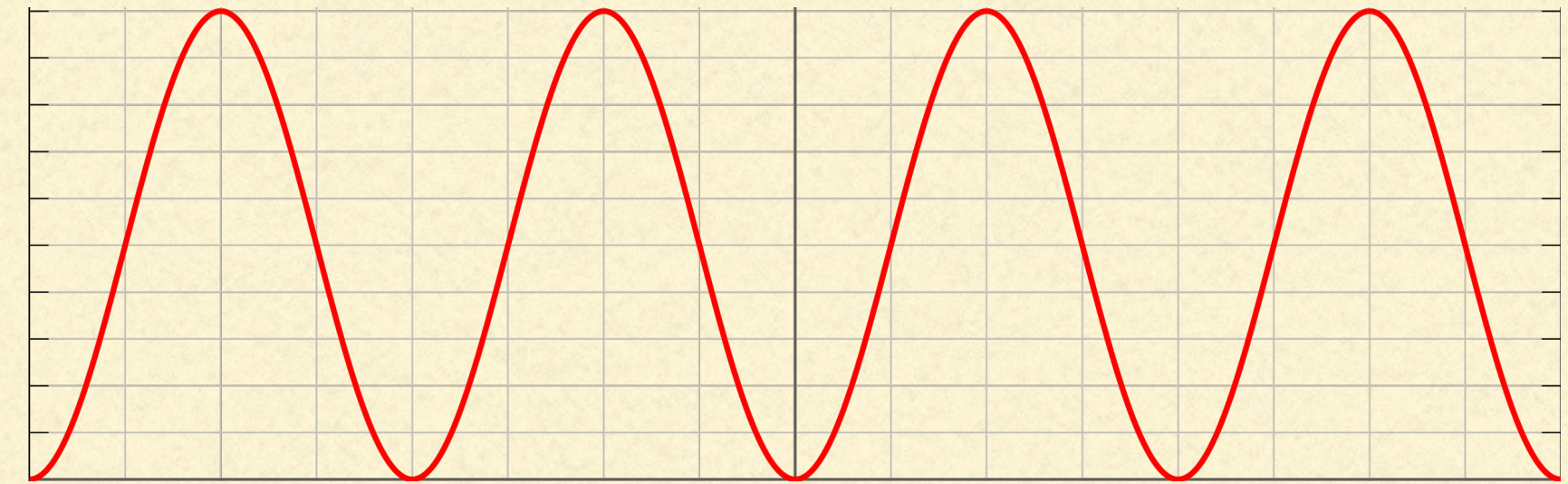
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = 0$$

(spolu so zovšeobecneniami v 3D) je jednou z najdôležitejších rovníc celej fyziky

- je to tzv. parciálna diferenciálna rovnica (pretože obsahuje parciálne derivácie), hovorí sa jej vlnová rovnica a opisuje nielen tie výchylky pružnej tyče, ale aj mnohé iné vlny vo fyzike (a že ich je tam požehnané, pričom sú veľmi rôznorodej povahy)
-

čo je vlna?

- takéto niečo, pričom tie kopčeky sa pohybujú hore-dole?
- alebo to isté, ale kopčeky sa hýbu doprava či doľava?
- alebo takéto niečo, pričom celý profil sa pohybuje doprava resp. doľava?
- uvidíme, že v nejakom zmysle je najšikovnejšia tá tretia možnosť



pod (postupnou) vlnou budeme rozumieť akúkoľvek funkciu, ktorá nemení svoj tvar a pohybuje sa stálou rýchlosťou doprava alebo doľava

formálna definícia postupnej vlny

- hocikú funkciu dvoch premenných x a t , ktorá je v skutočnosti funkciou len jednej premennej $\alpha = x \pm v \cdot t$, nazývame postupnou vlnou
 - grafom funkcie $f(x \pm v \cdot t)$ v čase $t = 0$ je graf funkcie $f(x)$ a tento graf sa s časom posúva rýchlosťou v smerom doľava (ak je znamienko $+$) alebo doprava (ak je $-$)
 - veľmi dôležitá úloha: vezmite nejakú funkciu $f(x \pm v \cdot t)$, nakreslite jej graf v čase 0 , potom nakreslite jej graf v čase $t = 1$ a $t = 2$. Pohybuje sa správnou rýchlosťou správnym smerom?
-

každá postupná vlna je riešením vlnovej rovnice

- ak $\alpha(x, t) = x \pm v \cdot t$ potom funkciu $f(\alpha(x, t))$ derivujeme ako zloženú funkciu

- $$\frac{\partial}{\partial t} f(x \pm v \cdot t) = \frac{df(\alpha)}{d\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \pm v \frac{df(\alpha)}{d\alpha}$$

- $$\frac{\partial}{\partial x} f(x \pm v \cdot t) = \frac{df(\alpha)}{d\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{df(\alpha)}{d\alpha}$$

- $$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x \pm v \cdot t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\pm v \frac{df(\alpha)}{d\alpha} \right) \\ &= \pm v \frac{d^2f(\alpha)}{d\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = v^2 \frac{d^2f(\alpha)}{d\alpha^2} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x \pm v \cdot t) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{df(\alpha)}{d\alpha} \\ &= \frac{d^2f(\alpha)}{d\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{d^2f(\alpha)}{d\alpha^2} \end{aligned}$$

- $$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(v^2 - \frac{E}{\rho} \right) \frac{d^2 f}{d\alpha^2}$$
 a to sa naozaj rovná nule, ak
$$v^2 = E/\rho$$

poznámka o akustike

- z toho, čo sme urobili doteraz, to nevidno, ale pravda je taká, že tie naše pružné vlny sú zvukové vlny v tuhej látke v 1D svete, resp. zvukové vlny v tyči v 3D svete
- ako sa o tom môžeme presvedčiť? (alebo aspoň získať silné podozrenie, že je to naozaj tak?)
- zoberme rýchlosť našich vln $v = \sqrt{E/\rho}$ a porovnajme ju s nameranou rýchlosťou zvuku v niektorých tuhých látkach
- poučná hra: nájdite na internete E , ρ a rýchlosť zvuku v tyči pre niekoľko rôznych látok a porovnajte naše v s experimentom
- tu je zopár príkladov (čísla sú približné)

	E	ρ	$\sqrt{E/\rho}$	exp.
drevo	10^{10}	700	3800	4000
železo	$2 \cdot 10^{11}$	8000	5000	5000
betón	$3 \cdot 10^{10}$	2400	3500	3700
sklo	$7 \cdot 10^{10}$	2500	5300	5000

všeobecná vlnová rovnica

- parameter E/ρ sa vyskytuje vo vlnovej rovnici pre pohyb struny, ale nie pre iné typy vln
- všeobecne sa preto vlnová rovnica zapisuje v tvare

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = 0$$

pričom vzťah $v^2 = \frac{E}{\rho}$ platí len v nami skúmanom špeciálnom prípade pružných vln

- pre iné vlny platia iné vzťahy, pre elektromagnetické a gravitačné vlny platí $v = c$
-

poznámka o priečnych vlnách

pozdĺžne vlny v tyči resp. v strune

- čisto 1D prípad, výchylky sú v tom istom smere, v ktorom je tyč resp. struna
- pohybovú rovnicu sme práve odvodili a videli sme, že je to vlnová rovnica
- ak kreslíme graf funkcie $u(x, t)$, vyzerá to, ako keby výchylka u bola v smere kolmom na smer x , ale to je len zdanie (tak proste kreslíme ten graf)

priečne vlny v tyči resp. v strune

- v skutočnosti viacrozmerný prípad s výchylkami kolmými na smer tyče
 - pohybová rovnica je opäť vlnová rovnica (neodvodili sme to z časových dôvodov, ale vedeli by sme to odvodiť)
 - graf funkcie $u(x, t)$, zodpovedá realite: výchylky sú v smere kolmom na tyč resp. na strunu
-

nepovinné

nepovinné

odvodenie rovnice pre priečne vlny

fahrplan na záver

- odvodili sme vlnovú rovnicu pre kmity tyče či struny a povedali sme si, že táto rovnica sa vyskytuje aj v mnohých ďalších oblastiach fyziky
 - našou ďalšou (veľmi dôležitou) úlohou je naučiť sa túto rovnicu riešiť
 - naučíme sa to dvomi spôsobmi (ktoré sa volajú podľa d'Alemberta a Fouriera)
prvý je ľahší, ale užitočný je len v jednom rozmere
druhý je ťažší, ale použiteľný v ľubovoľnom počte rozmerov
 - najmä ten druhý patrí do úplne základnej výbavy každého fyzika aj matematika
-