FOURIEROVA METÓDA

riešenie vlnovej rovnice separáciou premenných

mechanika 38

dve metódy riešenia vlnovej rovnice

d’Alembertova metóda

- riešenie sa uhádne v tvare postupných vĺn (v tvare superpozície postupných vĺn)
- funguje výborne v jednom rozmere, ale nedá sa preniesť do viacerých rozmerov
- riešenie je veľmi elegantné a jednoduché, ale bohužiaľ obmedzené na jeden rozmer

Fourierova metóda

- riešenie sa hľadá v dosť špeciálnom tvare, ktorý zodpovedá stojatým vlnám
- funguje úplne dobre nielen v jednom, ale aj vo viacerých rozmeroch
- riešenie má tvar nekonečného radu, ale jeho komplikovanosť nerastie s počtom dimenzií, čo je jeho hlavná výhoda

Fourierova metóda

- často sa jej hovorí aj **metóda separácie premenných** (a myslí sa tým niečo iné ako metoda separácie premenných v prípade obyčajných diferenciálnych rovníc)
- funguje nielen pre vlnovú rovnicu, ale aj pre iné veľmi dôležité fyzikálne rovnice, napríklad pre rovnicu vedenia tepla alebo pre Schrödingerovu rovnicu
- Fourierova metóda je ľahká na úsečke a pomocou istých rafinovaností sa dá preniesť aj na priamku (na rozdiel od d'Alembertovej metódy, ktorá bola ľahká na priamke a pomocou istých rafinovaností sa dala preniesť aj na úsečku)

tyč resp. struna s upevnenými koncami

- ikonický príklad Fourierovej metódy separácie premenných

- rovnica: $v^2 u''(x,t) - \ddot{u}(x,t) = 0$

  počiatočné podmienky: $u(x,0) = f(x) \quad \dot{u}(x,0) = g(x)$

  okrajové podmienky: $u(0,t) = 0 \quad u(L,t) = 0$

- základný nápad: riešenie hľadajme v tvare súčinu dvoch (zatiaľ neznámych) funkcií, z ktorých jedna závisí len od premennej x a druhá len od premennej t

$$u(x,t) = X(x)\,.\,T(t)$$

  poznámka: funkcie tohto typu nazývame stojatými vlnami (stoja na mieste a s časom menia svoju veľkosť)

a to sa môže?

- nuž, väčšina funkcií sa takto zapísať nedá – skúste to napríklad pre $u(x, y) = x + y$
- hneď na začiatku sme teda v podstate celkom bezdôvodne drasticky zúžili okruh podozrivých, čo nevyzerá ako príliš dobrý nápad
- ukáže sa, že napriek tomu nájdeme riešenia rovnice s okrajovými podmienkami, dokonca ich nájdeme nekonečne veľa
- tieto riešenia však nebudú spĺňať zadané počiatočné podmienky,
  ale zachráni nás princíp superpozície: vhodnou superpozíciou nájdených riešení dokážeme splniť aj počiatočné podmienky

takže ideme na to

- prvý krok: dosadíme do rovnice $X''(x)\,.\,T(t) - \frac{1}{v^2}X(x)\ddot{T}(t) = 0$
- druhý krok: vydelíme funkciou u $$\frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{1}{v^2}\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = 0$$
- tretí krok (vtipný): fixujeme $t = t_{\text{fix}}$ $$\frac{X''(x)}{X(x)} = \alpha$$ kde $\alpha = \frac{1}{v^2}\frac{\ddot{T}(t_{\text{fix}})}{T(t_{\text{fix}})}$
- štvrtý krok (vtipný): fixujeme $x = x_{\text{fix}}$ $$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = v^2\alpha$$ to isté α

čo sme to dostali?

- neuveriteľné zjednodušenie
- namiesto jednej parciálnej diferenciálnej rovnice pre $u(x,t)$
  máme dve obyčajné diferenciálne rovnice pre $X(x)$ a $T(t)$
- tie rovnice navyše nie sú previazané, ale tzv. separované (odtiaľ názov metódy)
- a dokonca to ani nie sú dve rovnice, pretože je to vlastne dvakrát tá istá rovnica
- a ešte k tomu je to rovnica LHO, ktorú už dávno vieme riešiť

riešenie rovnice pre $X(x)$

- pripomeňme si riešenia pohybovej rovnice LHO

  pre $\alpha > 0$ $\quad X(x) = c\, e^{\sqrt{\alpha}\, x} + c'\, e^{-\sqrt{\alpha}\, x}$

  pre $\alpha = 0$ $\quad X(x) = c\, x + c'$

  pre $\alpha < 0$ $\quad X(x) = c\ \sin\sqrt{|\alpha|}\, x + c'\, \cos\sqrt{|\alpha|}\, x$

- ktoré z nich spĺňajú okrajové podmienky?

- aké okrajové podmienky?

  $\forall t \quad u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0$

  $\forall t \quad u(L,t) = X(L)T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(L) = 0$

- $\alpha > 0$

  $X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -c'$

  $X(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -c' = 0$

- $\alpha = 0$

  $X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c' = 0$

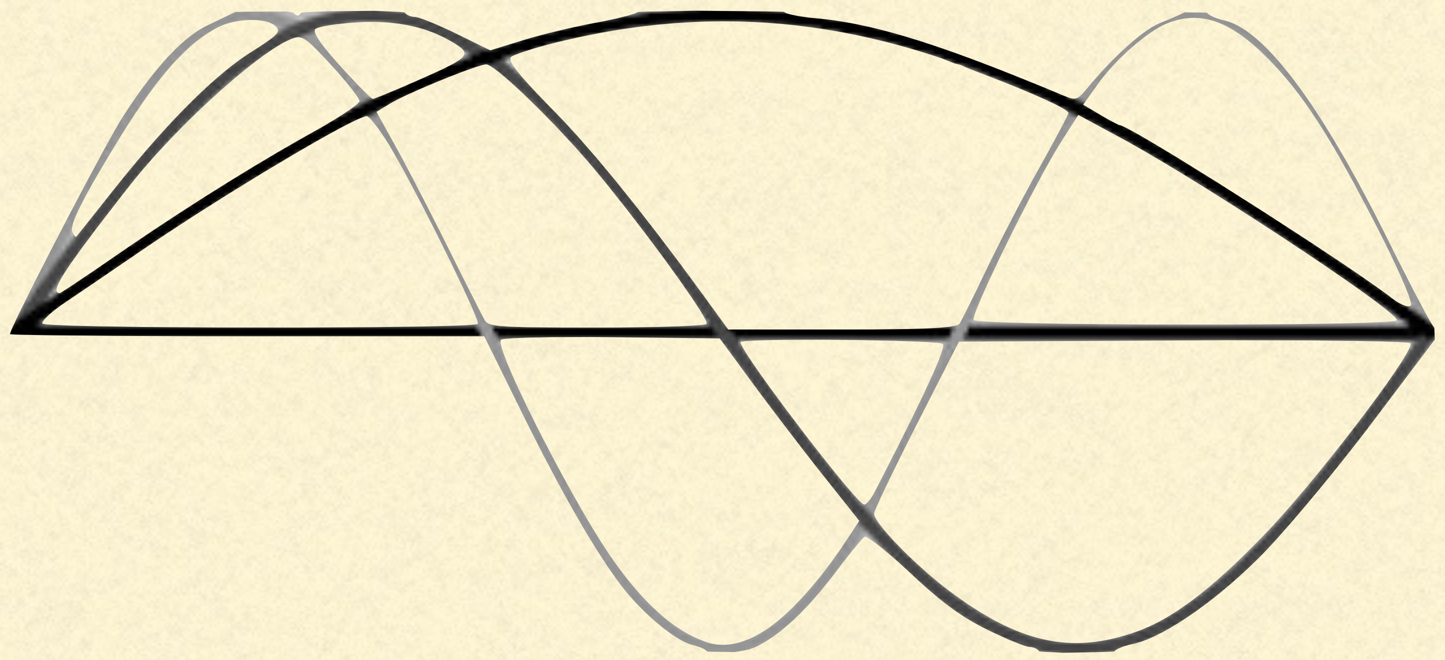
  $X(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$

- $\alpha < 0$

  len toto má nenulové riešenia

nenulové riešenie rovnice pre $X(x)$

- $X(x) = c\ \sin\sqrt{|\alpha|}\,x + c'\ \cos\sqrt{|\alpha|}\,x$
- $X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c' = 0$
- $X(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\sqrt{|\alpha|}L = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{|\alpha|}L = n\pi$
- $X(x) = c\ \sin\dfrac{n\pi x}{L} \qquad n = 1,2,\ldots$
- časté označenie: $X(x) = c\ \sin k_n x$ kde $\dfrac{n\pi}{L} = k_n$



riešenie rovnice pre $T(t)$

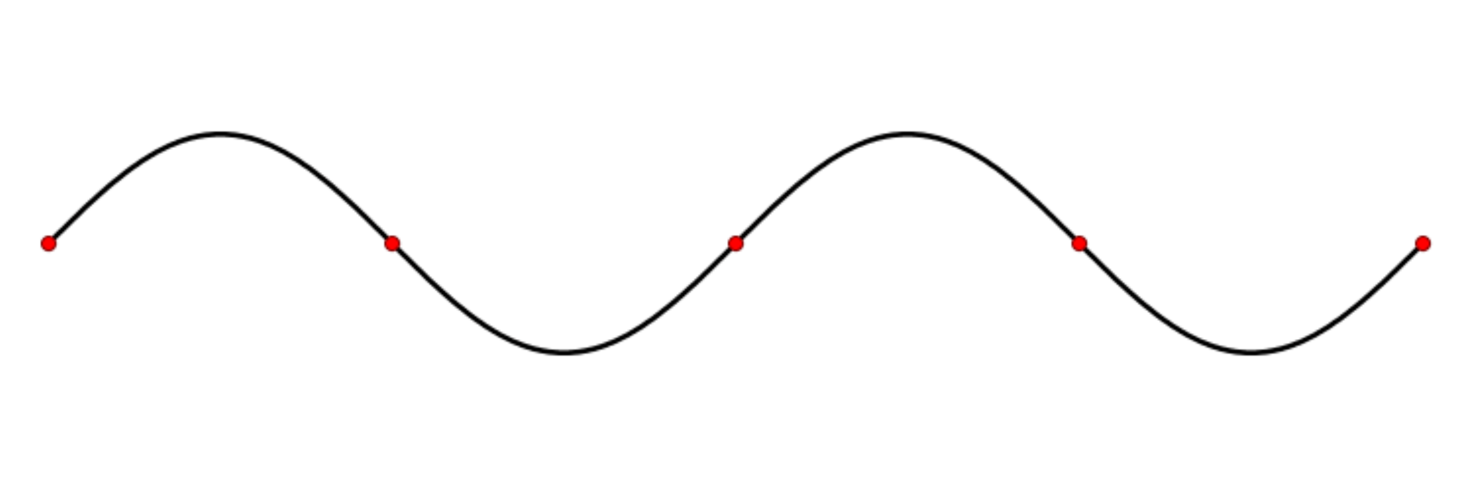
- nás zaujíma len pre $\alpha < 0$, pretože len vtedy existovali nenulové riešenia pre $X(x)$
- znova ide o riešenia rovnice pre LHO: $T(t) = c \sin \sqrt{v^2 |\alpha|}\, t + c' \cos \sqrt{v^2 |\alpha|}\, t$
- ktoré obvykle zapisujeme takto: $T(t) = c \sin \omega_n t + c' \cos \omega_n t$
- kde $\omega_n = v \sqrt{|\alpha|} = \dfrac{v n \pi}{L}$ čiže $\omega_n = v k_n$
- ostáva už len posledná vec, ktorá ešte nie je splnená, a to počiatočné podmienky

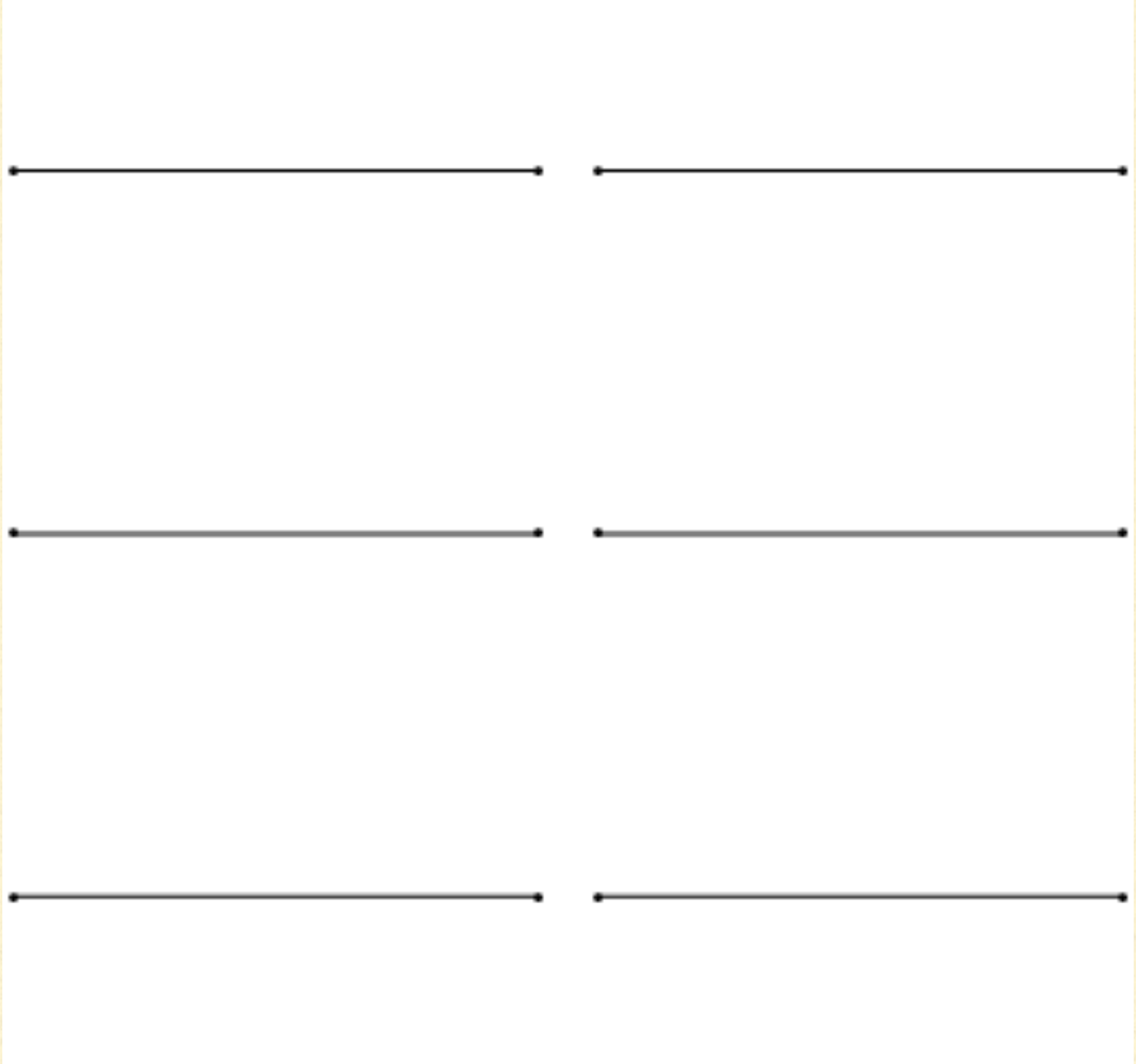
stojaté vlny na tyči resp. strune

- majú tvar kmitajúcich sínusoviek

- poznámka: stojatá vlna je každá funkcia typu $u(x,t) = X(x)\,T(t)$
  sínusovosť funkcií $X(x)$ je len špeciálna vlastnosť riešení pre tyč resp. strunu

- (uhlová) frekvencia kmitov ω_n je priamo úmerná prirodzenému číslu n





ako splnit' počiatočné podmienky

- zatiaľ sme našli riešenia typu $c \sin k_n x \, \sin \omega_n t + c' \sin k_n x \, \cos \omega_n t$
- tie spĺňajú špecifické počiatočné podmienky (ktoré získame dosadením $t = 0$)
- my však potrebujeme splniť všeobecné počiatočné podmienky dané funkciami $f(x)$ a $g(x)$ (t.j. všeobecnými počiatočnými hodnotami výchylky a rýchlosti)
- na to nami nájdené riešenia nepostačujú, ale postačujú na to superpozície takých riešení (ktoré sú podľa princípu superpozície tiež riešeniami vlnovej rovnice)

superpozícia riešení a poč. podmienky

- riešením vlnovej rovnice je okrem nájdených riešení typu $X(x)T(t)$ aj superpozícia

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin k_n x \sin \omega_n t + c'_n \sin k_n x \cos \omega_n t$$

- úloha: vypočítajte pre túto funkciu prvú parciálnu deriváciu podľa času
  (budeme ju potrebovať kvôli počiatočným podmienkam)

- poč. podm. $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c'_n \sin k_n x = f(x)$ $\quad \dot{u}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \omega_n \sin k_n x = g(x)$

veľké finále

- dajú sa koeficienty c_n a c_n' vybrať tak, aby boli splnené počiatočné podmienky?
- odpoveď: áno dajú, pretože nejde o nič iné ako o koeficienty Fourierových radov
- Fourierove rady:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n' \sin k_n x \qquad c_n' = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\, \sin k_n x \, dx$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \omega_n \sin k_n x \qquad c_n \omega_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\, \sin k_n x \, dx$$

Fourierove rady

- Fourierove rady sú popri Taylorových radoch ďalšie dôležité kladivo matematikovo
- akúsi základnú informáciu o Fourierových radoch sme už mali v prvom semestri (v rámci riešenia pohybovej rovnice LHO s všeobecnou vynucujúcou silou)
- v tejto chvíli už možno viete o Fourierových radoch viac z Matematických metód fyziky a celkom určite sa o nich dozviete ešte oveľa viac budúci rok na Matematike
- my si o nich tiež niečo povieme na budúcej prednáške, nepôjde nám však o všetky technické detaily, ale skôr o pochopenie "duše" týchto radov

ako kmitá gitarová struna?

- a teraz jedna jednoduchá otázka, ktorej cieľom je preveriť, či sme naozaj pochopili minulú a dnešnú prednášku (či sme pochopili dve metódy riešenia vlnovej rovnice)
- ak brnkneme na gitarovú strunu, aké vlny v nej vyvoláme, postupné alebo stojaté?
- častá a nesprávna odpoveď znie: stojaté
- správna odpoveď znie: čo je to za blbú otázku?
  samozrejme, že postupné aj stojaté – ak rovnicu riešime d'Alembertovou metódou, dostaneme riešenie v tvare superpozície postupných vĺn, ak ju riešime Fourierovou metódou, dostaneme riešenie v tvare superpozície stojatých vĺn

prekladový slovník postupné-stojaté

postupné vlny vyjadrené cez stojaté

- každú (slušnú) funkciu $f(\alpha)$ vieme rozložiť do sínusov a cosínusov násobkov toho α
- ak položíme $\alpha = x \pm v\,.\,t$ tak dostávame, že každá postupná vlna sa dá rozložiť do sínusových a cosínusových postupných vĺn
- teraz už ostáva len vyjadriť tie postupné sínusové a cosínusové vlny cez stojaté vlny

stojaté vlny vyjadrené cez postupné

- riešenie sme dostali v tvare superpozície stojatých sínusových a cosínusových vĺn
- takže už zostáva len vyjadriť tie stojaté sínusové a cosínusové vlny cez nejaké postupné vlny
- ak teda budeme mať slovník pre sínusové a cosínusové vlny, bude to vlasnte slovník pre všetky typy vĺn

slovník pre sínusové a cosínusové vlny

- zo súčtových vzorcov pre sínus a cosínus dostávame okamžite vyjadrenie postupných sínusových a cosínusových vĺn cez stojaté sínusové a cosínusové vlny

$$\sin k(x \pm vt) = \sin(kx \pm \omega t) = \sin(kx)\ \cos(\omega t)\ \pm\ \cos(kx)\ \sin(\omega t)$$

$$\cos k(x \pm vt) = \cos(kx \pm \omega t) = \cos(kx)\ \cos(\omega t)\ \mp\ \sin(kx)\ \sin(\omega t)$$

- a z týchto výrazov potom dostaneme rovnako rýchlo vyjadrenie stojatých sínusových a cosínusových vĺn cez postupné sínusové a cosínusové vlny

$$\sin(kx)\ \cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t)\right)$$

$$\cos(kx)\ \sin(\omega t) = \frac{1}{2}\left(\sin(kx + \omega t) - \sin(kx - \omega t)\right)$$

$$\sin(kx)\ \sin(\omega t) = \frac{1}{2}\left(\cos(kx - \omega t) - \cos(kx + \omega t)\right)$$

$$\cos(kx)\ \cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(\cos(kx + \omega t) + \cos(kx - \omega t)\right)$$

úloha: tyč (struna) s voľnými koncami

- toto je veľmi dôležitý príklad, na ktorom si možno okamžite precvičiť celú metódu
- okrajové podmienky na voľných koncoch sme odvodili na minulej prednáške
- rovnica: $v^2 u''(x,t) - \ddot{u}(x,t) = 0$

  počiatočné podmienky: $u(x,0) = f(x) \quad \dot{u}(x,0) = g(x)$

  okrajové podmienky: $u'(0,t) = 0 \qquad u'(L,t) = 0$
- riešenie: to isté, ako pre upevnené konce, akurát s cosínusmi namiesto sínusov

upútavka na záver

- pri Taylorovom rade sme sa v minulom semestri pokúšali nielen naučiť, ako vyzerá a ako sa používa, ale aj pochopiť jeho “ducha” (ktorým bolo približné vyjadrenie ľubovoľného pohybu najprv ak rovnomerného pohybu, potom ako rovnomerne zrýchleného pohybu, potom ako zrýchleného pohybu s rovnomerne s meniacim zrýchlením, a tak ďalej až donekonečna)
- bolo by fajn pokúsiť sa pochopiť podobným spôsobom aj “ducha” Fourierovho radu, aby sme vedeli nielen ako tento rad vyzerá a ako sa používa (prípadne ako sa dokazuje), ale aj to, prečo vlastne funguje a čo tvorí je “ducha”
- a práve to by malo byť obsahom budúcej prednášky