RIEŠENIE VLNOVEJ ROVNICE I

d'Alembertova metóda postupných vĺn

mechanika 38

programové vyhlásenie

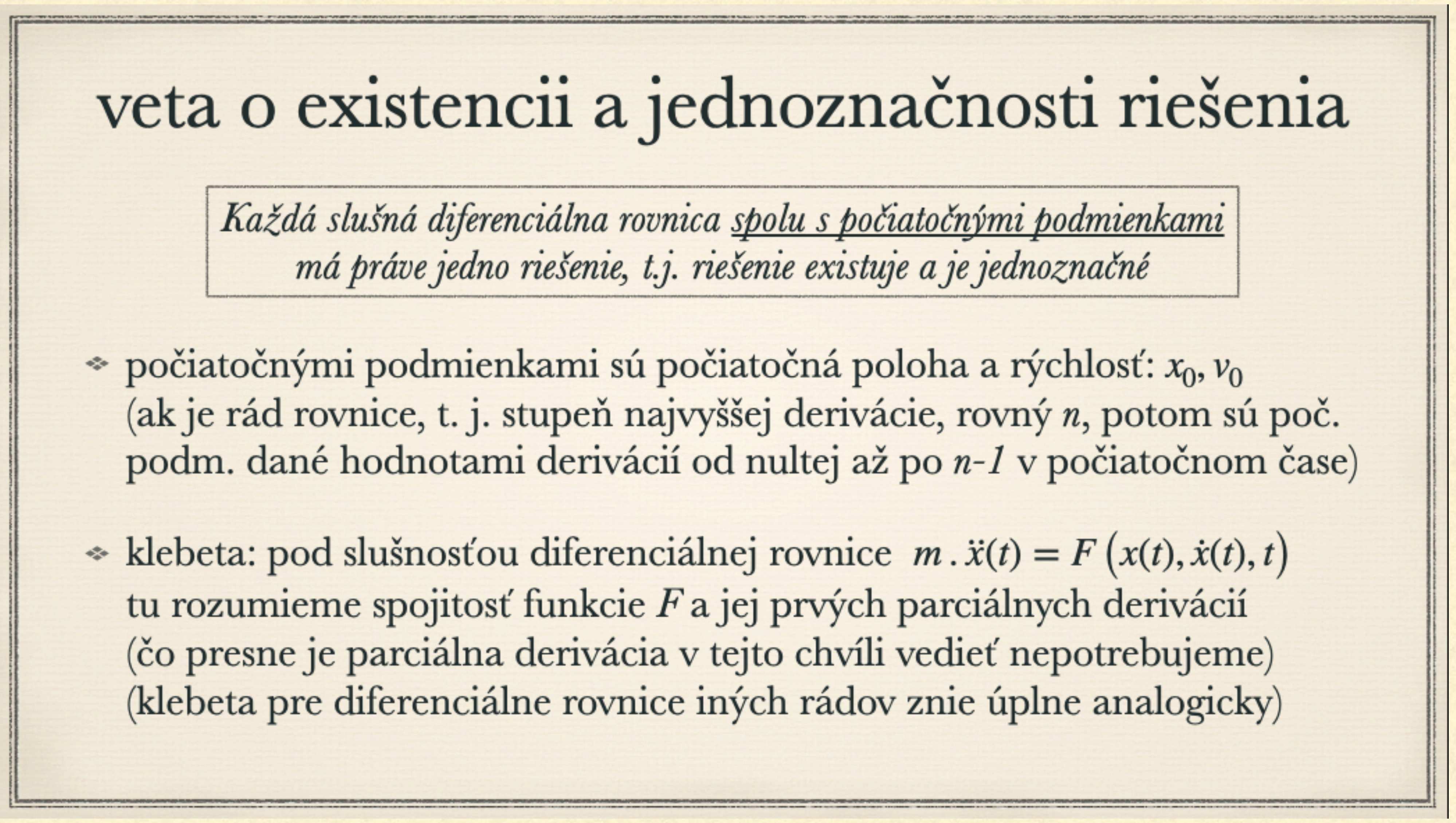
- na minulej prednáške sme pre pohyb pružného telesa v 1D dostali vlnovú rovnicu, ktorá sa vyskytuje v mnohých oblastiach fyziky, a preto je užitočné naučiť sa ju riešiť
- pod riešením vlnovej rovnice rozumieme nájdenie takej funkcie, ktorá spĺňa
  a) vlnovú rovnicu
  b) počiatočné podmienky $u(x,0) = f(x)$ a $\dot{u}(x,0) = g(x)$
  c) tzv. okrajové podmienky (ak hľadáme riešenie len na ohraničenej oblasti)
- teraz sa naučíme jednu metódu riešenia tejto rovnice, ktorá skvelo funguje v 1D nabudúce sa naučíme inú metódu, ktorá funguje aj vo viacerých rozmeroch

jednoznačnosť riešenia vlnovej rovnice

- pre parciálnu diferenciálnu vlnovú rovnicu platí podobná veta o jednoznačnosti riešenia, aká platila pre obyčajné diferenciálne rovnice (len treba k počiatočným podmienkam pridať aj tzv. okrajové podmienky – ešte o nich bude reč)

- vetu tu nebudeme dokazovať, dôkaz sa ale robí na prednáške z Teórie elektromagnetického poľa v druhom ročníku

- princíp superpozície a veta o jednoznačnosti umožňujú veľmi ľahko riešiť vlnovú rovnicu v 1D


veta o existencii a jednoznačnosti riešenia

Každá slušná diferenciálna rovnica spolu s počiatočnými podmienkami má práve jedno riešenie, t.j. riešenie existuje a je jednoznačné

- počiatočnými podmienkami sú počiatočná poloha a rýchlosť: x_0, v_0 (ak je rád rovnice, t. j. stupeň najvyššej derivácie, rovný n, potom sú poč. podm. dané hodnotami derivácií od nultej až po n-1 v počiatočnom čase)
- klebeta: pod slušnosťou diferenciálnej rovnice $m\,.\,\ddot{x}(t) = F\left(x(t), \dot{x}(t), t\right)$ tu rozumieme spojitosť funkcie F a jej prvých parciálnych derivácií (čo presne je parciálna derivácia v tejto chvíli vedieť nepotrebujeme) (klebeta pre diferenciálne rovnice iných rádov znie úplne analogicky)

veta o jednoznačnosti nám umožňuje používať hádanie ako exaktnú metódu riešenia rovníc – ak uhádneme jedno riešenie, tak viac ich už neexistuje

superpozície postupných vĺn

- vlnová rovnica je lineárna parciálna diferenciálna rovnica (obsahuje dve druhé derivácie a každú z nich v prvej mocnine)

- pre lineárne diferenciálne rovnice (či už obyčajné alebo parciálne) platí princíp superpozície, ktorý pre vlnovú rovnicu hovorí toto: ak sú $u_1(x,t)$ a $u_2(x,t)$ riešeniami vlnovej rovnice, potom je aj ich superpozícia $c_1\,u_1(x,t)\;+\;c_2\,u_2(x,t)$ s ľubovoľnými konštantmi $c_1,\ c_2$ riešením tejto rovnice

- dôkaz: pozriem – vidím (úloha: naozaj pozrite)

princíp superpozície pre lineárne dif. rovnice

Toto je to kúzlo, ktoré robí z lineárnych diferenciálnych rovníc relatívne zvládnuteľnú vec.

- superpozíciou (alebo tiež lineárnou kombináciou) funkcií $x_1(t)$ a $x_2(t)$ nazývame funkciu $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$ kde c_1 a c_2 sú ľubovoľné konštanty
- princíp superpozície: ak sú dve funkcie $x_1(t)$ a $x_2(t)$ riešeniami lineárnej diferenciálnej rovnice $a_0(t)x(t)+a_1(t)\dot{x}(t)+a_2(t)\ddot{x}(t)=b(t)$ s dvomi pravými stranami $b_1(t)$ a $b_2(t)$, potom ich superpozícia $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$ je riešením tejto rovnice s pravou stranou $c_1b_1(t)+c_2b_2(t)$
- dôkaz: pozriem, vidím (derivácia superpozície je superpozícia derivácií) úloha: napriek triviálnosti si ten dôkaz samostatne poriadne urobte

nielen postupné vlny, ale aj ich ľubovoľné superpozície sú riešeniami vlnovej rovnice

d'Alembertova metóda

- v jednorozmernom svete sa riešenie vlnovej rovnice uhádne šokujúco ľahko
- začnime riešením rovnice na priamke (aby sme nemali okrajové podmienky) počiatočná výchylka nech je $u(x,0) = f(x)$ a počiatočná rýchlosť nech je nulová
- riešenie sa dá uhádnuť z fleku (prvý ho uhádol práve Jean d'Alembert v 18. stor.)

$$u(x,t) = \frac{1}{2} f(x - v\,.\,t) \; + \; \frac{1}{2} f(x + v\,.\,t)$$

- ako superpozícia postupných vĺn to spĺňa rovnicu a zjavne to spĺňa aj poč. podm. (vypočítajte deriváciu podľa času v čase $t = 0$ a ukážte, že je naozaj rovná nule)

slovný opis d’Alembertovho riešenia

- počiatočnú podmienku rozdelíme na dve rovnaké polovice a každú z nich pošleme svojím smerom (jednu doprava a jednu doľava)
- keď sa to povie takto, hneď začíname tušiť, prečo d’Alembertova metóda nebude dobre fungovať vo viacerých rozmeroch
- vo viacerých rozmeroch je nekonečne veľa smerov a ak by sme chceli postupovať analogicky, potrebovali by sme rozdeliť počiatočnú podmienku na nekonečne veľa rovnakých častí – lenže to by bola každá z nich nulová
- skvelá d’Alembertova metóda je preto skvelá len v jednom rozmere (bohužiaľ)

nenulová počiatočná rýchlosť

- skúste uhádnuť riešenie vlnovej rovnice na priamke pre nulovú počiatočnú výchylku $u(x,0) = 0$ a nenulovú počiatočnú rýchlosť $\dot{u}(x,0) = g(x)$
- možno nebude zlý nápad využiť funkciu $G(x) = \dfrac{1}{v} \displaystyle\int g(x)\, dx$
- ukážte, že funkcia $u(x,t) = \frac{1}{2}\big(G(x + v\,t) - G(x - v\,t)\big)$ spĺňa počiatočné podmienky
- premyslite si, že superpozícia tohto riešenia s riešením z predchádzajúceho slidu predstavuje úplne všeobecné riešenie vlnovej rovnice na priamke
(a všimnite si, že nám na toto riešenie stačili štyri postupné vlny)

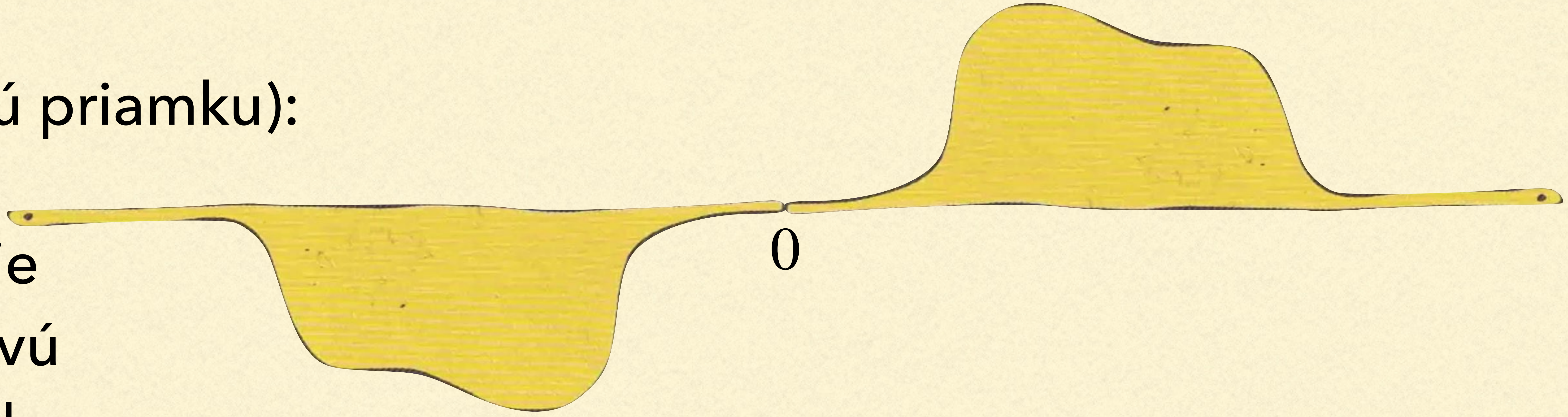
vlna na polpriamke (pevný koniec)

- ako príklad okrajových podmienok si predstavme vlnu na polpriamke s pevným (nevychýleným) koncom – ak má tento bod súradnicu 0, tak okrajová podmienka znie: $u(0,t) = 0$

- ako dosiahnuť pri počiatočnej podmienke "slon" splnenie okrajovej podmienky?

- takto (doplnením na celú priamku):

- presvedčte sa, že riešenie na priamke spĺňa okrajovú podmienku na polpriamke

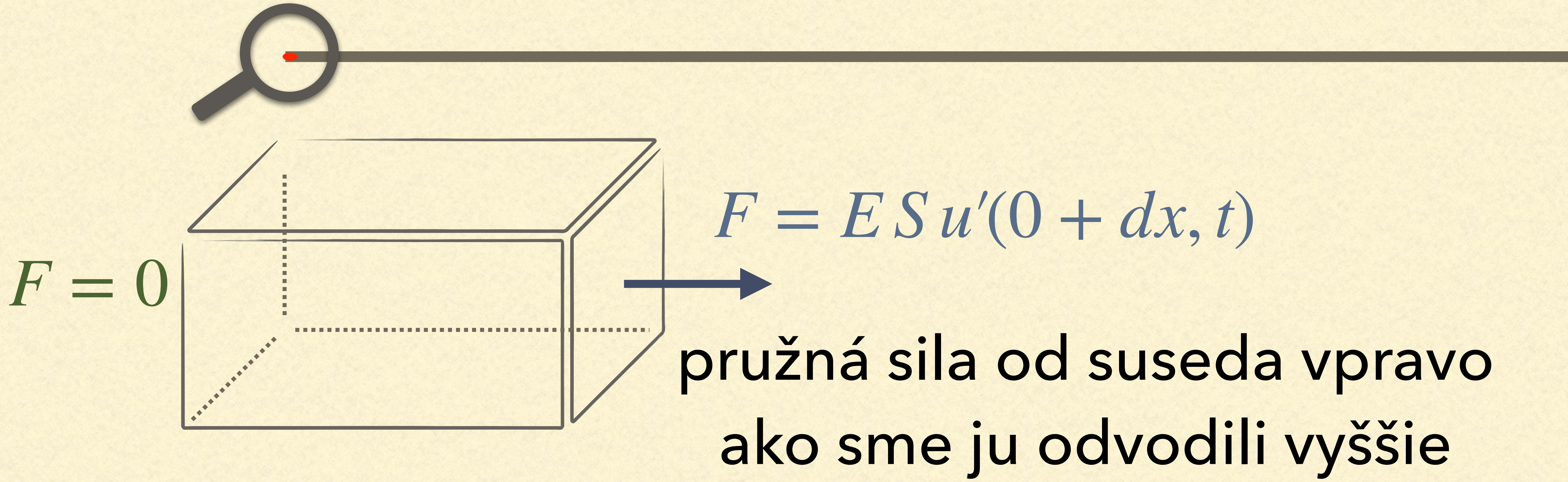


okrajová podmienka pre voľný koniec

- ako ďalší príklad okrajových podmienok budeme uvažovať vlnu na polpriamke s voľným koncom (voľný znamená, že naňho nepôsobí nijaká vonkajšia sila)

- ako vyzerá okrajová podmienka v takomto prípade?

- aby sa infinitezimálne malý a ľahký kúsok nepohyboval s nekonečným zrýchlením, potrebujeme nulovú silu



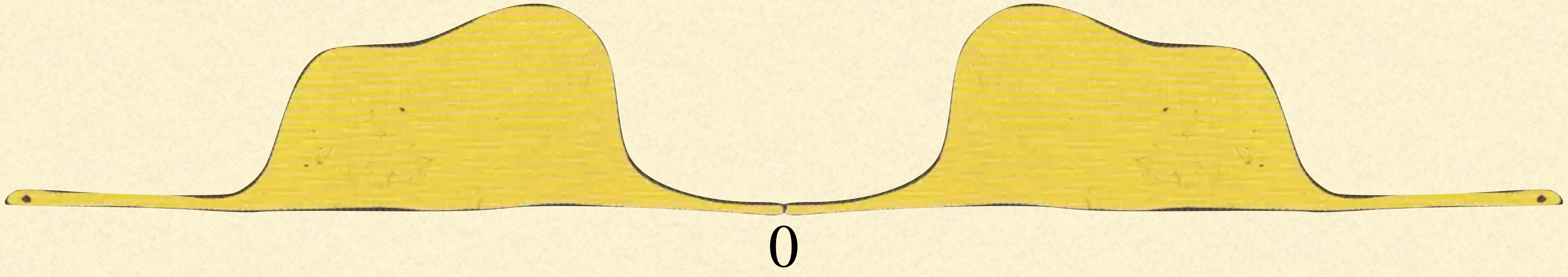
- v limite $dx \to 0$ dostávame podmienku: $\boxed{u'(0,t) = 0}$

vlna na polpriamke (voľný koniec)

- skúsme teraz nájsť riešenie vlnovej rovnice na polpriamke s voľným koncom (t.j. s koncom, na ktorý nepôsobí nijaká sila)
- na minulom slide sme ukázali, že na voľnom konci platí okrajová podmienka

$$u'(0,t) = 0$$

- ako to dosiahnuť?
- takto:
(presvedčte sa o tom)



odraz vlny na konci polpriamky

- riešenie na polpriamke sme dostali tak, že sme našli riešenie na priamke (ktoré uhádol už d'Alembert) s počiatočnými podmienkami na doplnenej polpriamke zvolenými tak vhodne, aby riešenie na priamke zabezpečilo splnenie okrajovej podmienky pre polpriamku

- ak sa teraz pozeráme len na pôvodnú polpriamku, vidíme polovicu "slona" odchádzať z polpriamky a zároveň sa z druhej strany vracať, čo vyzerá ako odraz

- v prípade pevného konca sa "slon" odráža tak, že prichádza zospodu (prevrátil sa) v prípade voľného konca sa odráža tak, že prichádza zvrchu (neprevrátil sa)

pohybujúci sa koniec polpriamky

- ako by sme riešili vlnovú rovnicu na polpriamke s predpísaným pohybom konca?
- uvažujme polpriamku $x \geq 0$ s okrajovou podmienkou $u(0,t) = \varphi(t)$ a nulové poč. podmienky (riešenie pre nenulové poč. podmienky nám dá princíp superpozície)
- rozšírme úlohu na priamku a skúsme vymyslieť počiatočnú podmienku pre $x < 0$ tak, aby doprava idúca postupná vlna vytvorila v bode $x = 0$ vždy výchylku $\varphi(t)$
- takou počiatočnou podmienkou pre $x < 0$ je (premyslite si to) $u(x,0) = 2\,\varphi(x/v)$

premenlivá sila na konci polpriamky

- ako by sme riešili vlnovú rovnicu na polpriamke s predpísanou silou na jej konci?
- uvažujme polpriamku $x \geq 0$ na ktorej konci pôsobí sila $F(0, t) = \Phi(t)$ a nulové poč. podmienky (riešenie pre nenulové poč. podmienky nám dá princíp superpozície)
- okrajová podmienka sa odvodí tak, ako v prípade voľných koncov: $F = E\,S\,u'(0, t)$
- rozšírme úlohu na priamku a skúsme vymyslieť počiatočnú podmienku pre $x < 0$ tak, aby doprava idúca postupná vlna spĺňala v bode $x = 0$ v každom čase zadanú okrajovú podmienku (zrejme pôjde o nejaký integrál z $\Phi(t)$ – aký a prečo?)

užitočná úloha na záver

- premyslite si, ako by sa šírila vlna s počiatočnou podmienkou “slon” na úsečke
  a) s obidvomi koncami pevnými (nehybnými)
  b) s obidvomi koncami voľnými
  c) s jedným koncom pevným a jedným voľným

- návod (ak potrebujete): doplňte vhodné počiatočné podmienky na celú priamku

- ťažšia (úplne nepovinná) úloha: ako sa zmenia riešenia predchádzajúcej úlohy, ak koncové body nie sú upevnené, ale je predpísaný ich pohyb, respektíve ak nie sú voľné, ale je predpísaná sila na ne pôsobiaca? (t.j. nájdite riešenia vlnovej rovnice na úsečke nie s nulovými, ale so všeobecnými okrajovými podmienkami)