FOURIEROV RAD

ďalšie kladivo matematikovo

mechanika 39

čo zatiaľ vieme o Fourierových radoch

ako vyzerá Fourierov rad

- nech $f(t)$ je slušná (napr. spojitá) funkcia definovaná na intervale $(0,T)$ každá takáto funkcia sa dá napísať v tvare nekonečného radu

$$f(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

kde

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\,dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\,dt$$

- na prvý pohľad to vyzerá hrôzostrašne, ale pre nás je v tejto chvíli dôležité len to, že prakticky "všetko" sa dá poskladať zo sínusov a cosínusov

nakoľko prirodzený je Fourierov rad?

- na prvý pohľad vyzerá Fourierov rad ako nejaký kúzelnícky trik
- podobne na nás mohol pôsobiť aj Taylorov rad, ale tam sa nám podarilo vysvetliť si, že ide vlastne o celkom prirodzenú vec
- existuje nejaké podobné vysvetlenie kúzla aj pre Fourierov rad?
- áno existuje, ale odložíme si ho až na budúci semester (vtedy to bude zrozumiteľnejšie, aj keď zvládli by sme to aj teraz)
- presnú formuláciu a dôkazy necháme na prednášky z matematiky

- to sme si povedali v prvom semestri pri skúmaní pohybu LHO s vynucujúcou silou
- teraz prišiel ten čas, kedy sa pokúsime pochopiť, v čom tkvie podstata tohto kúzla

rôzne formy Fourierových radov

- keď sme sa prvý raz stretli s Fourierovými radmi, premennou bol čas $t \in \langle 0, T \rangle$ a rad obsahoval sínusy aj cosínusy $\sin \omega_n t$ a $\cos \omega_n t$ kde $\omega_n = n\,2\pi/T$
- keď sme sa s nimi stretli druhý raz (teraz), premennou bola poloha $x \in \langle 0, L \rangle$ a rady obsahovali len sínusy (pevné konce) alebo len cosínusy (voľné konce) $\sin k_n x$ alebo $\cos k_n x$ kde $k_n = n\pi/L$ (chýba 2 v porovnaní s prvým stretnutím)
- ktorý zápis Fourierových radov je správny?
- obidva a ešte mnoho ďalších (my tu budeme používať ten z prvého stretnutia)

pomerne prekvapujúci začiatok

- začneme z úplne elementárnej (lineárnej) algebry, konkrétne z rozvoja ľubovoľného vektora do ortonormálnej bázy

$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3$$

- koeficienty tohto rozvoja sa nájdu pomocou skalárneho súčinu: $v_i = \vec{v} \cdot \vec{e}_i$ (vyplýva to z ortonormálnosti bázy – dokážte hneď teraz, že je to naozaj tak)

- napísali sme to pre trojrozmerný lineárny respektíve vektorový priestor, ale vieme to veľmi prirodzene rozšíriť na ľubovoľný (konečný) počet rozmerov

- Fourierov rad je práve toto, akurát že v nekonečnerozmernom lineárnom priestore

čo je ∞-rozmerný lineárny priestor?

- predstavme si, že máme navzájom kolmé jednotkové vektory $\vec{e}_i$, ktorých nie je N, ale nekonečne veľa (t.j. predstavme si, že index i prebieha všetky prirodzené čísla)
- rozvoj do ortonormálnej bázy má tvar nekonečného radu

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{\infty} v_i \vec{e}_i \quad \text{kde} \quad v_i = \vec{v} \cdot \vec{e}_i$$

- a hoci to tak na prvý pohľad nevyzerá, toto už takmer je Fourierov rad
- treba si len vyjasniť v akom zmysle sú funkcie vektory, ako je definovaný skalárny súčin takýchto vektorov a prečo sú sínusy a cosínusy vektory ortonormálnej bázy

funkcia ako vektor so spojitým indexom

- zatiaľ sme uvažovali ∞-rozmerný vektor $\overrightarrow{v}$, ktorého koeficienty v báze $\overrightarrow{e}_i$ tvoria postupnosť $v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots$ (t.j. koeficienty sú číslované diskrétnym indexom $i \in N$)

- existujú aj vektory, ktorých koeficienty by boli číslované spojitým indexom?

- ak označíme takýto vektor symbolom f a jeho spojitý spojitý index symbolom t potom koeficienty by mali vyzerať ako f_t , čo obyčajne píšeme skôr ako $f(t)$

- zdá sa, že funkcie môžeme chápať ako vektory so spojitým indexom (presnejšie povedané, ako koeficienty vektora so spojitým indexom)

poznámka: vektory, zložky, súradnice

- vektor $\vec{v}$ je jednoznačne daný svojimi zložkami v_i v nejakej konkrétnej báze $\vec{e}_i$
- to znamená, že vektor $\vec{v}$ je v podstate ekvivalentný N-tici koeficientov $(v_1, v_2, \ldots, v_N)$
- ak ide o ortonormálnu bázu, zložkám vektora často hovoríme kartézske súradnice
- niekedy je užitočné rozlišovať medzi vektormi a ich zložkami resp. súradnicami, inokedy je to vcelku zbytočné puntičkárstvo
- v prípade spojitého indexu budeme považovať vektor a jeho "kartézske súradnice" $f(t)$ za jedno a to isté

tvoria funkcie vektorový priestor?

- sčítavanie funkcií a ich násobenie číslom (reálnym, čiže skalárnym) spĺňa axiómy lineárneho priestoru, takže ich zrejme môžeme vcelku smelo považovať za vektory
- má to však svoje ale: akonáhle vstupujú do hry nekonečné rady, spolu s nimi prichádzajú aj otázky konvergencie a rôzne s tým súvisiace matematické jemnosti
- my sa tu týmito otázkami zaoberať nebudeme, to necháme na matematikov (z hľadiska skutočnej matematiky možno považovať všetko, čo tu povieme, za akúsi inšpiráciu pre hlbšie preskúmanie – tá inšpirácia však nie je matematicky bezcenná, práve ona v sebe skrýva to, čo môžeme nazvať "duchom" Fourierových radov)

skalárny súčin funkcií

- skúsme teraz prísť na to, ako by mohol vyzerať skalárny súčin v takomto priestore
- keďže funkcie zodpovedajú koeficientom rozvoja do ortonormálnej bázy, spomeňme si na vyjadrenie skalárneho súčinu v *N*-rozmernom priestore cez takéto koeficienty

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum u_i v_i$$

- štandardný prechod z diskrétneho prípadu na spojitý: suma prejde na určitý integrál cez celú oblasť, na ktorej sú funkcie definované – napríklad cez interval $\langle a, b \rangle$

$$f \cdot g = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$$

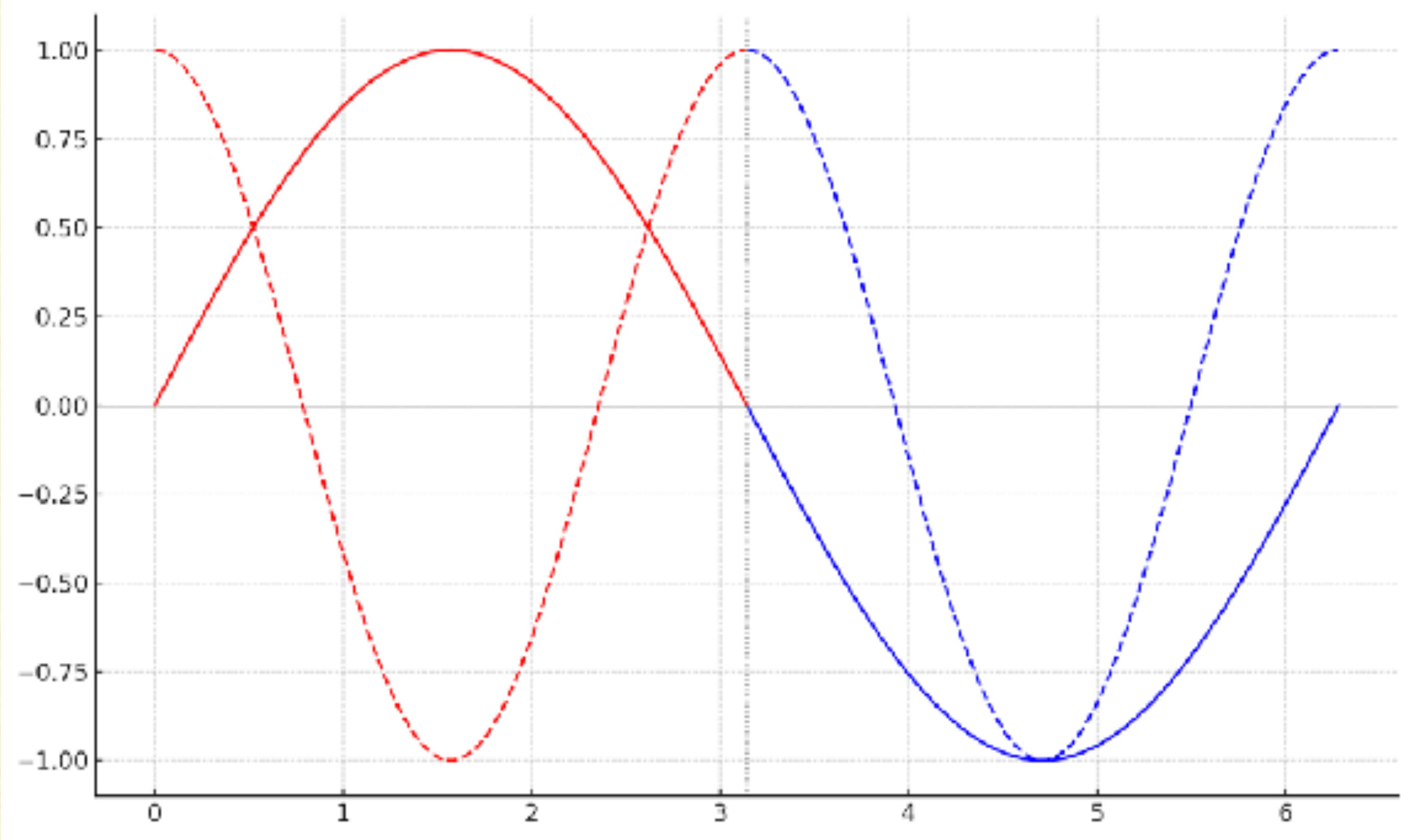
ortogonálnosť sínusov a cosínusov

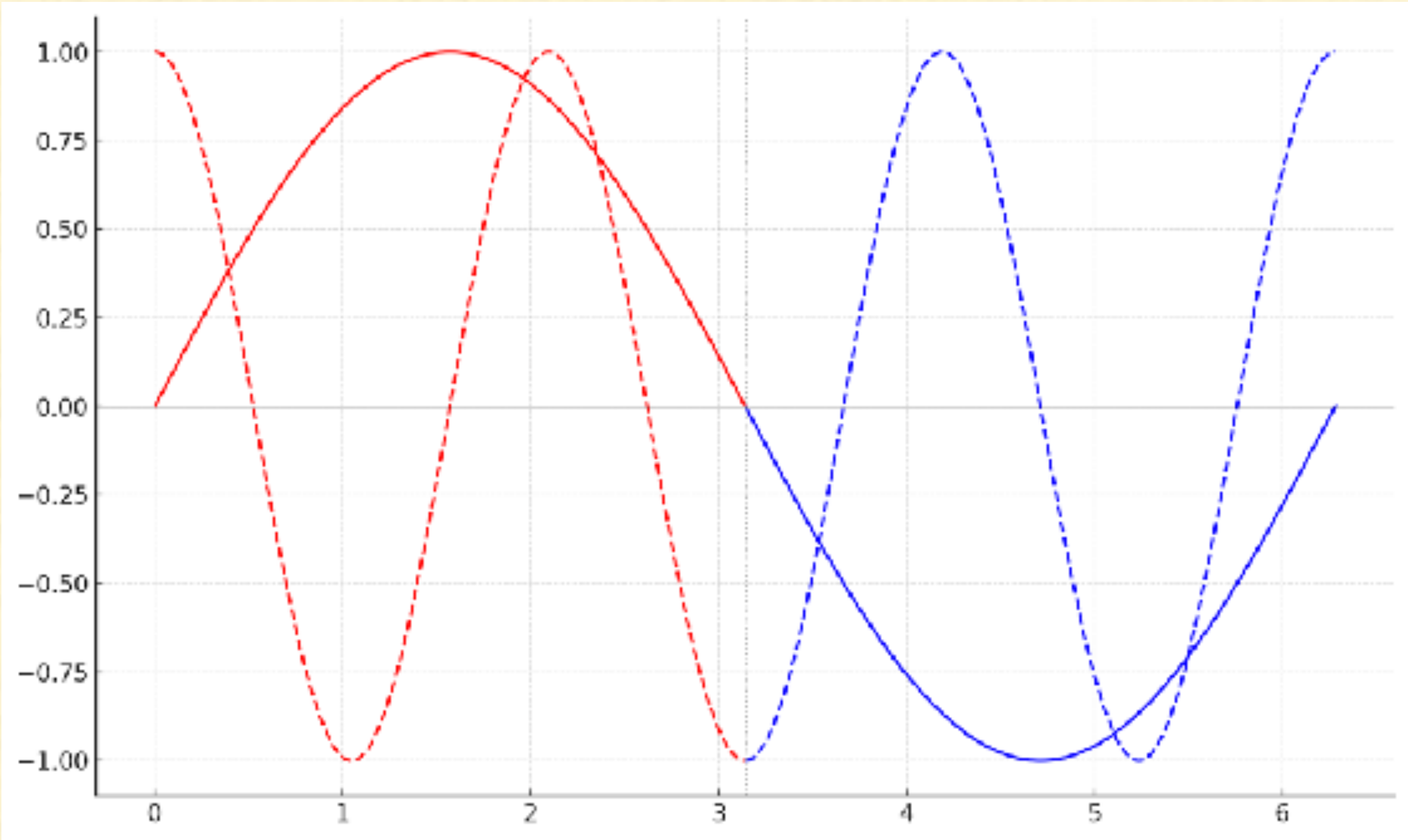
- ak má byť Fourierov rozvoj do sínusov a cosínusov rozložením vektora (funkcie) do ortonormálnych bázových vektorov (funkcií), sínusy a cosínusy musia byť ortogonálne
- konkrétne máme na mysli funkcie $\sin \omega_n t$ a $\cos \omega_n t$ pre $t \in \langle 0, T \rangle$ pričom $\omega_n = \frac{2\pi}{T} n$
- skalárny súčin: $$\int_0^T \sin \omega_m t \, \cos \omega_n t \; dt = \int_{-T/2}^{T/2} \sin \omega_m t \, \cos \omega_n t \; dt = 0$$

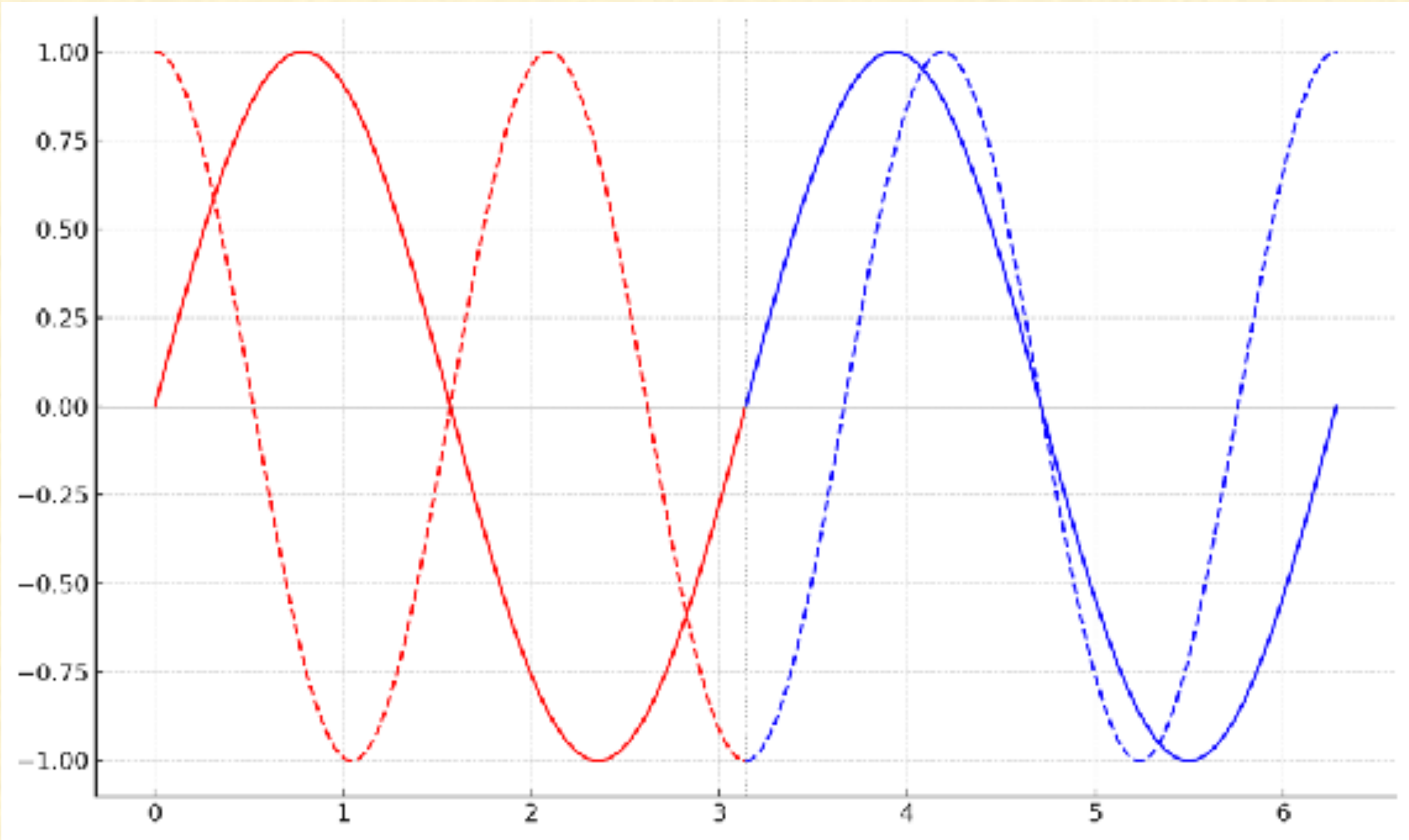
prvá rovnosť: posunutie súčinu periodických funkcií o pol periódy doľava
druhá: integrál nepárnej funkcie (súčinu párnej a nepárnej) v symetrických hraniciach

výpočet integrálov kreslením obrázkov

$\sin x \, \cos 2x$ $\sin x \, \cos 3x$ $\sin 2x \, \cos 3x$







súčin je v každej červenej časti opačný ako v nasledujúcej modrej

celková plocha pod krivkou je teda v každej červenej časti opačná ako v nasledujúcej modrej

celkový integrál je teda nulový (príspevky červených a modrých častí sa navzájom vyrušia)

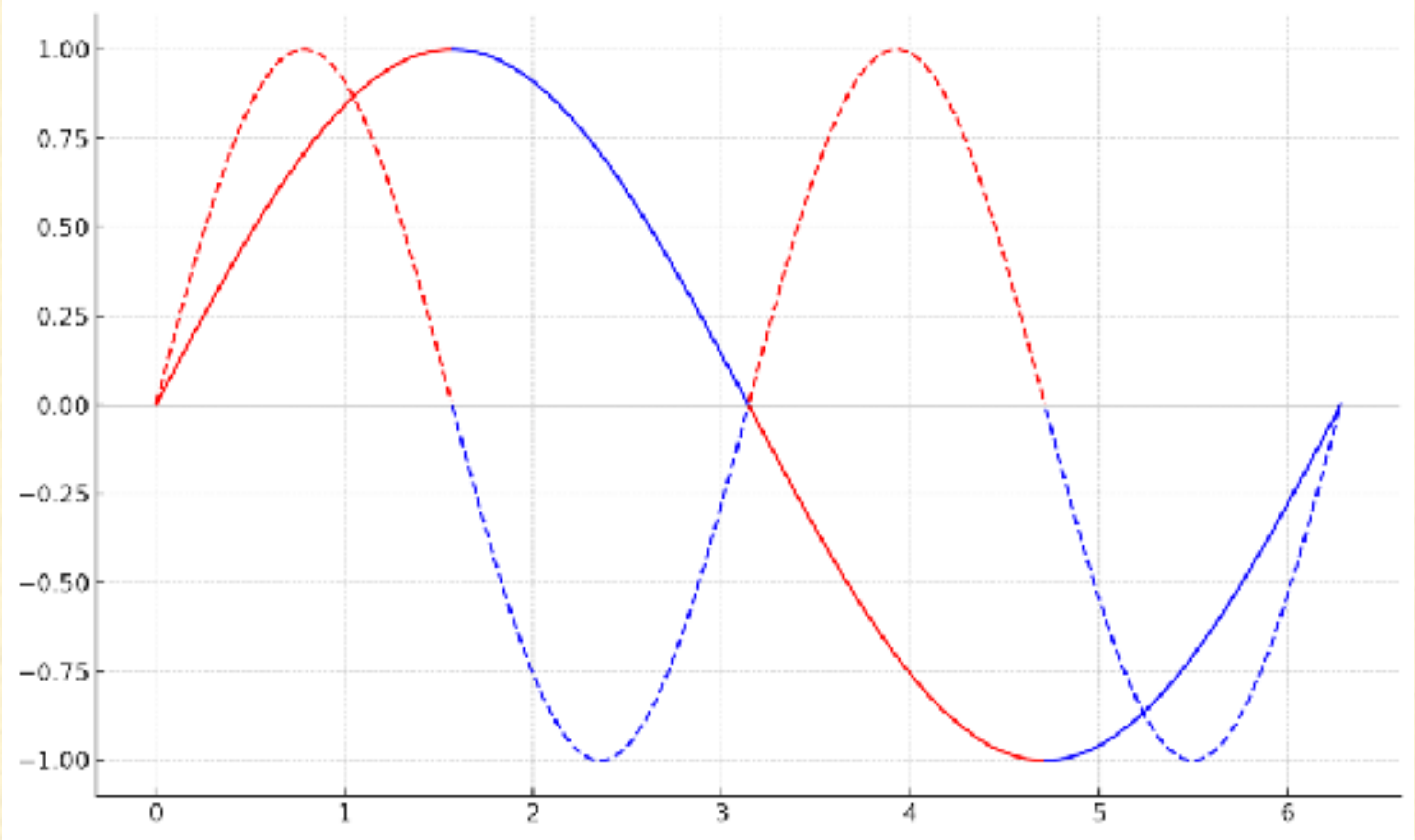
ortogonálnosť sínusov a sínusov

- a teraz ortogonálnosť dvoch sínusov s rôznymi frekvenciami $\int_0^T \sin\omega_m t \, \sin\omega_n t \; dt = ?$
- trik: $\sin(\omega_m t)\,\sin(\omega_n t) = \frac{1}{2}\left(\cos(\omega_m t - \omega_n t) - \cos(\omega_m t + \omega_n t)\right)$
- $\int_0^T \sin\omega_m t \, \sin\omega_n t \; dt = \frac{1}{2}\int_0^T \cos\left((\omega_m - \omega_n)\,t\right)\; dt - \frac{1}{2}\int_0^T \cos\left((\omega_m + \omega_n)\,t\right)\; dt = 0$

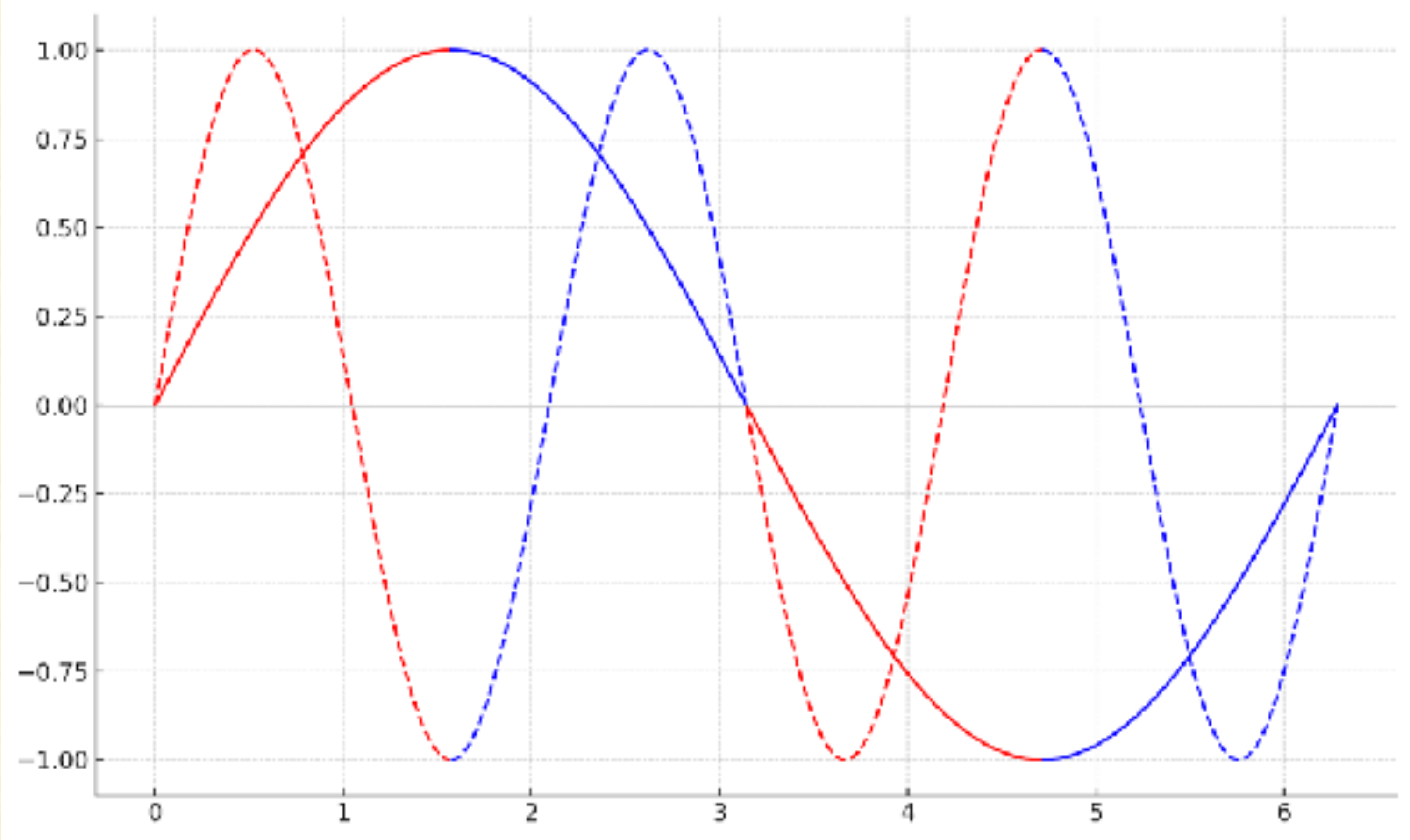
druhá rovnosť: platí pre $m \neq n$ pretože ide o integrály z funkcií $\cos(m \pm n)\,2\pi\,t/T$
a integrál z cosínusu cez celočíselný násobok periódy je vždy nulový

výpočet inegrálov kreslením obrázkov

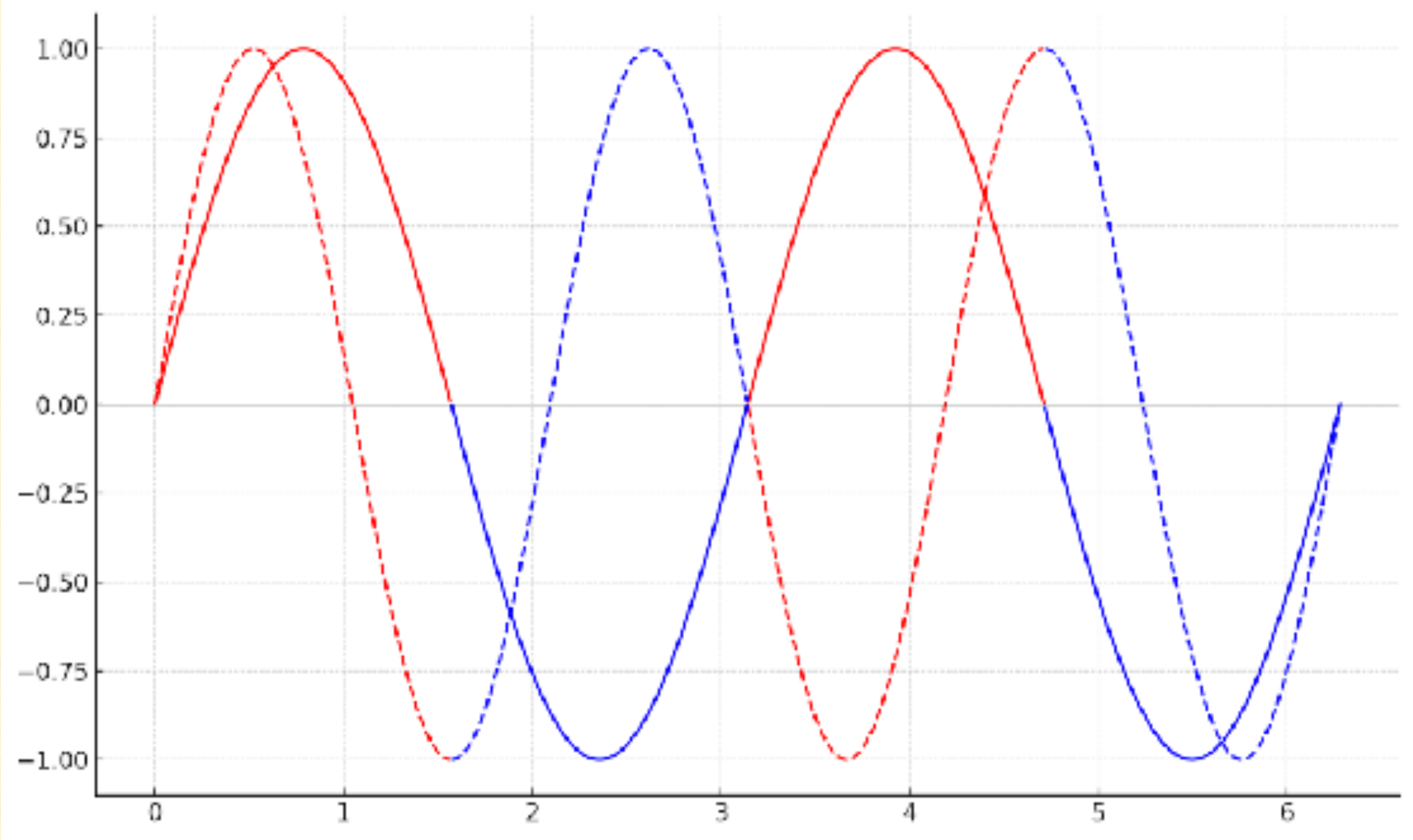
$\sin x \; \sin 2x$



$\sin x \; \sin 3x$



$\sin 2x \; \sin 3x$



súčin je v každej červenej časti opačný ako v nasledujúcej modrej

celková plocha pod krivkou je teda v každej červenej časti opačná ako v nasledujúcej modrej

celkový integrál je teda nulový (príspevky červených a modrých častí sa navzájom vyrušia)

skalárny súčin sínusu so sebou samým

- a ako vyzerá skalárny súčin dvoch sínusov s rovnakými frekvenciami?

- rovnakým trikom ako minule dostaneme

$$\int_0^T \sin \omega_n t \, \sin \omega_n t \; dt = \frac{1}{2}\int_0^T \cos\left((\omega_n - \omega_n)\, t)\right) \, dt \; - \; \frac{1}{2}\int_0^T \cos\left((\omega_n + \omega_n)\, t)\right) \, dt$$

- druhý integrál je nulový (rovnaký argument ako minule), prvý je $\frac{1}{2}\int_0^T 1 \; dt = \frac{T}{2}$

- výsledok: $$\int_0^T \sin \omega_n t \, \sin \omega_n t \; dt = \frac{T}{2}$$

a teraz cosínusy

- ortogonálnosť dvoch cosínusov s rôznymi frekvenciami sa dokáže rovnako
  skalárny súčin dvoch cosínusov s rovnakými frekvenciami sa tiež vypočíta rovnako
- výsledok pre $n \neq 0$: $$\int_0^T \cos \omega_n t \, \cos \omega_n t \; dt = \frac{T}{2}$$
- výsledok pre $n = 0$: $$\int_0^T \cos \omega_0 t \, \cos \omega_0 t \; dt = T$$
- funkcie $\sin \omega_n t$ a $\cos \omega_n t$ tvoria na intervale $\langle 0, T \rangle$ ortogonálny systém funkcií,
  funkcie $\sqrt{2/T} \sin \omega_n t$ a $\sqrt{2/T} \cos \omega_n t$ tvoria ortonormálny systém $(\omega_n = \frac{2\pi}{T} n)$

ak by sínusy a cosínusy tvorili bázu

- ak by bol tento systém úplný (t.j. ak by tieto funkcie tvorili ortonormálnu bázu) potom by sme každú funkciu na tomto intervale vedeli napísať ako

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \; c_n \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \omega_n t \; + \; c'_n \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_n t \; + \; c'_0 \sqrt{\frac{1}{T}}$$

  pričom koeficienty c_n, c'_n by sa počítali skalárnymi súčinmi funkcie $f(t)$ s funkciami ortonormálnej bázy $\sqrt{2/T} \sin \omega_n t$, $\sqrt{2/T} \cos \omega_n t$ a $\sqrt{1/T}$

$$c_n = \int_0^T f(t) \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \omega_n t \, dt \qquad c'_n = \int_0^T f(t) \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_n t \, dt \qquad c'_0 = \int_0^T f(t) \sqrt{\frac{1}{T}} \, dt$$

- a to už by po malom preznačení bol ten Fourierov rad, ktorý sme mali na začiatku

a môžu netvoriť bázu?

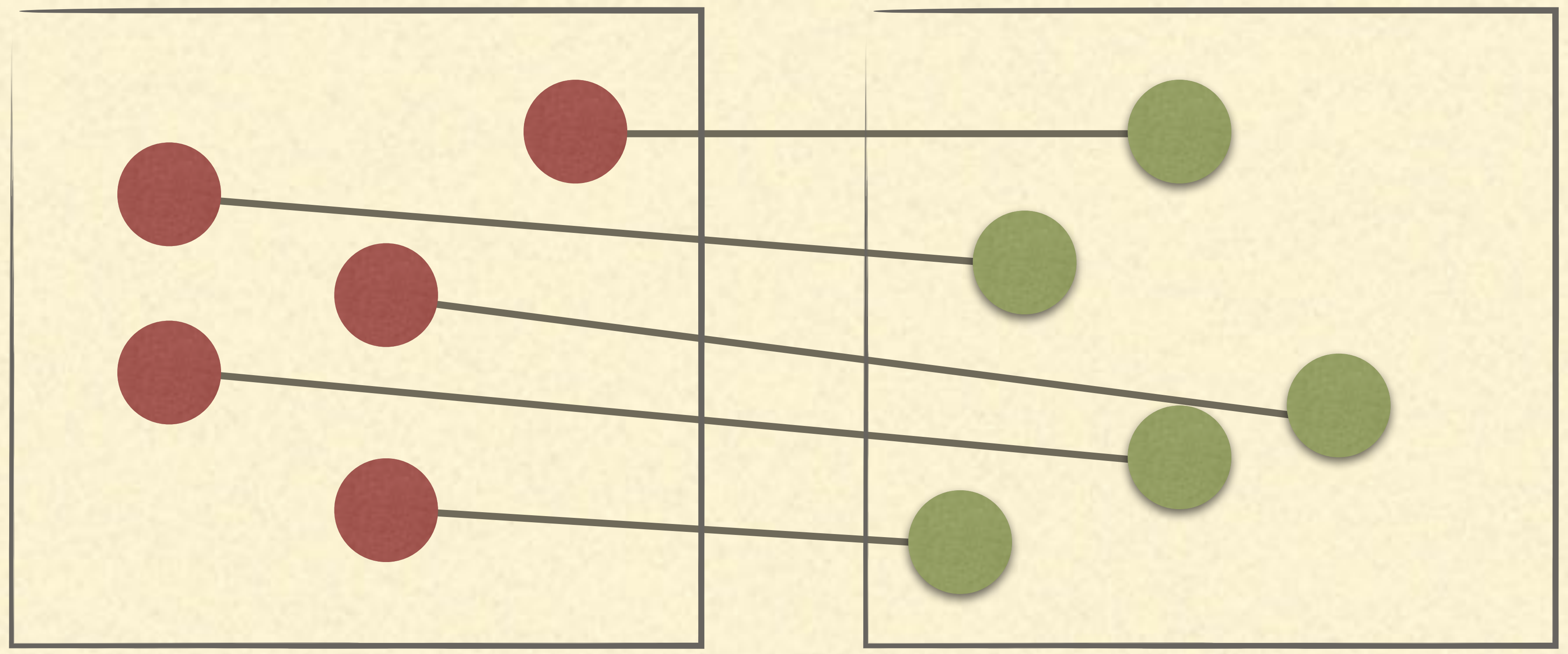
- na vyjadrenie ľubovoľného vektora ako superpozície ortogonálnych vektorov nám v *N*-rozmernom priestore stačí *N* ortogonálnych vektorov
- ak je tých ortogonálnych vektorov nekonečne veľa (tak ako je sínusov a cosínusov) tak by sa pomocou nich malo dať vyjadriť nekonečne veľa funkcií
- to by znamenalo, že sínusy a cosínusy automaticky tvoria bázu v priestore funkcií
- to je však prirýchly záver
(dôvod je vskutku pozoruhodný: nekonečne veľa funkcií nemusí byť rovnako veľa ako nekonečne veľa sínusov a cosínusov)

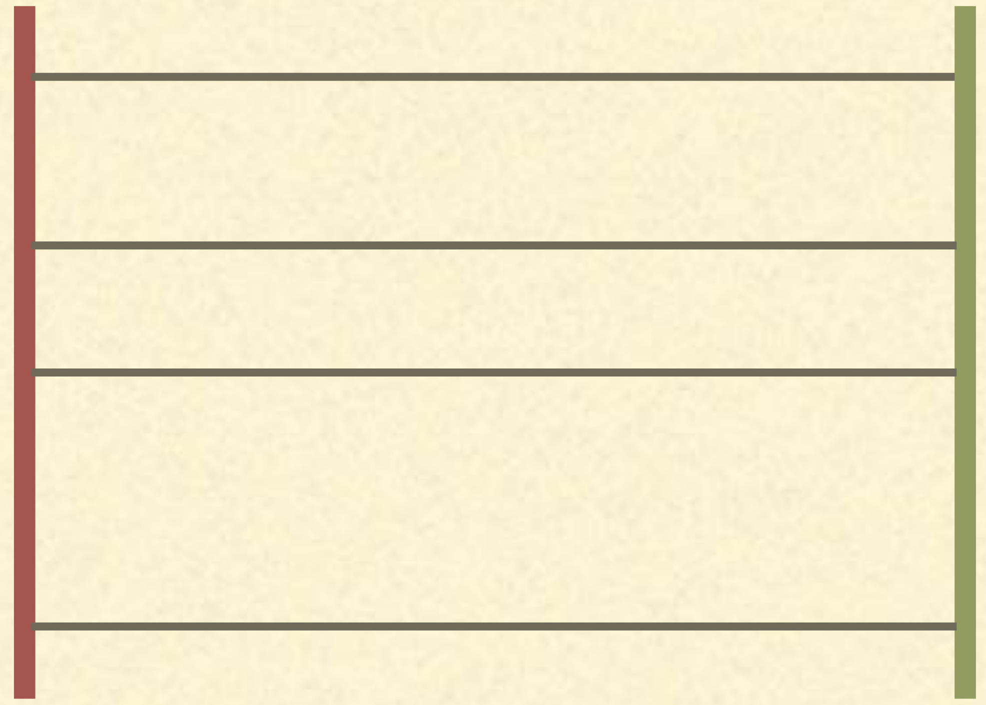
nepovinné

ako porovnávať nekonečná

nepovinné

- ako zistiť, čoho je viac, ak nevieme počítať?
- odpoveď (Georg Cantor, 1875):
  urobíme páry, ak nám nezostane nijaká nespárovaná vec, tak ich je rovnako veľa
- takto sa dajú porovnávať aj nekonečné súbory či množiny: ak existuje spárovanie, ktoré nenechá nikoho nespárovaného, potom povieme, že množiny sú rovnako veľké, inak je jedna z nich väčšia





nepovinné

nepovinné

prekvapenia

- prirodzených čísiel je rovnako veľa ako párnych
- spárovanie, ktoré nenechá nikoho bez kamoša:

1	2	3	4	5	6	...
|	|	|	|	|	|	
2	4	6	8	10	12	...

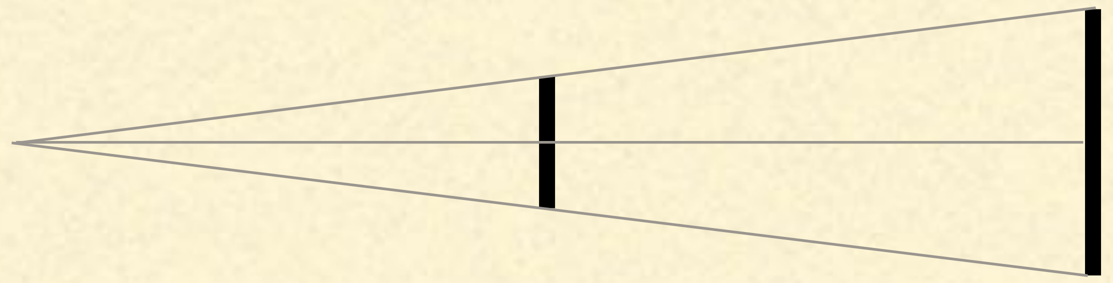
- racionálnych čísiel je toľko, koľko prirodzených
- spárovanie, ktoré nenechá nikoho bez kamoša môžeme zapísať ako postupnosť, v ktorej sú všetky racionálne čísla, každé z nich práve raz (šedou napísané čísla nepočítame, lebo tie sa tam vyskytujú už predtým keďže 2/2=1/1 a pod.)

1/1 , -1/1 ,
1/2 , -1/2 , 2/2 , -2/2
1/3 , -1/3 , 2/3 , -2/3 , 3/3 , -3/3
1/4 , -1/4 , 2/4 , -2/4 , 3/4, -3/4,
...

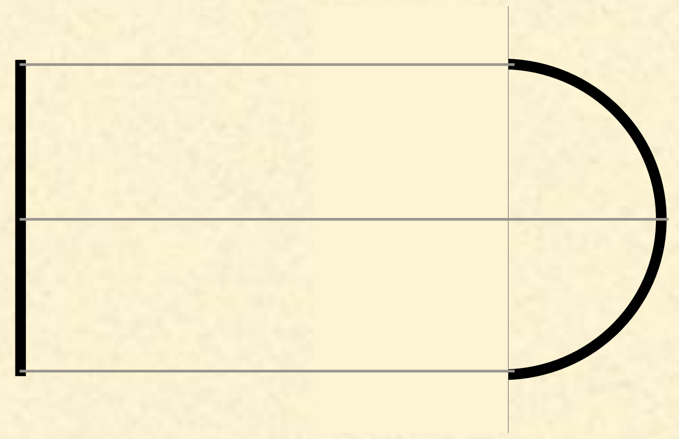
ďalšie prekvapenia

nepovinné

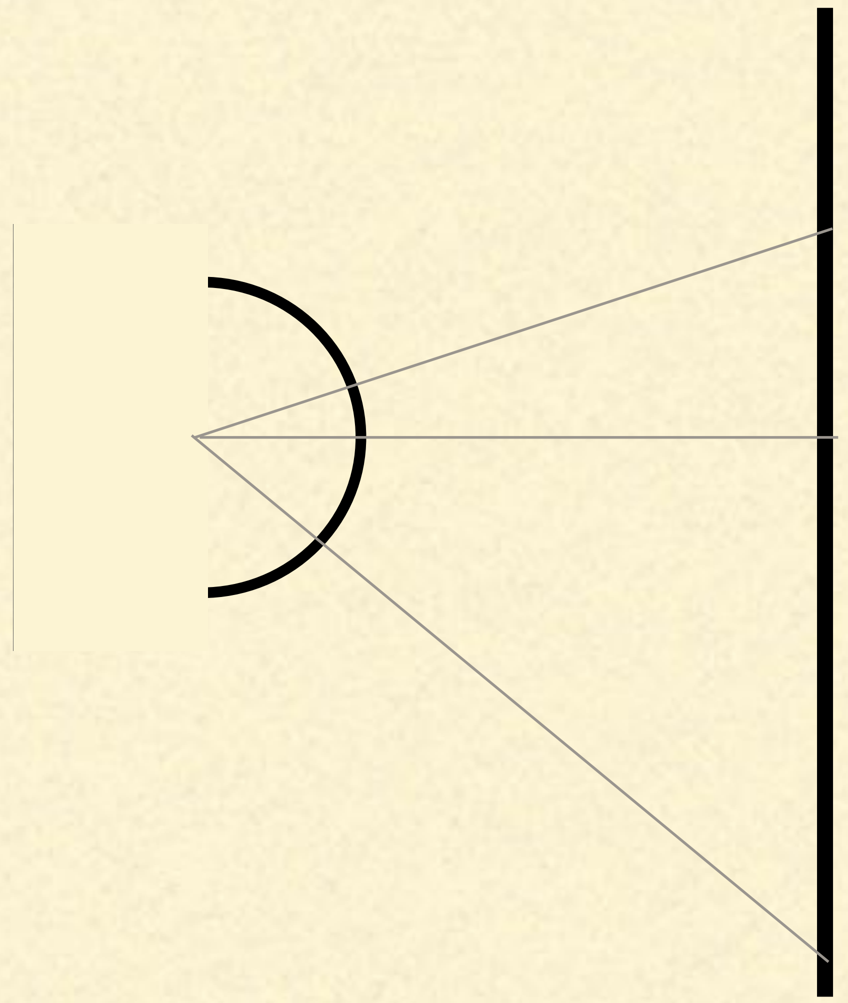
- všetky úsečky obsahujú rovnako veľa bodov



- úsečka obsahuje toľko bodov ako polkružnica



- polkružnica obsahuje toľko bodov ako priamka



- a z bežného použitia reálnej osi vyplýva, že priamka obsahuje toľko bodov, koľko je reálnych čísiel

nepovinné

ešte jedno

nepovinné

- prirodzených čísiel nie je rovnako veľa ako reálnych
- iná formulácia: racionálnych čísiel na intervale $(0,1)$ nie je rovnako veľa ako reálnych na tomto intervale
- dôkaz sporom (Cantorova diagonála)
  nech existuje postupnosť obsahujúca všetky reálne čísla z intervalu $(0,1)$
  ľahko skonštruujeme reálne číslo z toho intervalu, ktoré určite nie je v tej postupnosti, čím ukážeme spornosť predpokladu

0,2836659868382736...
0,8640604921654897...
0,9244258987254768...
0,2238762063278641...
0,7767796076532415...
0,5649673116975943...

0,380963...

na *n*-tom desatinnom mieste sa toto číslo líši od *n*-tého člena postupnosti

nepovinné

nepovinné

dve rôzne nekonečná

- máme teda minimálne dve rôzne veľké nekonečná
- ak je niečoho nekonečne veľa a to práve toľko, koľko je prirodzených čísiel, hovoríme, že je toho spočítateľne veľa
- ak je niečoho nekonečne veľa a to práve toľko, koľko je reálnych čísiel, hovoríme, že je toho nespočítateľne veľa
- spočíteľne veľa je menej ako nespočítateľne veľa (v tom zmysle, že v každom spárovaní prirodzených a reálnych zostanú nejaké reálne čísla bez kamaráta)

nepovinné

nepovinné

zdanlivý zázrak

- reálnych funkcií na nejakom intervale je nespočítateľne veľa
- sínusov a cosínusov s frekvenciami $\omega_n = \frac{2\pi}{T} n$ je spočítateľne veľa
- náš argument: *"nekonečne veľa funkcií by sa malo dať vyjadriť pomocou nekonečne veľa sínusov a cosínusov"* nepočítal s tým, že jedno z týchto nekonečien je väčšie a druhé menšie
- ak tento fakt zoberieme do úvahy, tak Fourierov rad vyzerá opäť ako zázrak: nespočítateľne veľa funkcií vyjadrených cez spočítateľne veľa sínusov a cosínusov

nepovinné

nepovinné

záverečné prekvapenie

- každé reálne číslo sa dá vyjadriť ako nekonečný rad (limita postupnosti konečných čiastočných súčtov) racionálnych čísiel
- ak teda povolíme nekonečné rady (a tie v našich nekonečnerozmerných priestoroch povoľujeme) potom vieme nespočítateľne veľa reálnych čísiel vyjadriť cez spočítateľne veľa racionálnych čísiel
- ak sa niečo tak podarí aj v lineárnych priestoroch, bude to znamenať demystifikáciu tohto zázraku

napíklad číslo 0,5317291...
je súčtom nekonečného radu

0,5000000000...
+ 0,0300000000...
+ 0,0010000000...
+ 0,0007000000...
+ 0,0000200000...
+ 0,0000090000...
+ 0,0000001000...
+ . . .

nepovinné

konkrétny príklad

nepovinné

- uvažujme namiesto reálnych funkcií reálnej premennej funkcie z racionálnych čísiel do racionálnych čísiel (tých je spočítateľne veľa)
- keďže každé reálne číslo sa dá vyjadriť ako limita postupnosti racionálnych čísiel, spojité reálne funkcie reálnej premennej sa dajú vyjadriť ako limity postupností funkcií z racionálnych čísiel do racionálnych čísiel (rozmyslite si, prečo spojité)
- spojité funkcie (ktorých je nespočítateľne veľa) sa teda dajú určitým spôsobom vyjadriť pomocou postupností funkcií z racionálnych čísiel do racionálnych čísiel (ktorých je spočítateľne veľa a členov postupností je tiež spočítateľne veľa)
- zdá sa, že aj "nespočítateľné veľké" vektorové priestory môžu mať spočítateľnú bázu

nepovinné

ako je to s Fourierovými radmi

nepovinné

- do Fourierovho radu sa nedajú rozložiť úplne všetky funkcie, ale len tzv. “slušné”
- slušných funkcií je menej ako všetkých funkcií (v tom sa funkcie podobajú na ľudí)
- a je ich až o toľko menej, že sa dajú vyjadriť cez spočítateľne veľa (co)sínusov
- ukázať, že je to naozaj tak (t.j. zistiť, ktoré funkcie sú slušné v zmysle Fourierových radov a koľko ich je) vyžaduje poriadnu matematiku (viď prednášky z matematiky)
- slušné funkcie sa dajú (podobne ako spojité funkcie v predchádzajúcom príklade) vyjadriť ako superpozície spočítateľnej bázy tvorenej sínusmi a cosínusmi

poznámka na záver

- “nespočítateľne veľké” nekonečné lineárne priestory so spočítateľnou bázou, ktoré v podstate vstúpili do matematiky a fyziky spolu s Fourierovými radmi, boli motiváciou pre neskoršie štúdium takzvaných Hilbertových priestorov
- Hilbertove priestory vlastne nie sú nič iné, než matematicky pevne uchopené “nespočítateľne veľké” nekonečné lineárne priestory so spočítateľnou bázou
- ako sa ukázalo neskôr, práve tieto priestory tvoria základné matematické ihrisko kvantovej mechaniky – takže sa s nimi počas štúdia ešte celkom určite stretnete (pokiaľ nebudete študovať takú fyziku, ktorá kvantovú mechaniku nepotrebuje)