

FOURIEROV RAD

dálšie kladio matematikovo

mechanika 40

čo zatiaľ vieme o Fourierových radoch

ako vyzerá Fourierov rad

- ❖ nech $f(t)$ je slušná (napr. spojitá) funkcia definovaná na intervale $(0, T)$ každá takáto funkcia sa dá napísať v tvare nekonečného radu

$$f(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

kde

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

- ❖ na prvý pohľad to vyzerá hrôzostrašne, ale pre nás je v tejto chvíli dôležité len to, že prakticky “všetko” sa dá poskladať zo sínusov a cosínusov

nakoľko prirodzený je Fourierov rad?

- ❖ na prvý pohľad vyzerá Fourierov rad ako nejaký kúzelnický trik
- ❖ podobne na nás mohol pôsobiť aj Taylorov rad, ale tam sa nám podarilo vysvetliť si, že ide vlastne o celkom prirodzenú vec
- ❖ existuje nejaké podobné vysvetlenie kúzla aj pre Fourierov rad?
- ❖ áno existuje, ale odložíme si ho až na budúci semester (vtedy to bude zrozumiteľnejšie, aj keď zvládli by sme to aj teraz)
- ❖ presnú formuláciu a dôkazy necháme na prednášky z matematiky

- to sme si povedali v prvom semestri pri skúmaní pohybu LHO s vynucujúcou silou
- teraz prišiel ten čas, kedy sa pokúsime pochopiť, v čom tkvie podstata tohto kúzla

rôzne formy Fourierových radov

- keď sme sa prvý raz stretli s Fourierovými radmi, premennou bol čas $t \in \langle 0, T \rangle$ a rad obsahoval sínusy aj cosínusy $\sin \omega_n t$ a $\cos \omega_n t$ kde $\omega_n = n 2\pi / T$
 - keď sme sa s nimi stretli druhý raz (teraz), premennou bola poloha $x \in \langle 0, L \rangle$ a rady obsahovali len sínusy (pevné konce) alebo len cosínusy (voľné konce) $\sin k_n x$ alebo $\cos k_n x$ kde $k_n = n\pi / L$ (chýba 2 v porovnaní s prvým stretnutím)
 - ktorý zápis Fourierových radov je správny?
 - obidva a ešte mnoho ďalších (my tu budeme používať ten z prvého stretnutia)
-

pomerne prekvapujúci začiatok

- začneme z úplne elementárnej (lineárnej) algebry, konkrétne z rozvoja ľubovoľného vektora do ortonormálnej bázy

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$$

- koeficienty tohto rozvoja sa nájdu pomocou skalárneho súčinu: $v_i = \vec{v} \cdot \vec{e}_i$
(vyplýva to z ortonormálnosti bázy - dokážte hneď teraz, že je to naozaj tak)
 - napísali sme to pre trojrozmerný lineárny respektíve vektorový priestor, ale vieme to veľmi prirodzene rozšíriť na ľubovoľný (konečný) počet rozmerov
 - Fourierov rad je práve toto, akurát že v nekonečnerozmernom lineárnom priestore
-

čo je ∞ -rozmerný lineárny priestor?

- predstavme si, že máme navzájom kolmé jednotkové vektory \vec{e}_i , ktorých nie je N , ale nekonečne veľa (t.j. predstavme si, že index i prebieha všetky prirodzené čísla)

- rozvoj do ortonormálnej bázy má tvar nekonečného radu

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{\infty} v_i \vec{e}_i \quad \text{kde} \quad v_i = \vec{v} \cdot \vec{e}_i$$

- a hoci to tak na prvý pohľad nevyzerá, toto už takmer je Fourierov rad
- treba si len vyjasniť v akom zmysle sú funkcie vektory, ako je definovaný skalárny súčin takýchto vektorov a prečo sú sínusy a cosínusy vektory ortonormálnej bázy

funkcia ako vektor so spojitým indexom

- zatiaľ sme uvažovali ∞ -rozmerný vektor \vec{v} , ktorého koeficienty v báze \vec{e}_i tvoria postupnosť $v_1, v_2, v_3, v_4, \dots$ (t.j. koeficienty sú číslované diskretným indexom $i \in \mathbb{N}$)
 - existujú aj vektory, ktorých koeficienty by boli číslované spojitým indexom?
 - ak označíme takýto vektor symbolom f a jeho spojitý index symbolom t potom koeficienty by mali vyzerať ako f_t , čo obyčajne píšeme skôr ako $f(t)$
 - zdá sa, že funkcie môžeme chápať ako vektory so spojitým indexom (presnejšie povedané, ako koeficienty vektora so spojitým indexom)
-

poznámka: vektory, složky, souřadnice

- vektor \vec{v} je jednoznačně daný svojimi složkami v_i v nejaké konkrétnej báze \vec{e}_i
 - to znamená, že vektor \vec{v} je v podstate ekvivalentný N -tici koeficientov (v_1, v_2, \dots, v_N)
 - ak ide o ortonormálnu bázu, složkám vektora často hovoríme kartézské souřadnice
 - niekedy je užitočné rozlišovať medzi vektormi a ich složkami resp. souřadnicami, inokedy je to vcelku zbytočné pantičkárstvo
 - v prípade spojitého indexu budeme považovať vektor a jeho "kartézské souřadnice" $f(t)$ za jedno a to isté
-

tvoria funkcie vektorový priestor?

- sčítavanie funkcií a ich násobenie číslom (reálnym, čiže skalárnym) spĺňa axiómy lineárneho priestoru, takže ich zrejme môžeme vcelku smelo považovať za vektory
 - má to však svoje ale: akonáhle vstupujú do hry nekonečné rady, spolu s nimi prichádzajú aj otázky konvergencie a rôzne s tým súvisiace matematické jemnosti
 - my sa tu týmito otázkami zaoberať nebudeme, to necháme na matematikov (z hľadiska skutočnej matematiky možno považovať všetko, čo tu povieme, za akúsi inšpiráciu pre hlbšie preskúmanie - tá inšpirácia však nie je matematicky bezcenná, práve ona v sebe skrýva to, čo môžeme nazvať "duchom" Fourierových radov)
-

skalárny súčin funkcií

- skúsme teraz prísť na to, ako by mohol vyzeráť skalárny súčin v takomto priestore
- keďže funkcie zodpovedajú koeficientom rozvoja do ortonormálnej bázy, spomeňme si na vyjadrenie skalárneho súčinu v N -rozmernom priestore cez takéto koeficienty

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum u_i v_i$$

- štandardný prechod z diskretného prípadu na spojitý: suma prejde na určitý integrál cez celú oblasť, na ktorej sú funkcie definované - napríklad cez interval $\langle a, b \rangle$

$$f \cdot g = \int_a^b f(t) g(t) dt$$

ortogonálnosť sínusov a cosínusov

- ak má byť Fourierov rozvoj do sínusov a cosínusov rozložením vektora (funkcie) do ortonormálnych bázových vektorov (funkcií), sínusy a cosínusy musia byť ortogonálne
- konkrétne máme na mysli funkcie $\sin \omega_n t$ a $\cos \omega_n t$ pre $t \in \langle 0, T \rangle$ pričom $\omega_n = \frac{2\pi}{T}n$

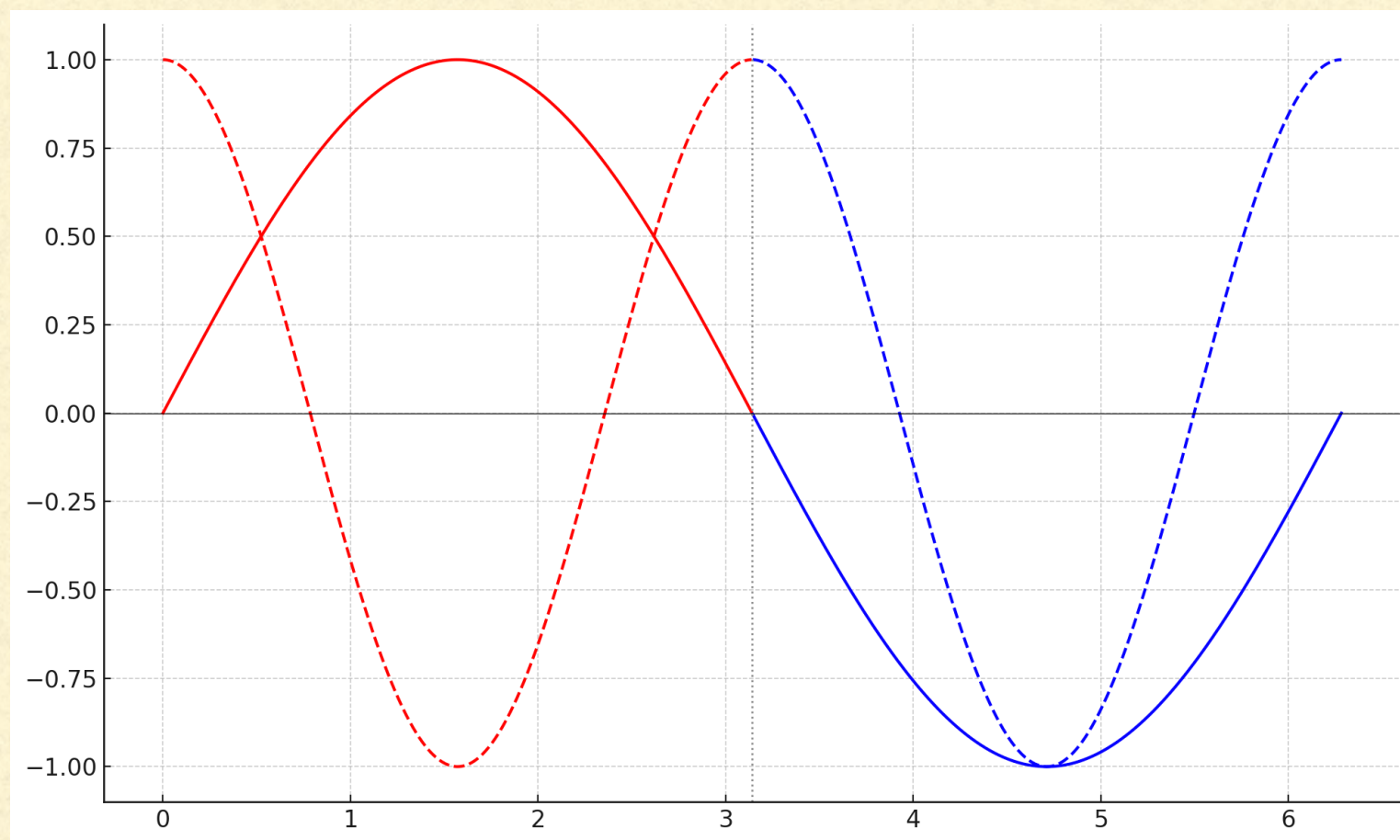
- skalárny súčin:
$$\int_0^T \sin \omega_m t \cos \omega_n t dt = \int_{-T/2}^{T/2} \sin \omega_m t \cos \omega_n t dt = 0$$

prvá rovnosť: posunutie súčinu periodických funkcií o pol periódy doľava

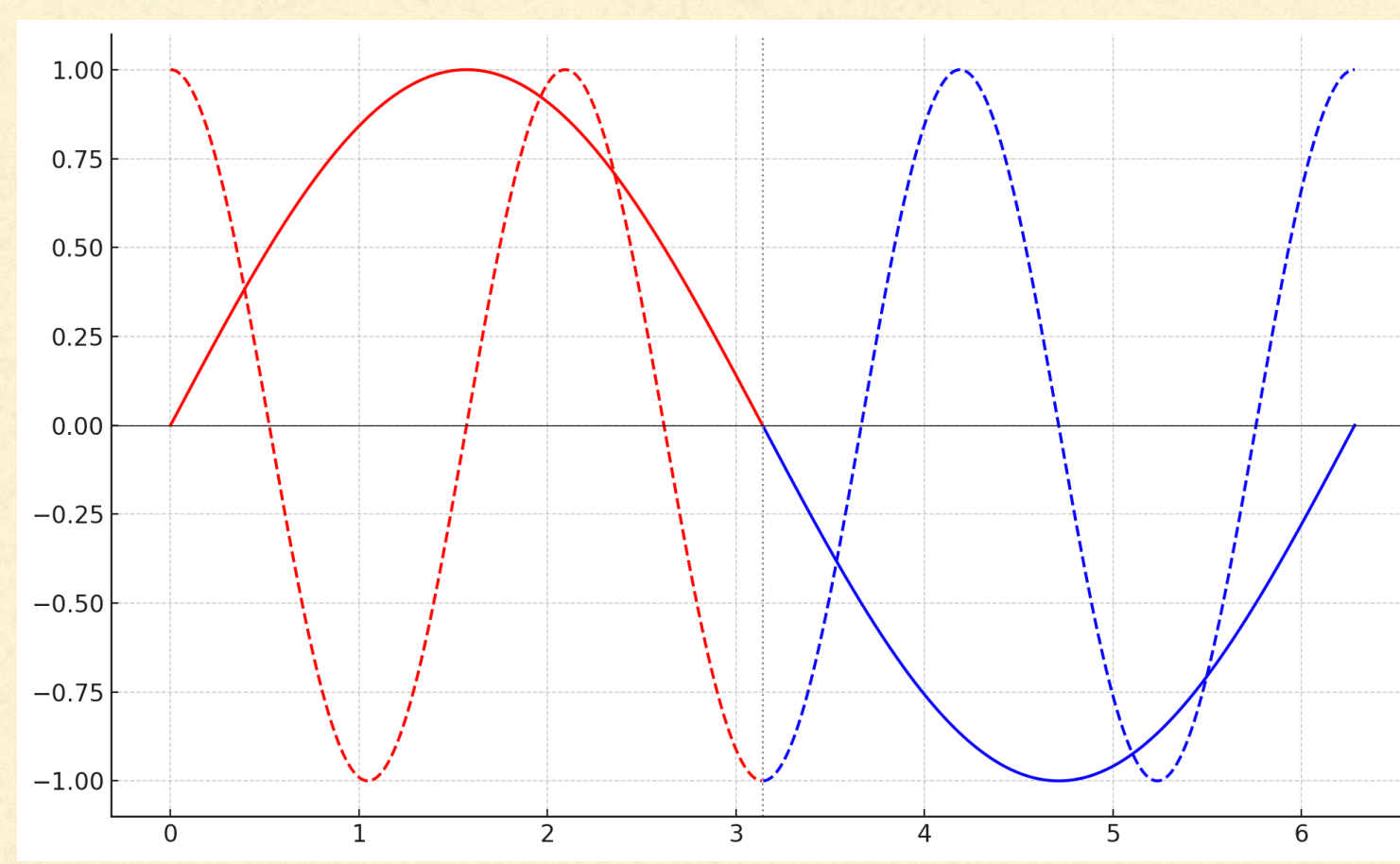
druhá: integrál nepárnej funkcie (súčinu párnej a nepárnej) v symetrických hraniciach

výpočet integrálov kreslením obrázkov

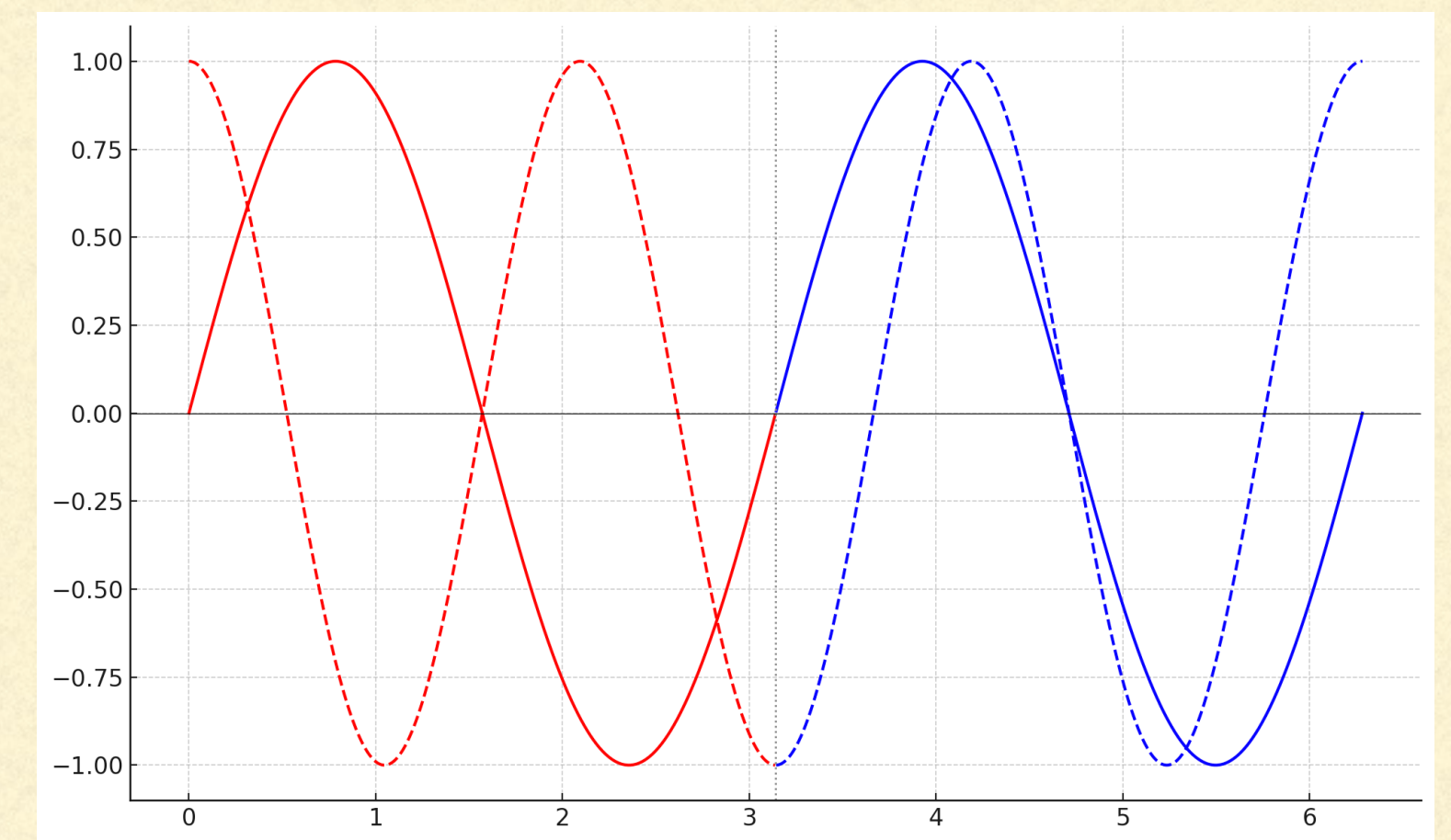
$\sin x \cos 2x$



$\sin x \cos 3x$



$\sin 2x \cos 3x$



súčin je v každej červenej časti opačný ako v nasledujúcej modrej

celková plocha pod krivkou je teda v každej červenej časti opačná ako v nasledujúcej modrej

celkový integrál je teda nulový (príspevky červených a modrých častí sa navzájom vyrušia)

ortogonálnosť sínusov a sínusov

■ a teraz ortogonálnosť dvoch sínusov s rôznymi frekvenciami $\int_0^T \sin \omega_m t \sin \omega_n t dt = ?$

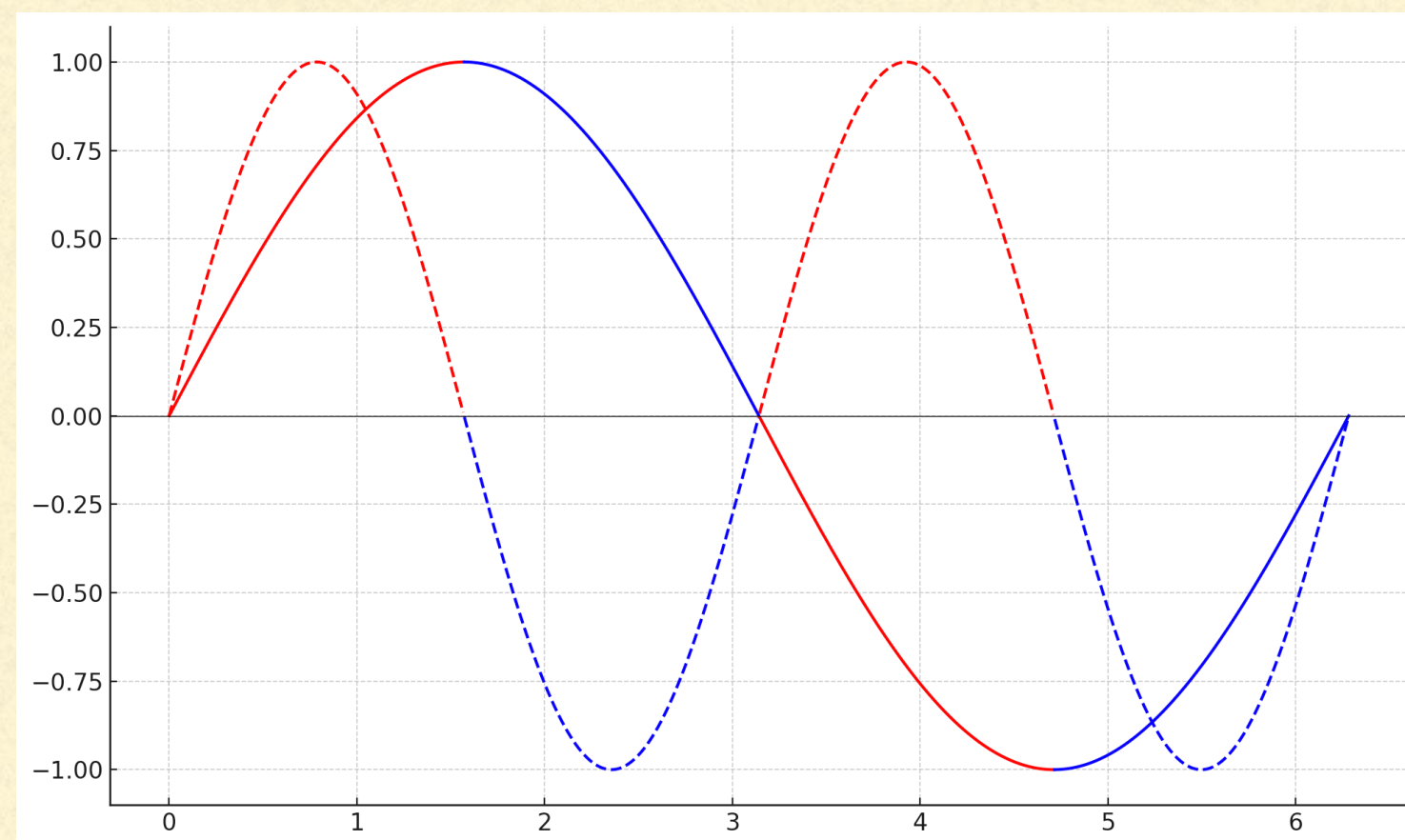
■ trik: $\sin(\omega_m t) \sin(\omega_n t) = \frac{1}{2} (\cos(\omega_m t - \omega_n t) - \cos(\omega_m t + \omega_n t))$

■ $\int_0^T \sin \omega_m t \sin \omega_n t dt = \frac{1}{2} \int_0^T \cos((\omega_m - \omega_n) t) dt - \frac{1}{2} \int_0^T \cos((\omega_m + \omega_n) t) dt = 0$

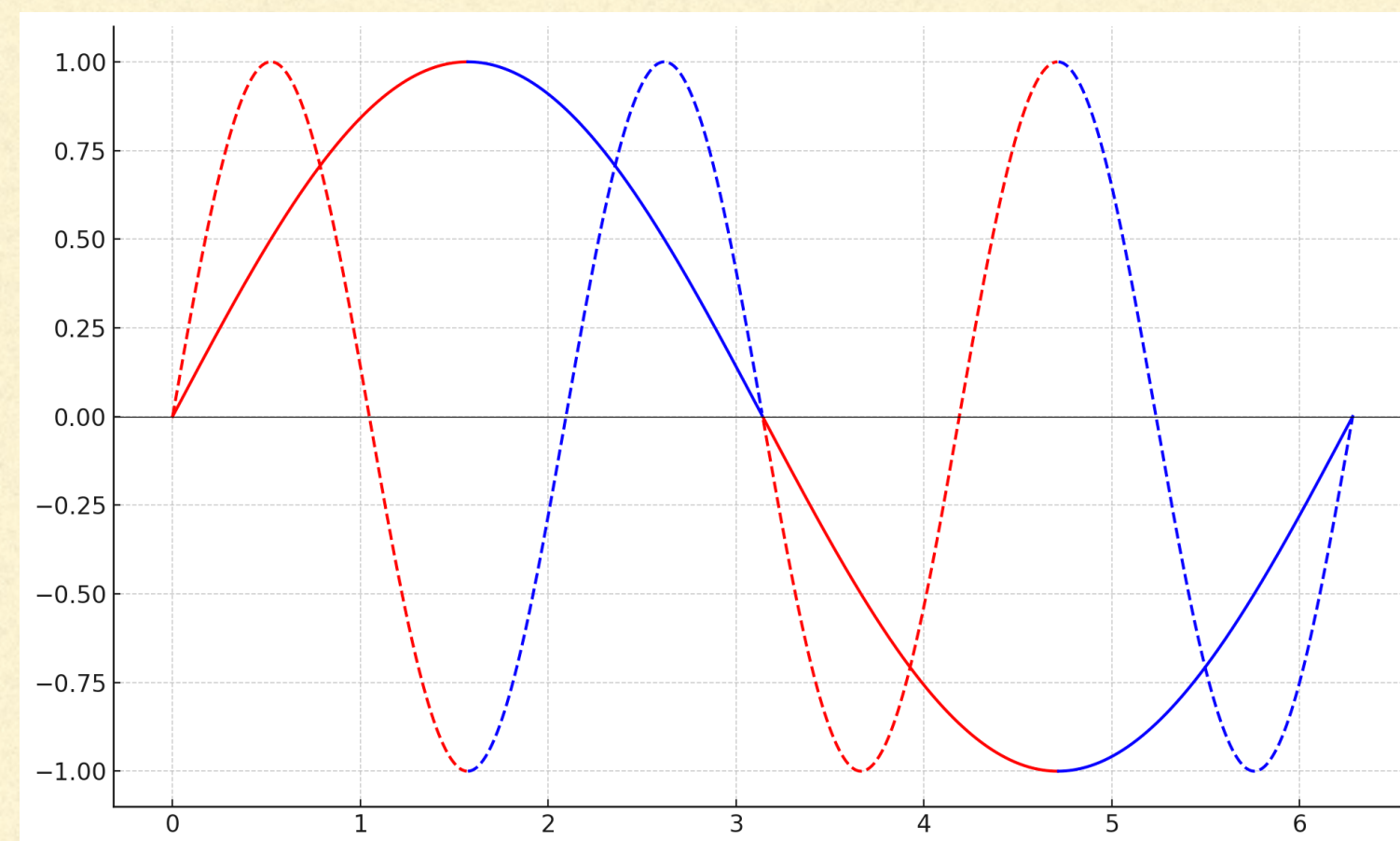
druhá rovnosť: platí pre $m \neq n$ pretože ide o integrály z funkcií $\cos(m \pm n) 2\pi t/T$
a integrál z cosínusu cez celočíselný násobok periódy je vždy nulový

výpočet inegrálov kreslením obrázkov

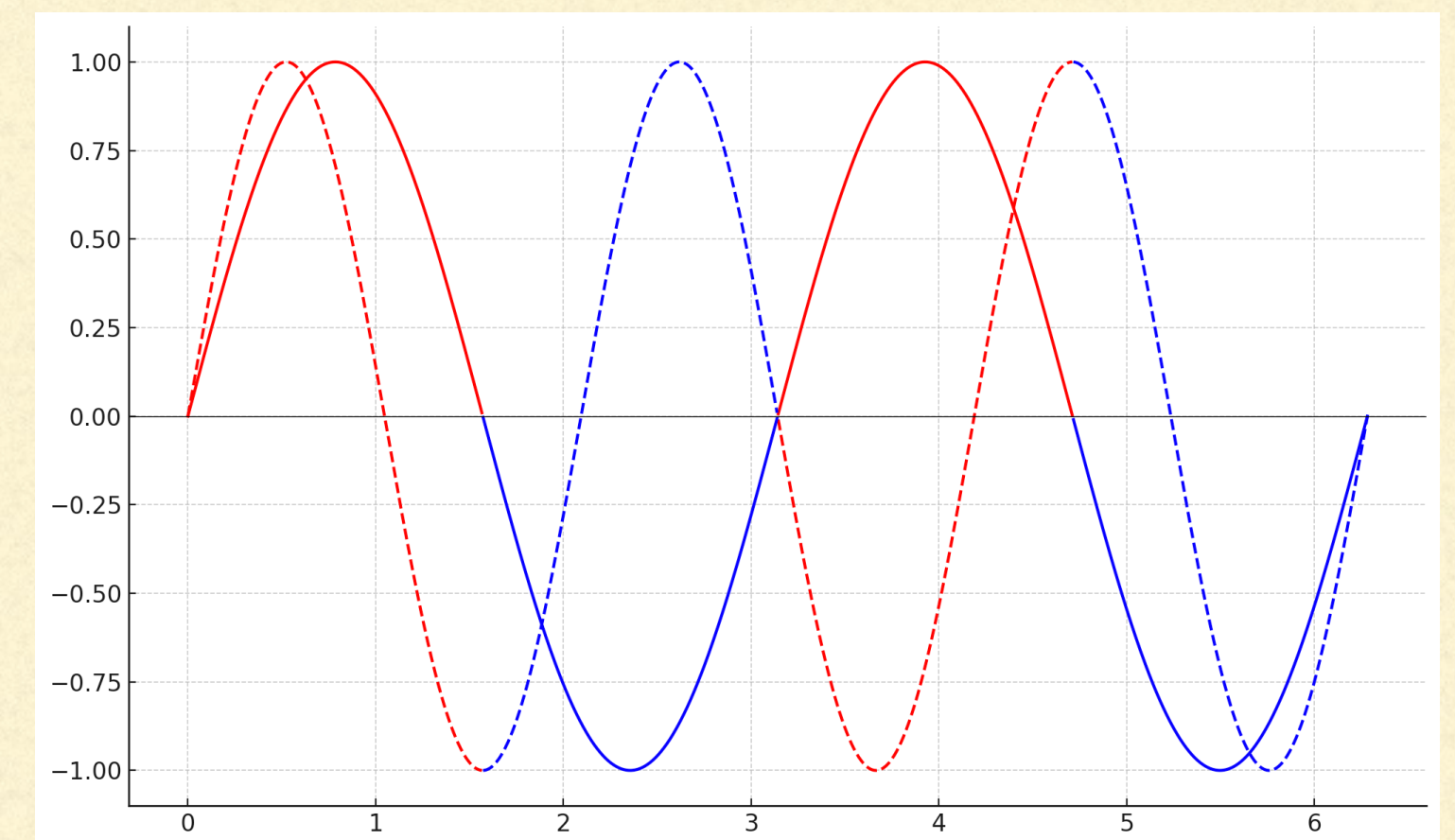
$\sin x \sin 2x$



$\sin x \sin 3x$



$\sin 2x \sin 3x$



súčin je v každej červenej časti opačný ako v nasledujúcej modrej

celková plocha pod krivkou je teda v každej červenej časti opačná ako v nasledujúcej modrej

celkový integrál je teda nulový (príspevky červených a modrých častí sa navzájom vyrušia)

skalárny súčin sínusu so sebou samým

- a ako vyzerá skalárny súčin dvoch sínusov s rovnakými frekvenciami?

- rovnakým trikom ako minule dostaneme

$$\int_0^T \sin \omega_n t \sin \omega_n t dt = \frac{1}{2} \int_0^T \cos ((\omega_n - \omega_n) t) dt - \frac{1}{2} \int_0^T \cos ((\omega_n + \omega_n) t) dt$$

- druhý integrál je nulový (rovnaký argument ako minule), prvý je $\frac{1}{2} \int_0^T 1 dt = \frac{T}{2}$

- výsledok:
$$\int_0^T \sin \omega_n t \sin \omega_n t dt = \frac{T}{2}$$

a teraz cosínusy

- ortogonálnosť dvoch cosínusov s rôznymi frekvenciami sa dokáže rovnako skalárny súčin dvoch cosínusov s rovnakými frekvenciami sa tiež vypočíta rovnako

- výsledok pre $n \neq 0$:
$$\int_0^T \cos \omega_n t \cos \omega_n t dt = \frac{T}{2}$$

- výsledok pre $n = 0$:
$$\int_0^T \cos \omega_0 t \cos \omega_0 t dt = T$$

- funkcie $\sin \omega_n t$ a $\cos \omega_n t$ tvoria na intervale $\langle 0, T \rangle$ ortogonálny systém funkcií, funkcie $\sqrt{2/T} \sin \omega_n t$ a $\sqrt{2/T} \cos \omega_n t$ tvoria ortonormálny systém ($\omega_n = \frac{2\pi}{T}n$)
-

ak by sínusy a cosínusy tvorili bázu

- ak by bol tento systém úplný (t.j. ak by tieto funkcie tvorili ortonormálnu bázu) potom by sme každú funkciu na tomto intervale vedeli napísať ako

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \omega_n t + c'_n \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_n t + c'_0 \sqrt{\frac{1}{T}}$$

pričom koeficienty c_n, c'_n by sa počítali skalárnymi súčinnami funkcie $f(t)$ s funkciami ortonormálnej bázy $\sqrt{2/T} \sin \omega_n t$, $\sqrt{2/T} \cos \omega_n t$ a $\sqrt{1/T}$

$$c_n = \int_0^T f(t) \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \omega_n t dt \quad c'_n = \int_0^T f(t) \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_n t dt \quad c'_0 = \int_0^T f(t) \sqrt{\frac{1}{T}} dt$$

- a to už by po malom preznačení bol ten Fourierov rad, ktorý sme mali na začiatku

a môžu netvorit' bázu?

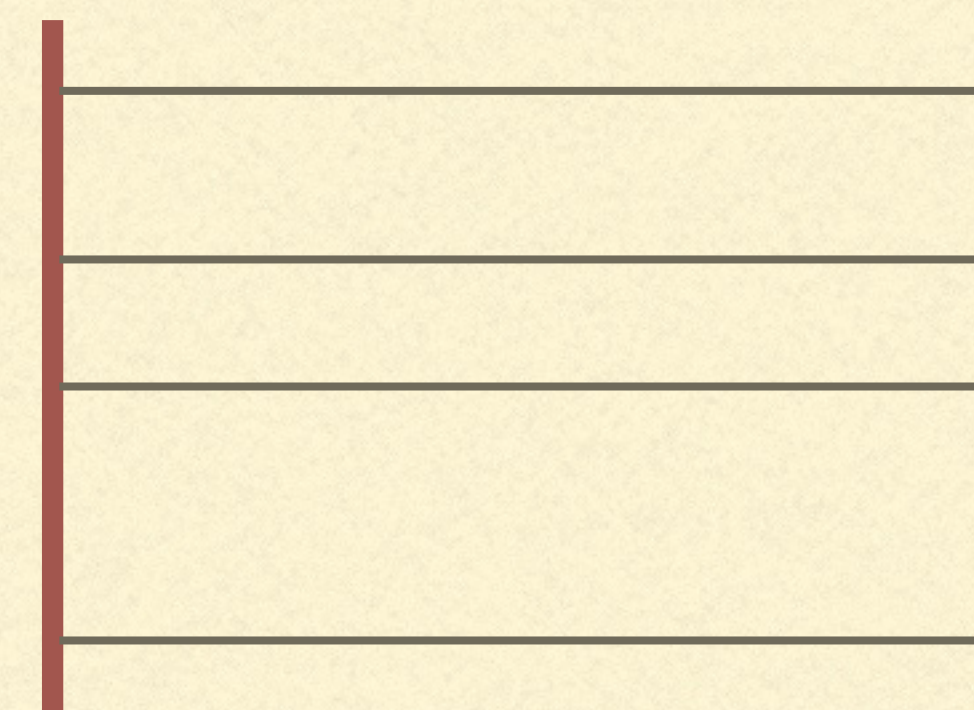
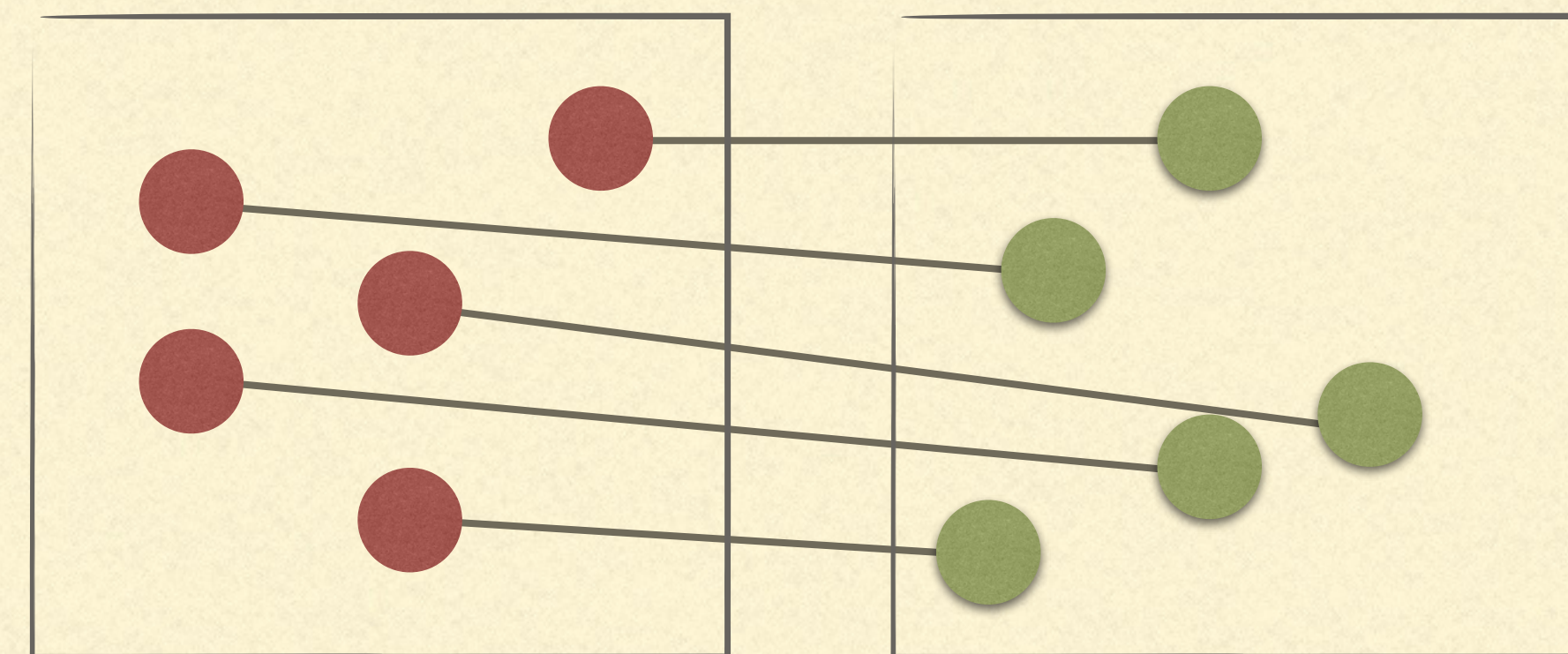
- na vyjadrenie ľubovoľného vektora ako superpozície ortogonálnych vektorov nám v N -rozmernom priestore stačí N ortogonálnych vektorov
 - ak je tých ortogonálnych vektorov nekonečne veľa (tak ako je sínusov a cosínusov) tak by sa pomocou nich malo dať vyjadriť nekonečne veľa funkcií
 - to by znamenalo, že sínusy a cosínusy automaticky tvoria bázu v priestore funkcií
 - to je však prirýchly záver
(dôvod je vskutku pozoruhodný: nekonečne veľa funkcií nemusí byť rovnako veľa ako nekonečne veľa sínusov a cosínusov)
-

nepovinné

ako porovnávať nekonečná

nepovinné

- ako zistiť, čoho je viac, ak nevieme počítať?
- odpoveď (Georg Cantor, 1875):
urobíme páry, ak nám nezostane nijaká nespárovaná vec, tak ich je rovnako veľa
- takto sa dajú porovnávať aj nekonečné súbory či množiny: ak existuje spárovanie, ktoré nenechá nikoho nespárovaného, potom povieme, že množiny sú rovnako veľké, inak je jedna z nich väčšia



nepovinné

nepovinné

prekvapenia

- prirodzených čísiel je rovnako veľa ako párnych

- spárovanie, ktoré nenechá nikoho bez kamoša:

1	2	3	4	5	6	...
2	4	6	8	10	12	...

- racionálnych čísiel je toľko, koľko prirodzených

- spárovanie, ktoré nenechá nikoho bez kamoša
môžeme zapísať ako postupnosť, v ktorej sú
všetky racionálne čísla, každé z nich práve raz
(šedou napísané čísla nepočítame, lebo tie sa
tam vyskytujú už predtým keďže $2/2=1/1$ a pod.)

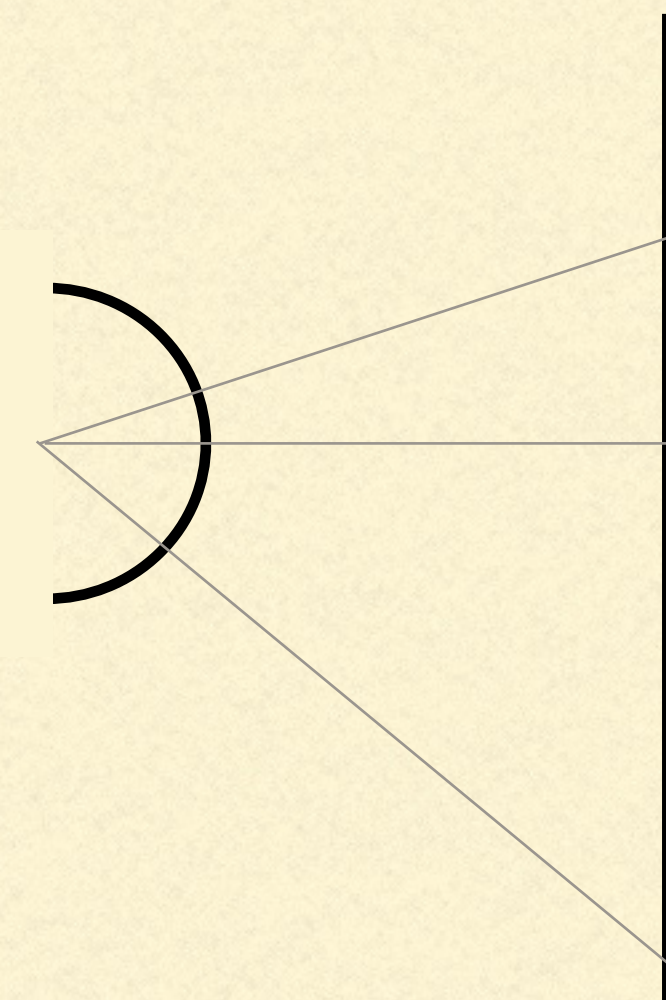
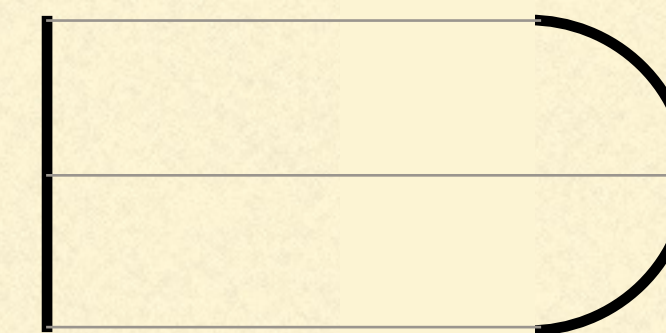
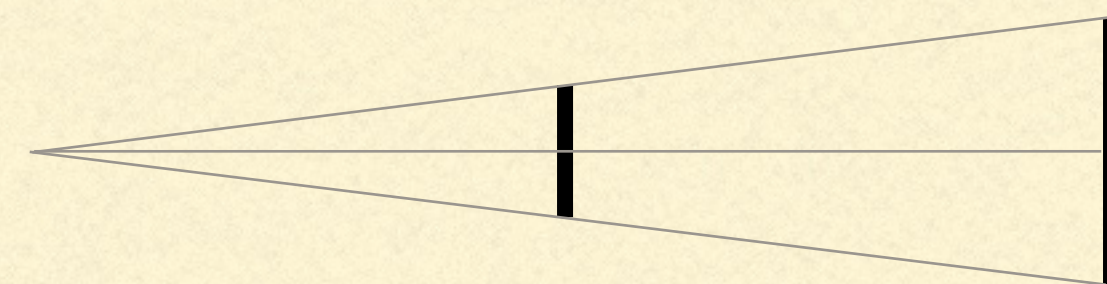
1/1 , -1/1 ,
1/2 , -1/2 , 2/2 , -2/2
1/3 , -1/3 , 2/3 , -2/3 , 3/3 , -3/3
1/4 , -1/4 , 2/4 , -2/4 , 3/4 , -3/4,
...

nepovinné

d'alšie prekvapenia

nepovinné

- všetky úsečky obsahujú rovnako veľa bodov
- úsečka obsahuje toľko bodov ako polkružnica
- polkružnica obsahuje toľko bodov ako priamka
- a z bežného použitia reálnej osi vyplýva, že priamka obsahuje toľko bodov, koľko je reálnych čísiel



nepovinné

ešte jedno

nepovinné

- prirodzených čísiel nie je rovnako veľa ako reálnych
- iná formulácia: racionálnych čísiel na intervale $(0,1)$ nie je rovnako veľa ako reálnych na tomto intervale
- dôkaz sporom (Cantorova diagonála)
nech existuje postupnosť obsahujúca všetky reálne čísla z intervalu $(0,1)$
ľahko skonštruujeme reálne číslo z toho intervalu, ktoré určite nie je v tej postupnosti, čím ukážeme spornosť predpokladu

0,2836659868382736...

0,8640604921654897...

0,9244258987254768...

0,2238762063278641...

0,7767796076532415...

0,5649673116975943...

0,380963...

na n -tom desatinnom mieste sa toto číslo líši od n -tého člena postupnosti

nepovinné

nepovinné

dve rôzne nekonečná

- máme teda minimálne dve rôzne veľké nekonečná
- ak je niečoho nekonečne veľa a to práve toľko, koľko je prirodzených čísiel, hovoríme, že je toho spočítateľne veľa
- ak je niečoho nekonečne veľa a to práve toľko, koľko je reálnych čísiel, hovoríme, že je toho nespočítateľne veľa
- spočítateľne veľa je menej ako nespočítateľne veľa (v tom zmysle, že v každom spárovaní prirodzených a reálnych zostanú nejaké reálne čísla bez kamaráta)

nepovinné

nepovinné

zdanlivý zázrak

- reálnych funkcií na nejakom intervale je nespočítateľne veľa
- sínusov a cosínusov s frekvenciami $\omega_n = \frac{2\pi}{T}n$ je spočítateľne veľa
- náš argument: *“nekonečne veľa funkcií by sa malo dať vyjadriť pomocou nekonečne veľa sínusov a cosínusov”* nepočítal s tým, že jedno z týchto nekonečien je väčšie a druhé menšie
- ak tento fakt zoberieme do úvahy, tak Fourierov rad vyzerá opäť ako zázrak: nespočítateľne veľa funkcií vyjadrených cez spočítateľne veľa sínusov a cosínusov

nepovinné

záverečné prekvapenie

nepovinné

- každé reálne číslo sa dá vyjadriť ako nekonečný rad (limita postupnosti konečných čiastočných súčtov) racionálnych čísiel napríklad číslo $0,5317291\dots$ je súčtom nekonečného radu
- ak teda povolíme nekonečné rady (a tie v našich nekonečnerozmerných priestoroch povoľujeme) potom vieme nespočítateľne veľa reálnych čísiel vyjadriť cez spočítateľne veľa racionálnych čísiel
- ak sa niečo tak podarí aj v lineárnych priestoroch, bude to znamenať demystifikáciu tohto zázraku

$0,5000000000\dots$

$+ 0,0300000000\dots$

$+ 0,0010000000\dots$

$+ 0,0007000000\dots$

$+ 0,0000200000\dots$

$+ 0,0000090000\dots$

$+ 0,0000001000\dots$

$+ \dots$

nepovinné

konkrétny príklad

nepovinné

- uvažujme namiesto reálnych funkcií reálnej premennej funkcie z racionálnych čísiel do racionálnych čísiel (tých je spočítateľne veľa)
 - keďže každé reálne číslo sa dá vyjadriť ako limita postupnosti racionálnych čísiel, spojité reálne funkcie reálnej premennej sa dajú vyjadriť ako limity postupností funkcií z racionálnych čísiel do racionálnych čísiel (rozmyslite si, prečo spojité)
 - spojité funkcie (ktorých je nespočítateľne veľa) sa teda dajú určitým spôsobom vyjadriť pomocou postupností funkcií z racionálnych čísiel do racionálnych čísiel (ktorých je spočítateľne veľa a členov postupností je tiež spočítateľne veľa)
 - zdá sa, že aj "nespočítateľné veľké" vektorové priestory môžu mať spočítateľnú bázu
-

nepovinné

ako je to s Fourierovými radmi

nepovinné

- do Fourierovho radu sa nedajú rozložiť úplne všetky funkcie, ale len tzv. "slušné"
 - slušných funkcií je menej ako všetkých funkcií (v tom sa funkcie podobajú na ľudí)
 - a je ich až o toľko menej, že sa dajú vyjadriť cez spočítateľne veľa (co)sínusov
 - ukázať, že je to naozaj tak (t.j. zistiť, ktoré funkcie sú slušné v zmysle Fourierových radov a koľko ich je) vyžaduje poriadnu matematiku (viď prednášky z matematiky)
 - slušné funkcie sa dajú (podobne ako spojité funkcie v predchádzajúcom príklade) vyjadriť ako superpozície spočítateľnej bázy tvorenej sínusmi a cosínusmi
-

poznámka na záver

- “nespočítateľne veľké” nekonečné lineárne priestory so spočítateľnou bázou, ktoré v podstate vstúpili do matematiky a fyziky spolu s Fourierovými radmi, boli motiváciou pre neskoršie štúdium takzvaných Hilbertových priestorov
 - Hilbertove priestory vlastne nie sú nič iné, než matematicky pevne uchopené nekonečné lineárne priestory so spočítateľnou bázou
 - ako sa ukázalo neskôr, práve tieto priestory tvoria základné matematické ihrisko kvantovej mechaniky - takže sa s nimi počas štúdia ešte celkom určite stretnete (pokiaľ nebudete študovať takú fyziku, ktorá kvantovú mechaniku nepotrebuje)
-