# HYDRODYNAMIKA

**Eulerova a Navier-Stokesova rovnica**

mechanika 40

# vediet' príliš málo

- skoro všetci vieme (prinajmenšom z gangsterských filmov), že vedieť príliš veľa môže byť pomerne nebezpečné
- mnohí sme si vedomí aj toho, že vedieť príliš málo môže byť tiež pomerne nebezpečné
- to, čo sa dá z hydrodynamiky naučiť v prvom ročníku fyziky, je celkom určite príliš málo (pretože je príliš ťažká)
- takže sa z nej radšej naučíme ešte menej, než príliš málo

# takže čo sa vlastne chceme naučiť?

- prečo je hydrodynamika o toľko zložitejšia ako dynamika pružných telies
  inými slovami: čo je zdrojom ťažkostí hydrodynamiky (aj aerodynamiky)
- ako vyzerajú základné rovnice hydrodynamiky a kde je v nich zakopaný pes
  (to bude predmetom tejto prednášky)
- že ten pes je len vodca svorky a spolu s ním je tam zakopaných veľa ďalších psov
  (to bude predmetom budúcej prednášky)
- že štúdium hydrodynamiky vyžaduje veľa času, námahy a komplikovanej matematiky
  (to by mal byť celkový pocit, ktorý si študent odnesie z týchto dvoch prednášok)

# základná ťažkosť opisu tekutín

- v mechanike pružných telies sme postupovali tak, že sme teleso rozdelili na malé kúsky, tie sme označili ich polohou v stave pokoja (hovorili sme tomu rodné číslo) a potom sme našli rovnice pre výchylky jednotlivých kúskov z rovnovážnej polohy
- výchylky boli malé, takže platila veľmi podstatná vec – blízki susedia na začiatku (s blízkymi rodnými číslami) zostávali blízkymi susedmi celý čas
- poznať blízkych susedov je dôležité, pretože práve blízki susedia na seba pôsobia
- tekutiny nemajú túto mimoriadne dôležitú vlastnosť – blízki susedia sa v nich môžu od seba veľmi vzdialiť a kto sú noví blízki susedia, to treba vypočítať

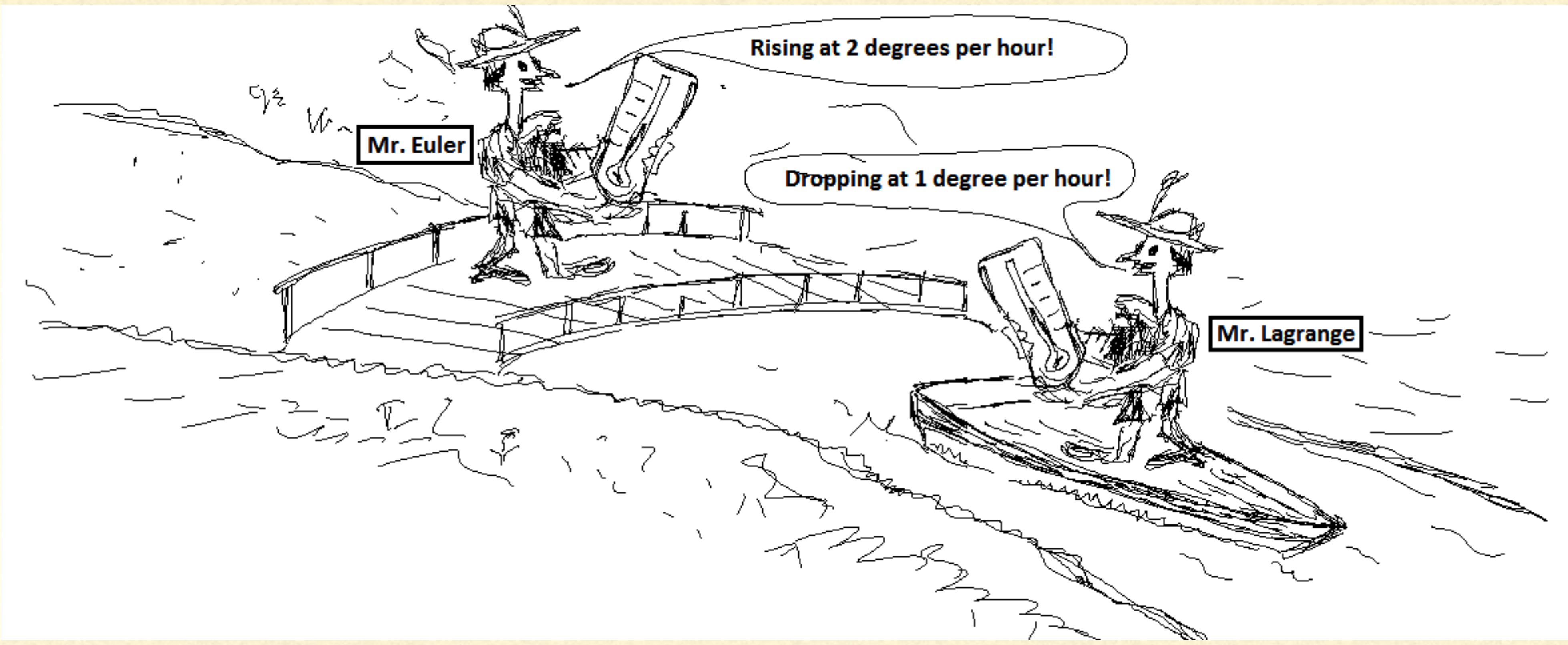
# štandardný obchvat tejto t'ažkosti

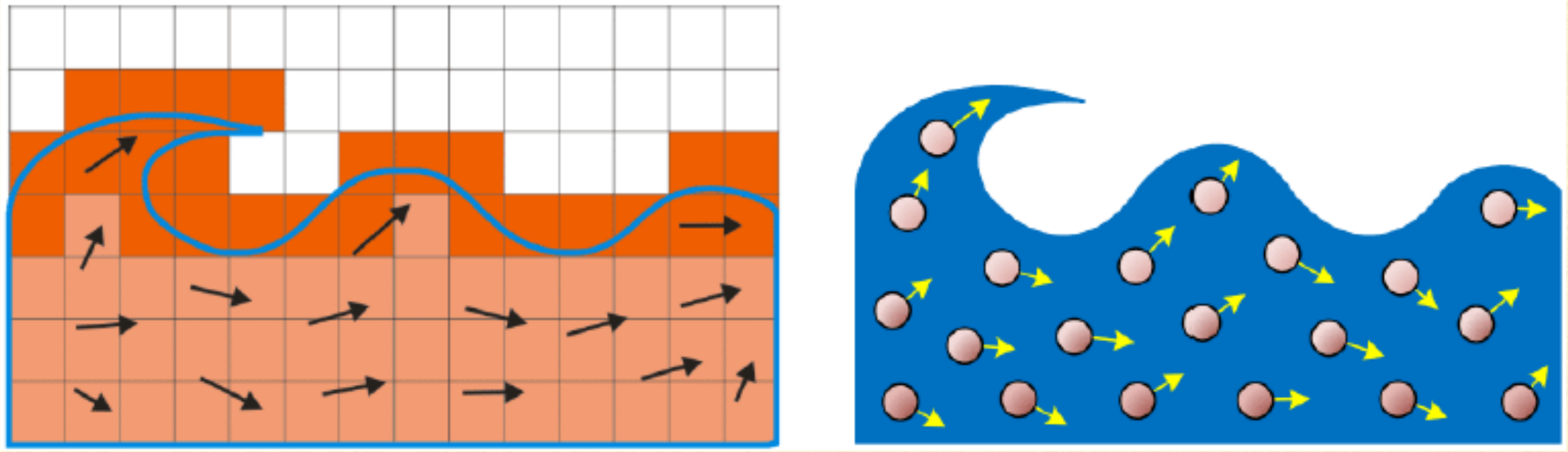
- nepoužívame starý opis pomocou rodných čísiel (ktorému sa hovorí Lagrangeov), ale iný opis, v ktorom je vždy jasné, kto sú najbližší susedia (hovorí sa mu Eulerov)
- Lagrangeov opis zodpovedá pohľadu na tekutinu ako na hustý kŕdeľ rýb (presnejšie povedané kŕdeľ nie rýb, ale jednotlivých kúskov tekutiny), Eulerov opis zodpovedá pohľadu rybára, stojaceho na brehu a pozorujúceho, ako sa v rôznych miestach rieky mení rýchlosť vody a iné jej vlastnosti (napríklad tlak alebo teplota)
- Langrangeov prístup je tiež použiteľný, ale Eulerov je väčšinou o kus výhodnejší
- nepríjemný fakt: ťažkosť so susedmi, vyhodená dverami, sa nám vráti oknom

# ilustračné obrázky

Euler stojí a pozoruje tečúcu rieku,
Lagrange tečie spolu s riekou

Euler vníma rýchlosť tekutiny v rôznych miestach,
Lagrange vníma rýchlosť rôznych častí tekutiny



Eulerov opis je opis v reči časovo premenných polí (rýchlostí a iných veličín)
Lagrangeov opis je opis v reči mnohých častí(c) – ich polôh, rýchlostí a iných veličín

# formálne zhrnutie dvoch opisov

Lagrangeov opis

- opisuje pohyb jednotlivých kúskov (susedia sa môžu od seba vzďaľovať)
- kúsky dostanú "rodné číslo" dané ich počiatočným polohovým vektorom $\vec{r}_0$
- polohový vektor kúska s rod. číslom $\vec{r}_0$ v čase $t$ označujeme vektorom $\vec{r}(\vec{r}_0, t)$ jeho rýchlosť vektorom $\vec{v}(\vec{r}_0, t)$

Eulerov opis

- opisuje, ako sa rýchlosť (a iné veličiny) menia s časom v danom mieste
- polohu daného miesta určuje polohový vektor $\vec{r}$, ktorý sa nemení s časom (poloha najbližších susedov sa nemení)
- rýchlosť tekutiny v mieste $\vec{r}$ a v čase $t$ opisuje funkcia $\vec{v}(\vec{r}, t)$

# pohybová rovnica v 1D

Lagrangeov opis

- hmotnosť kúska krát jeho zrýchlenie rovná sa sile pôsobiacej na ten kúsok

$$\rho\, dV \,\frac{d\, v(x_0, t)}{dt} = F$$

- zrýchlenie je obyčajná derivácia podľa času, lebo $v$ je funkcia len času (ktorá závisí aj od parametra "rodné číslo")

Eulerov opis

- Newtonov zákon sily má rovnaký tvar, ale zrýchlenie sa počíta inak (keďže rýchlosť je teraz funkciou polohového vektora aj času)

- na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že zrýchlenie je parciálnou deriváciou podľa času, ale to je chybný pohľad (ako hneď uvidíme)

# nesprávne zrýchlenie v Eulerovom opise

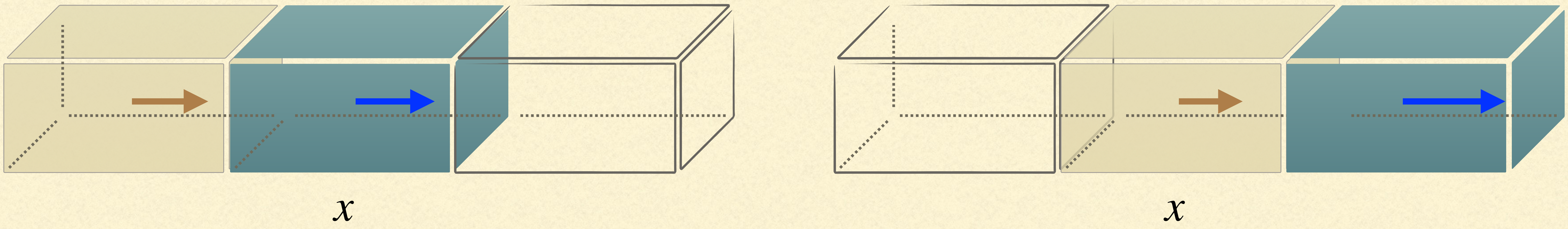
- $v(x,t)$ je rýchlosť toho kúska tekutiny, ktorý sa v čase $t$ nachádza práve v mieste $x$
- prečo Eulerov opis nepoužíva "zrýchlenie" dané parciálnou deriváciou $\frac{\partial}{\partial t}v(x,t)$ ?
- pretože $\frac{\partial}{\partial t}v(x,t) = \lim_{dt\to 0} \frac{v(x,t+dt) - v(x,t)}{dt}$ má v čitateli rýchlosti dvoch rôznych kúskov

  (toho, ktorý bol v mieste $x$ v čase $t + dt$ , a toho, ktorý tam bol v čase $t$ )
- to je ale niečo iné ako zrýchlenie kúska, ktorý je tam v čase $t$

  (a toto zrýchlenie potrebujeme, ak chceme získať pohybovú rovnicu zo zákona sily)

# ilustračný obrázok

situácia v čase $t$ situácia v čase $t + dt$




ak chceme zistiť zrýchlenie modrého kúska (a práve to vystupuje v zákone sily) musíme od seba odčítať modré šípky, a nie modrú a hnedú na tom istom mieste (pričom parciálna derivácia podľa času robí presne tú druhú vec, nie tú prvú)

# správne zrýchlenie v Eulerovom opise

- uvažujme kúsok, ktorý sa v čase $t$ nachádzal v mieste $x$
- v čase $t + dt$ sa tento kúsok nachádza v mieste $x + v(x,t)\,dt + \dots$ , kde tie tri bodky sú za členy vyššieho rádu malosti (pre $dt$ idúce k nule idú k nule rýchlejšie ako $dt$)
- jeho rýchlosť je $v(x + v(x,t)dt + \dots\ , t + dt) = v(x,t) + \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} v(x,t)\,dt + \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} dt + \dots$
- a zrýchlenie je $\lim\limits_{dt \to 0} \dfrac{v(x + v(x,t)\,dt + \dots, t + dt) - v(x,t)}{dt} = \boxed{\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x} v(x,t) + \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t}}$

# konvektívna derivácia

- výraz, ktorý sme práve dostali ako správne vyjadrenie zrýchlenia kúska kvapaliny v Eulerovom opise je natoľko dôležitý, že má svoj vlastný názov aj označenie

- názov: konvektívna derivácia
(ale používajú sa aj mnohé iné, napríklad: "tá, veď vieš, čo ju vymyslel Euler")

označenie a definícia: $$\frac{D}{Dt} f(x,t) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + v(x,t) \frac{\partial}{\partial x} \right) f(x,t)$$

- Newtonova rovnica v Eulerovom opise teda vyzerá takto: $$\rho \, dV \, \frac{D \, v(x,t)}{Dt} = F$$

# zákon sily v Eulerovom opise

- rovnica, ktorú sme práve odvodili, sa väčšinou predelí objemom $dV$, takže má tvar

$$\rho(x,t)\left(\frac{\partial\, v(x,t)}{\partial t} + v(x,t)\,\frac{\partial\, v(x,t)}{\partial x}\right) = f(x,t)$$

- táto elegantná rovnica vyzerá vcelku nevinne, ale pes už je v nej zakopaný
- pes: je to nelineárna diferenciálna rovnica (nelineárny je člen $v\ \partial v/\partial x$)
- toto je ten návrat susedských problémov oknom (po ich vyhodení dverami)

# a prečo sa teda nevrátiť k Lagrangeovi?

- pohybová rovnica v Lagrangeovom opise vyzerala milšie, netreba sa k nej vrátiť?
- vyzerala milšie, ale to len preto, že sme ju nenapísali poriadne (nerozpísali sme sily)
- ak napíšeme poriadne sily vystupujúce v pohybovej rovnici, už nebude taká milá
- v týchto silách (konkrétne v tlakových a viskóznych) totiž budú vystupovať derivácie podľa priestorovej premennej $x$ (resp. premenných $x, y, z$, keď prejdeme do 3D)
- lenže v Lagrangeovom opise nie sú polohy časti tekutiny (t.j. tie $x, y, z$) premenné, ale neznáme, ktoré treba vypočítať – čím sa rovnice podstatne skomplikujú

# sily pôsobiace v tekutine

- na každý kúsok tekutiny pôsobia jednak silové polia (ako gravitačné alebo elmag) a jednak okolité kúsky tekutiny silami vznikajúcimi tlakom alebo tzv. viskozitou

- tie prvé sa zvyknú nazývať objemové, tie druhé plošné
(jedny sú úmerné objemu kúska tekutiny, tie druhé povrchu toho kúska)

- príklad hustoty objemovej sily: hustota gravitačnej sily $f = F/dV = \rho\, g$

- príklad hustoty plošnej sily: hustota tlakovej sily $f = F/dV = -\,\partial p/\partial x$
(ako si o chvíľu odvodíme)

# plošné sily

**tlak**

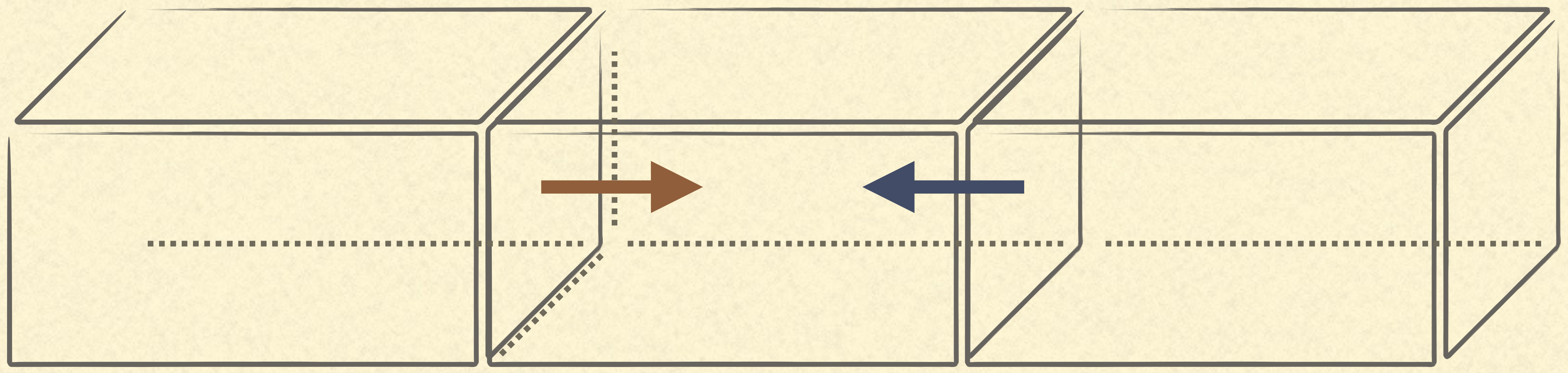
- sila pôsobiaca kolmo na danú plochu
- hydrodynamická rovnica, ktorá berie do úvahy len túto silu (a nie viskozitu), sa volá Eulerova rovnica
- Eulerova rovnica sa dá odvodiť aj v 1D, ale oveľa väčší praktický význam má až jej 3D verzia

**viskozita**

- sila, ktorou na seba pôsobia dve susediace oblasti pohybujúce sa rôznymi rýchlosťami
- hydrodynamická rovnica, ktorá berie do úvahy tlak aj viskozitu, sa volá Navier-Stokesova rovnica
- v 1D vôbec nemá zmysel, až v 2D a 3D

# krátka vsuvka o tlaku

- kúsok tekutiny pôsobí na okolité kúsky tejto tejto tekutiny určitým tlakom, ktorý závisí od ďalších fyzikálnych veličín, ako hustota, teplota a podobne (túto závislosť vyjadruje takzvaná stavová rovnica danej tekutiny)




- Pascalov zákon: tlak v danom mieste tekutiny pôsobí vo všetkých smeroch rovnako (keby to tak nebolo, "nekonečne malé" kúsky tekutiny by získali "nekonečné zrýchlenia")

pre $dx \to 0$ sa musia tlaky vyrovnať, inak by sa nekonečne ľahký kúsok pohyboval s nekonečným zrýchlením

# krátke opakovanie hydrostatiky

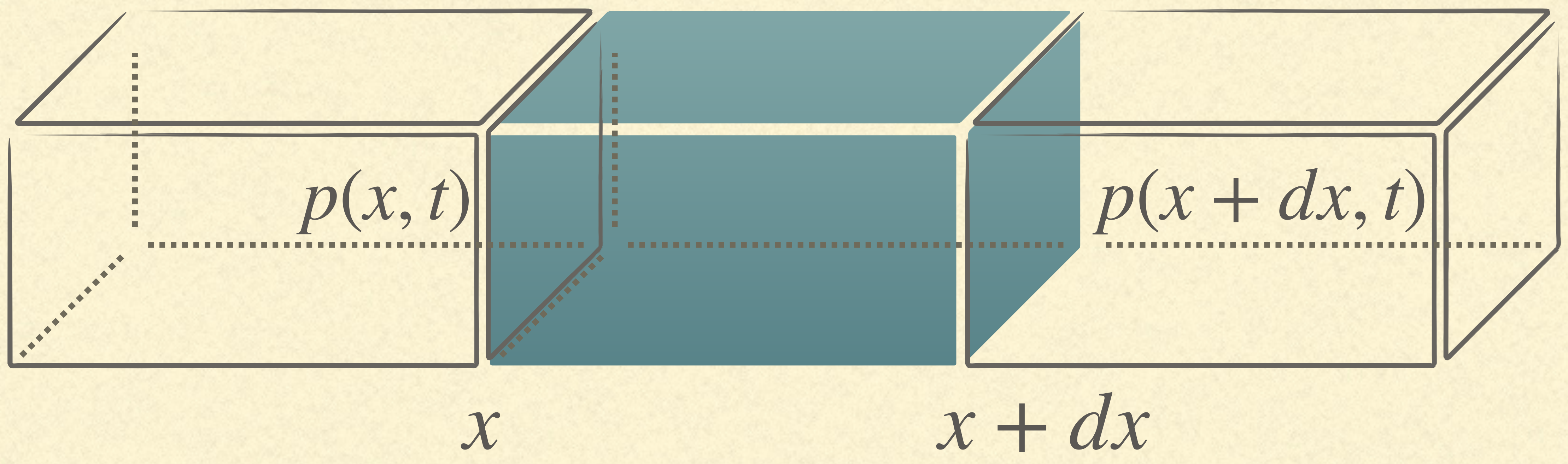
hydrostatický tlak

- $p = \rho\, g\, h$ kde $\rho$ je hustota tekutiny a $h$ je výška stĺpca tekutiny
- v statickom prípade to musí tak byť, aby sila zospodu stĺpca tekutiny spôsobená týmto tlakom $F = p\,.\,S$ vykompenzovala tiaž tohto stĺpca, ktorá je $G = \rho\, V g$

Archimedov zákon

- tá básnička, ktorú snáď každý pozná, tiež vyplýva z Pascalovho zákona
- uvažujme ponorený kváder s výškou $d$ a plochou podstavy $S$, zhora pôsobí tlak $\rho\, g\, h$, zdola tlak $\rho\, g\,(h + d)$, rozdiel síl je $S\,\Delta p = \rho\, g\, S\, d$, čo je tiaž tekutiny s objemom ponoreného telesa

# Eulerova rovnica v 1D




sila zľava $S\,p(x)$

sila zprava $-S\,p(x+dx)$

$$F = -\,S\,p(x+dx,t) + S\,p(x,t) = -\,S\,dx\,\frac{\partial}{\partial x}p(x,t)$$

$$f = \frac{F}{dV} = -\,\frac{\partial}{\partial x}p(x,t)$$

$$\boxed{\rho(x,t)\,\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + v(x,t)\,\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right) = -\,\frac{\partial}{\partial x}p(x,t)}$$

**Leonhard Euler (1707-1783)**

Jeden z najväčších matematikov všetkých čias.
Už len v tomto kurze sme spomínali Eulerovu metódu riešenia lineárnych diferenciálnych rovníc, Eulerovu formulu, Eulerove uhly a Eulerovu rovnicu. Neskôr sa zoznámite s Eulerovou gamma funkciou, Lagrange-Eulerovou rovnicou a (niektorí z vás) aj s Eulerovou charakteristikou. A to hovoríme len o veciach, ktoré pozná každý fyzik, v matematike toho urobil ešte oveľa viac. Jeho matematické a iné práce (je ich spolu 866) majú asi 30 000 strán.

súčasníci

Georg Friedrich Händel, Immanuel Kant, Voltaire, Adam Smith, Benjamin Franklin, Mária-Terézia

# ďalšie rovnice

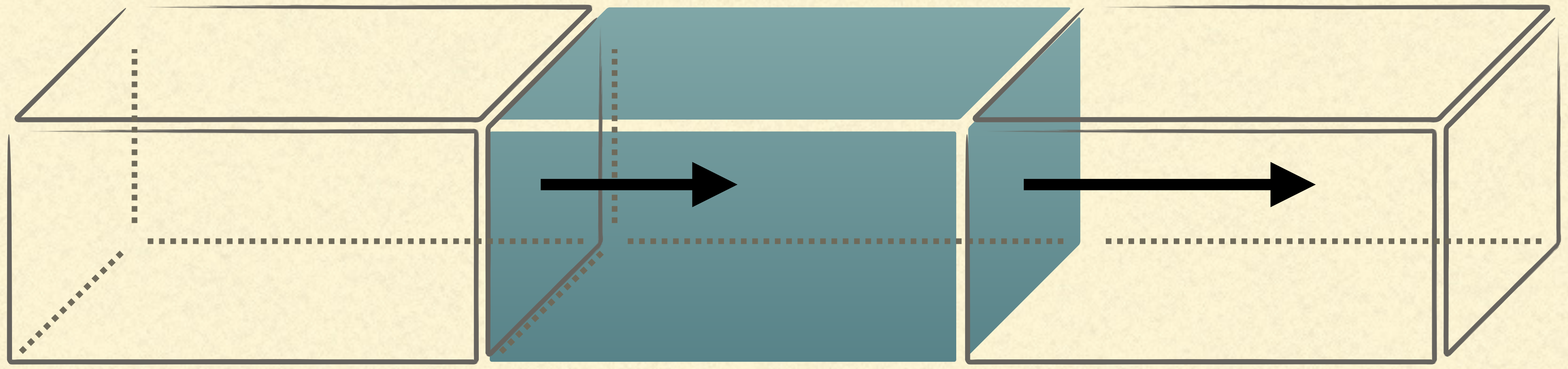
- v 1D Eulerovej rovnici vystupujú tri neznáme funkcie
rýchlosť $v(x, t)$, hustota $\rho(x, t)$ a tlak $p(x, t)$

- samotná Eulerova rovnica je však len jedna
aby sa dali určiť tri funkcie, treba ešte dve rovnice

- jednu získame zo zákona zachovania hmotnosti resp. energie
(v relativistickej fyzike sa hmotnosť nezachováva, ale zachováva sa energia)

- druhú získame zo stavovej rovnice príslušnej tekutiny
(o tej ale bude reč až v ďalšej časti tohto kurzu v prednáškach o termodynamike)

# zachovanie hmotnosti v 1D



$$\rho(x,t)\,v(x,t) \qquad \rho(x+dx,t)\,v(x+dx,t)$$

- hmotnosť sa zachováva, čiže rýchlosť zmeny hmotnosti v danom kúsku je rovná rýchlosti pritekania (alebo odtekania) hmotnosti cez povrch tohto kúska

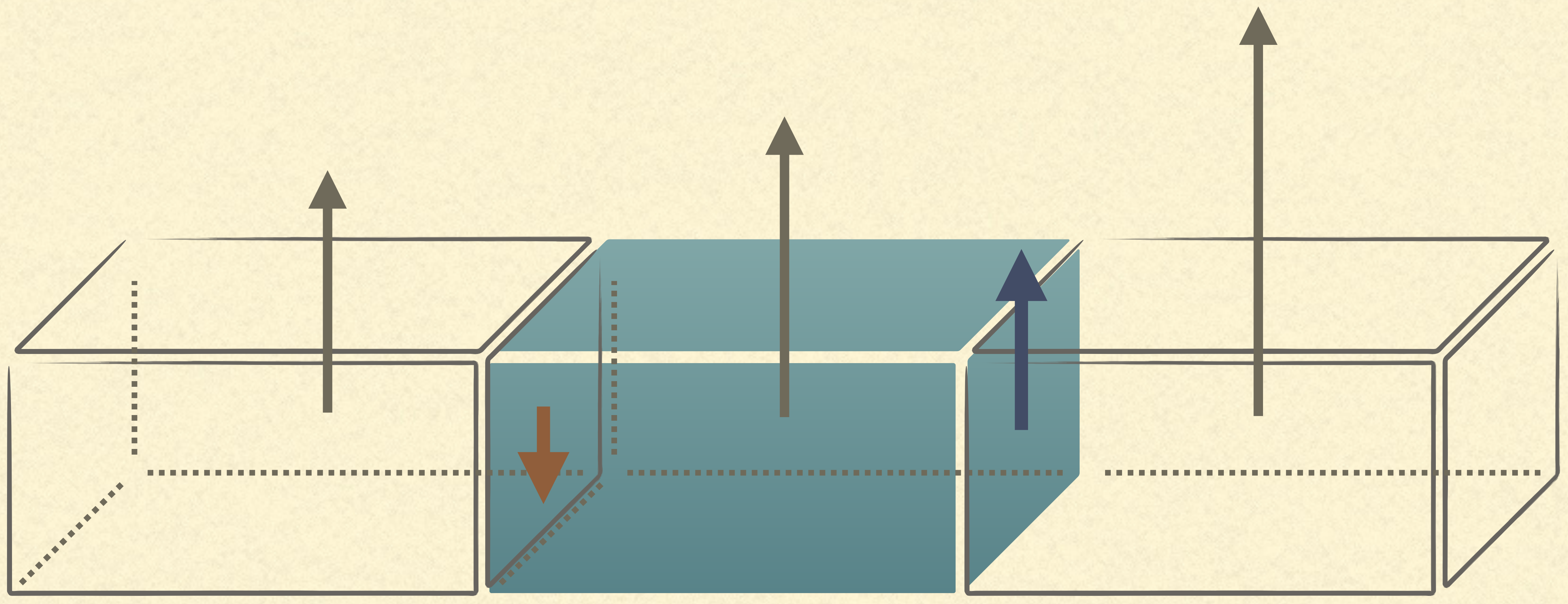
$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t)\,S\,dx = S\,\rho(x+dx,t)\,v(x+dx,t) \;-\; S\,\rho(x,t)\,v(x,t)$$

- vydelením dĺžkou $dx$ dostávame v limite $dt \to 0$ tzv. jednorozmernú rovnicu kontinuity

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\rho(x,t)\,v(x,t)$$

# krátka informácia o viskozite

- ak sa susediace kúsky tekutiny pohybujú rôznymi rýchlosťami, pôsobia na seba silou
- veľkosť tejto sily je pre bežné tekutiny
  $F = \eta\, S \dfrac{\Delta v_x}{\Delta x}$ (parameter $\eta$ sa volá viskozita)
- zdôvodnenie je úplne analogické tomu, ktoré sme použili pri Hookovom zákone
- sila pôsobiaca na daný kúsok je súčtom síl od jednotlivých susedov (v limite $dx \to 0$)



sila zľava

$$F_z(x,t) = -\,\eta\, S \frac{\partial v_z(x,t)}{\partial x}$$

sila zprava

$$F_z(x,t) = \eta\, S \frac{\partial v_z(x+dx,t)}{\partial x}$$

hustota celkovej sily

$$F_z(x,t) = \eta \frac{\partial^2 v_z(x,t)}{\partial x^2}$$

# prechod do troch rozmerov

- keďže viskozita sa prejavuje až vo vyššom počte rozmerov, musíme opustiť 1D svet
- všetky úvahy by sme teraz mohli zopakovať v 3D, ale vyžadovalo by to zoznámiť sa s nejakými novými pojmami (volajú sa gradient, divergencia a rotácia) a to tu robiť nebudeme, pretože sa to naučíte v ďalšom semestri na iných prednáškach
- trojrozmerné rovnice (Eulerova aj kontinuity) sa našťastie dosť podobajú na svoje jednorozmerné príbuzné, takže si ich len uvedieme bez odvodení a potom k nim pridáme viskozitu (tiež bez odvodení, ktoré budú na Teoretickej mechanike)
- 3D rovnice nebudeme riešiť, takže ich neodvodenie nie je až taký ťažký hriech

# Eulerova rovnica v 3D

- pre zrýchlenie sa dostane: $\vec{a}(\vec{r},t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \vec{v}(\vec{r},t)$

- často používaný zápis: $\vec{a}(\vec{r},t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\right) \vec{v}(\vec{r},t)$

- symbol $\nabla$ (hovorí sa mu nabla) predstavuje formálny vektor so zložkami $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

- ak vezmeme do úvahy tlaky vo všetkých smeroch a pridáme aj gravitačnú silu:

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}(\vec{r},t) \cdot \nabla\right) \vec{v}(\vec{r},t) = \vec{g} - \frac{1}{\rho(\vec{r},t)} \nabla p(\vec{r},t)}$$

# rovnica kontinuity v 3D

- podobne ako v prípade Eulerovej rovnice si aj teraz uvedieme len výsledný tvar, bez poriadneho odvodenia a tým pádom aj bez porozumenia (nemá sa to robiť, ale porozumenie príde v ďalšom semestri a teraz by nás príliš zdržalo)

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) - \nabla \cdot \left(\rho(\vec{r},t)\,\vec{v}(\vec{r},t)\right) = 0}$$

- rovnaký tvar majú vo fyzike aj iné zákony zachovania (napr. elektrického náboja)
- v takomto tvare sa často dajú zapísať aj nám už známe zákony zachovania energie, hybnosti a momentu hybnosti a vždy keď sa to dá, je to veľmi užitočný tvar

# Navier-Stokesova rovnica

- tak sa volá Eulerova rovnica s pridanou viskozitou
- po prepísaní nášho dvojrozmerného príkladu do troch rozmerov dostaneme (vyžaduje si to nejakú gymnastiku, ktorá bude v Teoretickej mechanike)

$$\boxed{\rho(\vec{r},t)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overrightarrow{v}(\vec{r},t)\cdot\nabla\right)\overrightarrow{v}(\vec{r},t)=\rho(\vec{r},t)\overrightarrow{g}-\nabla p(\vec{r},t)+\eta\Delta\overrightarrow{v}(\vec{r},t)+\eta'\nabla\left(\nabla\cdot\overrightarrow{v}(\vec{r},t)\right)}$$

kde nový trojuholník $\Delta$ sa volá laplacián a je definovaný takto: $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$

- člen s $\eta'$ je pre nestlačiteľnú tekutinu nulový, takže rovnica je o čosi jednoduchšia

# čo budeme robiť s N-S rovnicou?

- nič
- rozhodne ju nebudeme (spolu s rovnicou kontinuity a stavovou rovnicou) riešiť
- dôvod: je to pekelne ťažká rovnica
(my sme ju tu nedokázali ani poriadne odvodiť, riešenie je ešte oveľa ťažšie)
- len pre predstavu, aká je ťažká: nikto nevie dokázať ani len to, že táto rovnica má (alebo nemá) rozumné riešenia a že tieto riešenia sú (alebo nie sú) jednoznačné
- neveríte?   no pozrite si ďalší slide

# jeden zo 7 miléniových problémov

- sedem najväčších výziev pre matematiku 21. stor.
- podľa vzoru Hilbertových problémov pre 20. stor.
- za správne vyriešenie každého z týchto siedmich problémov je vypísaná odmena milión dolárov

## Millennium Problems

### Yang–Mills and Mass Gap

Experiment and computer simulations suggest the existence of a "mass gap" in the solution to the quantum versions of the Yang-Mills equations. But no proof of this property is known.

### Riemann Hypothesis

The prime number theorem determines the average distribution of the primes. The Riemann hypothesis tells us about the deviation from the average. Formulated in Riemann's 1859 paper, it asserts that all the 'non-obvious' zeros of the zeta function are complex numbers with real part 1/2.

### P vs NP Problem

If it is easy to check that a solution to a problem is correct, is it also easy to solve the problem? This is the essence of the P vs NP question. Typical of the NP problems is that of the Hamiltonian Path Problem: given N cities to visit, how can one do this without visiting a city twice? If you give me a solution, I can easily check that it is correct. But I cannot so easily find a solution.

### Navier–Stokes Equation

This is the equation which governs the flow of fluids such as water and air. However, there is no proof for the most basic questions one can ask: do solutions exist, and are they unique? Why ask for a proof? Because a proof gives not only certitude, but also understanding.

# varovanie na záver

- hlavný pes zakopaný v Navier-Stokesovej rovnici – ktorým je jej nelinearita – nie je ani zďaleka jediným problémom s hydrodynamikou a jej rovnicami
- ďalšie problémy vznikajú, keď sa pokúsime najvšeobecnejšiu verziu tejto rovnice zjednodušiť a potom riešiť tieto zjednodušené rovnice
- problémy spočívajú v tom, že tie zjednodušenia nemáme vždy dobre pod kontrolou a tak nám niekedy dajú riešenia v rozpore so skutočnosťou (príklady nabudúce)
- to neznamená, že hydrodynamike sa vlastne prísne vzaté nedá rozumieť znamená to len toľko, že rozumieť hydrodynamike je ťažké (a nerozumieť ľahké)