LESK A BIEDA PRIBLIŽNÝCH OPISOV

Bernoulliho rovnica

mechanika 41

je hydrodynamika ľahká alebo ťažká?

Bernoulliho rovnica

- toto je jediná hydrodynamická rovnica, ktorá sa učí v rámci stredoškolskej fyziky
- je to jednoduchá rovnica, ktorá dokáže ľahko vysvetliť niektoré veľmi dôležité a pritom úplne prekvapujúce javy
- načo sú nám teda nejaké ďalšie rovnice hydrodynamiky, ktoré sú povestné svojou komplikovanosťou a ktoré skoro nikdy nevieme presne vyriešiť?

Navier-Stokesova rovnica

- toto je všeobecná hydrodynamická rovnica, o ktorej bola reč na minulej prednáške
- je to extrémne ťažká rovnica, ktorú okrem niekoľkých jednoduchých prípadov vôbec nevieme presne riešiť
- ťažká je aj jej jednoduchšia verzia (bez viskozity), ktorá sa volá Eulerova rovnica
- načo sú nám tieto zložité rovnice?

Bernoulliho rovnica

- je to vlastne zákon zachovania mechanickej energie v špeciálnom type prúdenia
- konkrétne ide o stacionárne prúdenie ideálnej kvapaliny resp. tekutiny
  (tá stacionárnosť znamená, že pole rýchlostí v Eulerovom opise nezávisí od času
  tá ideálnosť znamená, že viskozita je nulová – inak sa mech. energia nezachováva)
- tekutina sa navyše nesmie stláčať (často sa preto hovorí, že Bernoulliho rovnica platí len pre nestlačiteľné tekutiny, ale toto tvrdenie je výrazným spôsobom nesprávne)
- z uvedeného je jasné, že Bernoulliho rovnica platí len v dosť špecifických situáciách, (ale nie je z toho jasné, že nie je celkom jasné, prečo v týchto prípadoch platí)

odvodenie Bernoulliho rovnice v 1D

- kinetická energia daného kúska tekutiny:

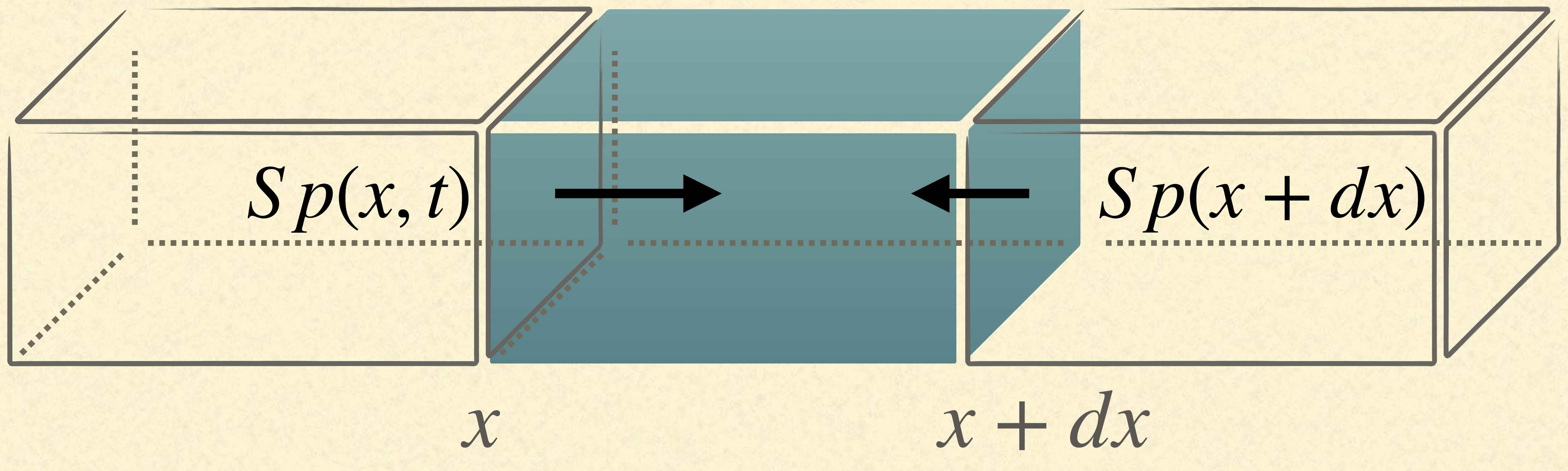
$$E_k = \frac{1}{2}\rho\, S\, dx\, v^2(x)$$

- keď sa tento kúsok presunie a stane sa z neho susedný kúsok, prírastok E_k bude

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}\rho\, S\, dx\, \Delta v^2(x)$$

- tento prírastok je rovný práci tlakových síl $\Delta E_k = F \,.\, dx$, pričom celková tlaková sila pôsobiaca na náš kúsok je daná rozdielom tlakov zľava a zprava $F = -\,S\,\Delta p(x)$, čiže

$$\Delta E_k = -\,S\, dx\, \Delta p(x)$$



- po vydelení objemom kúska dostávame

$$\Delta\left(\frac{1}{2}\rho\, v^2(x) + p(x)\right) = 0$$

- ak je zmena nejakej veci nulová, vec samotná je konštantná

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho\, v^2(x) + p(x) = \mathrm{const}}$$

pridanie potenciálnej energie

- ak sú v hre aj konzervatívne objemové sily (napr. gravitačná), potom zmena kinetickej energie bude rovná práci všetkých síl, t.j. tlakových aj objemových

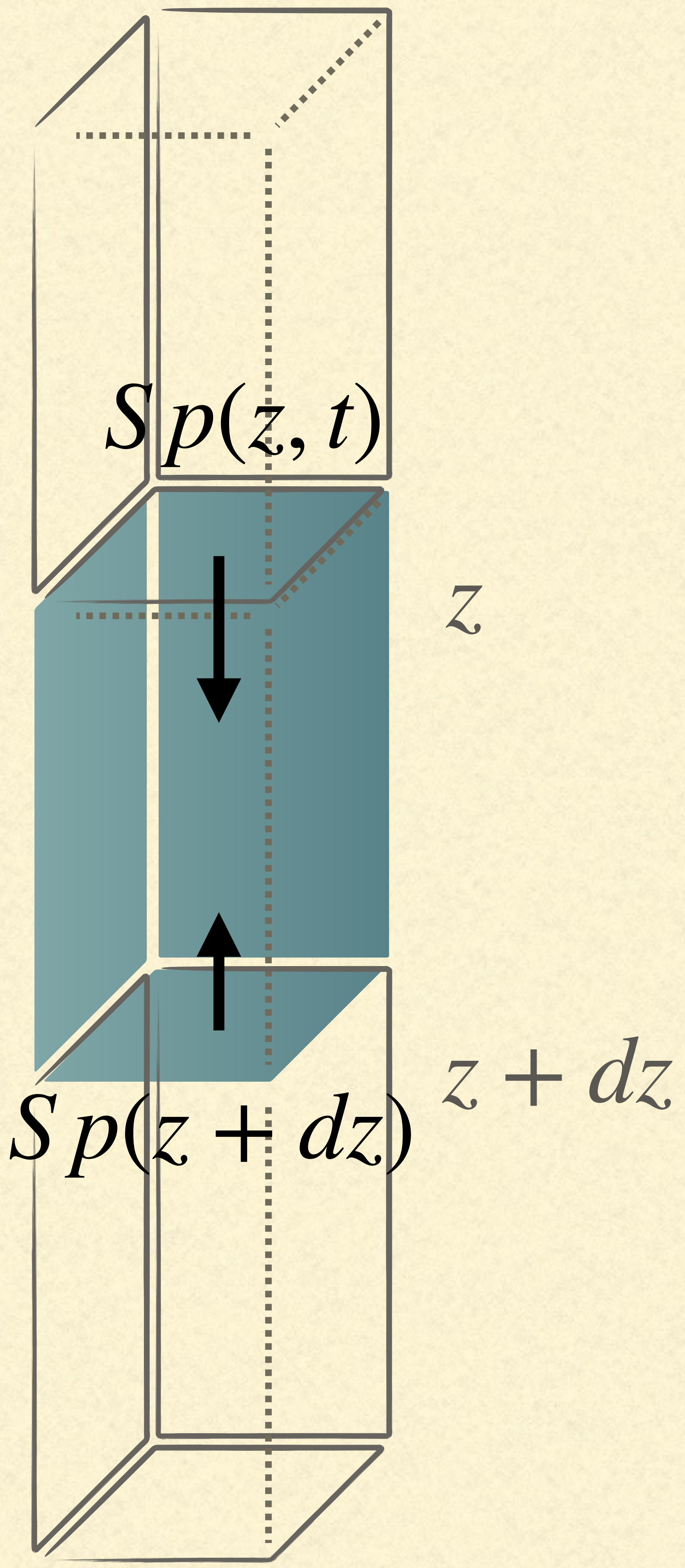
- práca konzervatívnych síl bude rovná rozdielu potenciálnych energií (so záporným znamienkom – prečo?)

- potenciálna energia v hom. gravitačnom poli je $E_p = m\,g\,h$ čiže

$$E_p(z) = \rho\, S\, dz\, g\, z$$

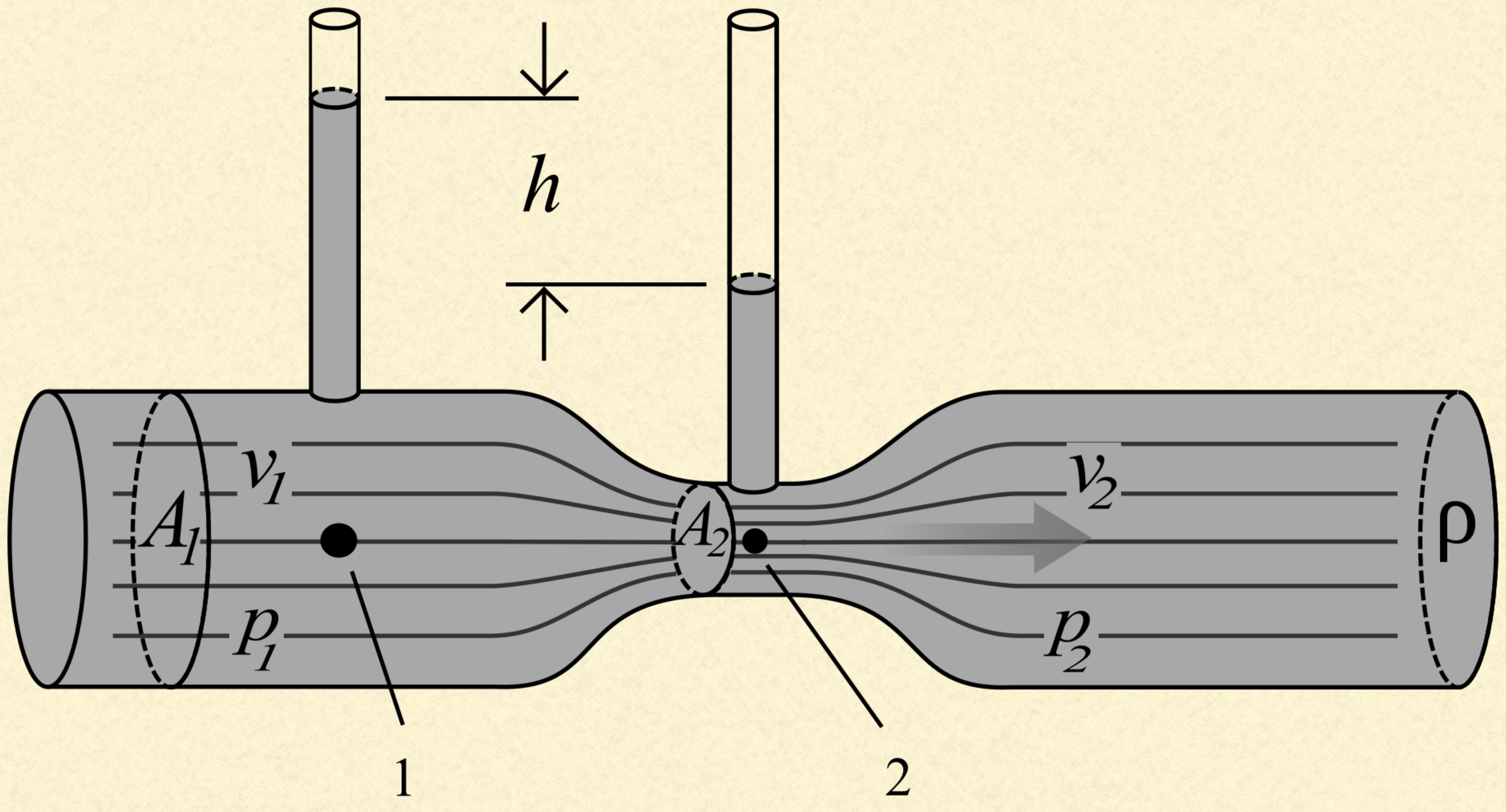
- zo zmeny kinetickej energie $\Delta E_k = -\,S\,dz\,\Delta p(x) - \rho\, S\, dz\, g\, z$ máme

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho\, v^2(z) + p(z) + \rho\, g\, z = \text{const}}$$



notoricky známa demonštrácia

- pre nestlačiteľnú kvapalinu platí $S_1 v_1 = S_2 v_2$ (na obrázku sú plochy označované A , nie S) čiže v užšom mieste tečie tekutina rýchlejšie
- z Bernoulliho rovnice pritom vyplýva, že tlak je v mieste z vyššou rýchlosťou nižší
- a Pascalov zákon hovorí, že tlak je v danom mieste vo všetkých smeroch rovnaký
- celkove dostávame kvantitatívne správny opis pomerne prekvapujúceho javu

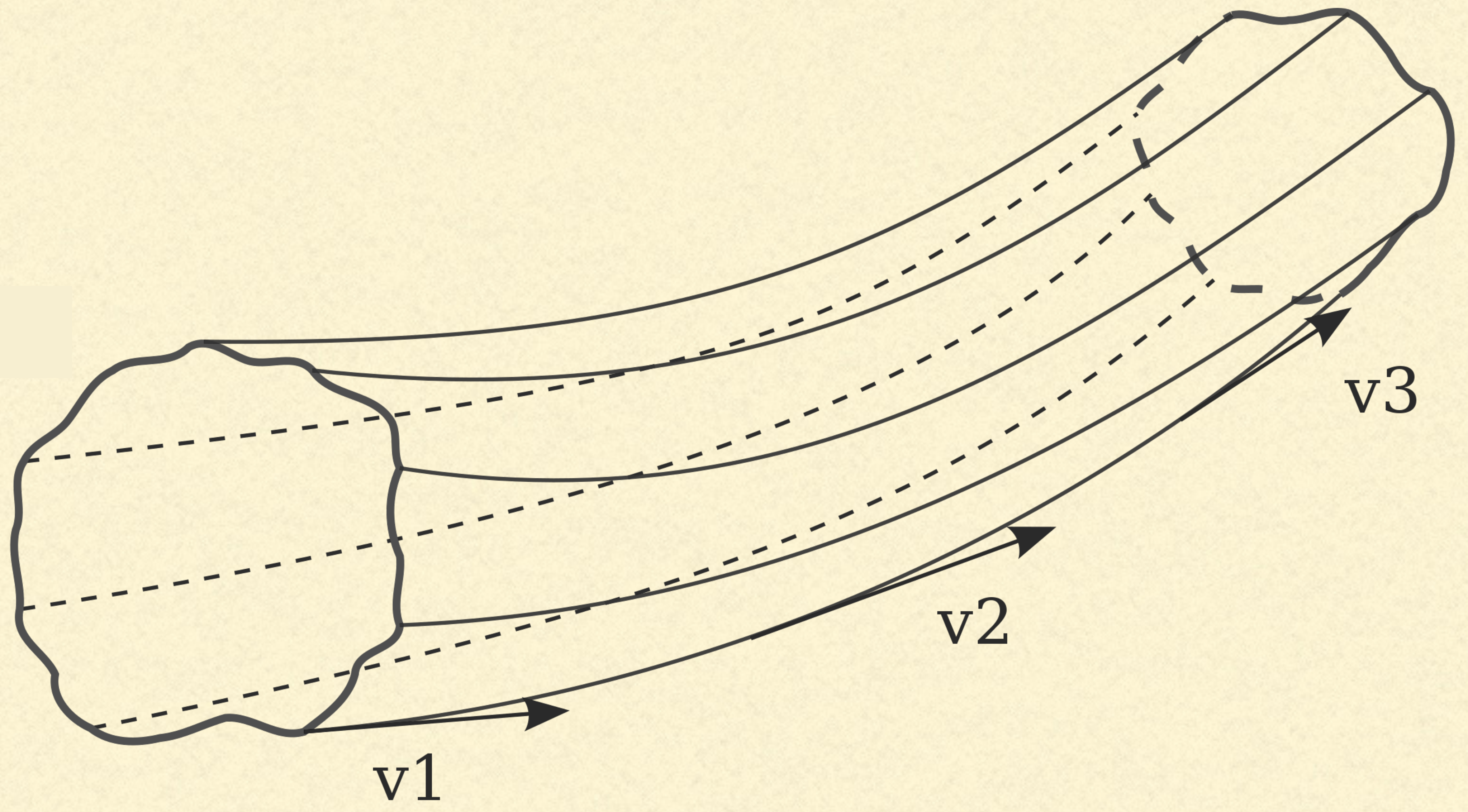


Bernoulliho rovnica v 3D

- v poli rýchlostí môžeme definovať čiary (tzv. prúdové), ktorých dotyčnice v každom bode majú smer daný poľom rýchlostí

- ak teraz vezmeme v tekutine nejakú uzavretú krivku, vytvoria prúdové čiary prechádzajúce touto krivkou tzv. prúdovú trubicu

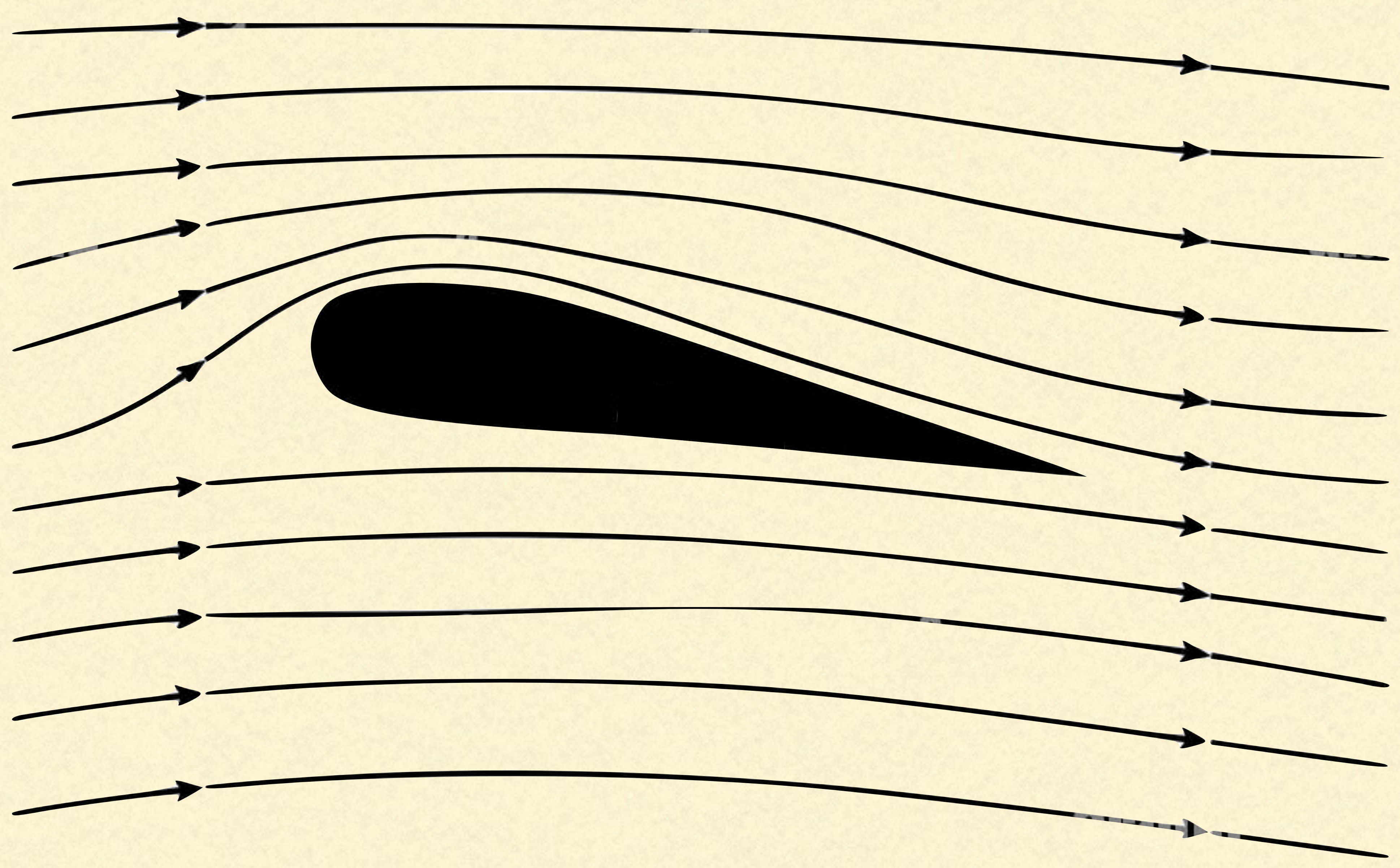
- v úzkej trubici máme prakticky jednorozmerné prúdenie (aj keď pozdĺž krivky, ktorá nemusí byť rovná) a pre toto prúdenie môžeme použiť rovnaké argumenty, aké sme použili v 1D



takto dostaneme v troch rozmeroch Bernoulliho rovnicu, ktorá platí pre jednotlivé prúdové trubice

killer application

- vysvetlenie úplne neintuitívneho faktu, že krídla dokážu udržať lietadlá vo vzduchu (a ani nimi pritom netreba mávať)
- v hornej časti musí prejsť vzduch väčšiu vzdialenosť (kvôli profilu krídla), čiže tam má väčšiu rýchlosť a v jej dôsledku nižší tlak (lebo Bernoulliho rovnica)
- pri veľkých rýchlostiach vie byť rozdiel tlakov až taký výrazný, že vykompenzuje tiaž celého lietadla



takto jednoducho sme vysvetlili taký zdanlivo nepochopiteľný jav

a teraz to celé rozbijeme

- o našom vysvetlení fungovania krídla lietadla pomocou Bernoulliho rovnice treba vedieť v prvom rade toto: je to nesprávne vysvetlenie (aj keď je nakoniec správne)
- presnejšia formulácia: toto vysvetlenie je úplný cintorín zakopaných psov (práve preto je Bernoulliho rovnica dobrým ilustračným príkladom lesku a biedy rôznych priblížení v rámci hydrodynamiky, ktorá je bez tých priblížení príliš ťažká)
- ďalší postup: voči inkriminovanému vysvetleniu fungovania krídla lietadla vyslovíme najprv niekoľko stupňujúcich sa výhrad, ktoré vcelku bez problémov zvládne, potom ho konfrontujeme s usvedčujúcim dôkazom obžaloby, ktorý mal byť úplne zničujúci, (lenže nakoniec budeme musieť konštatovať, že vlastne až taký zničujúci nebol)

námietky a ich zamietnutia

námietka	zamieta sa
pod a nad krídlom sú rôzne prúdové trubice s odlišnými konštantami v Bernoulliho rovnici (tá konštanta môže byť pre každú trubicu iná, nemôžeme používať všade tú istú konštantu)	všetky prúdové trubice majú v dostatočnej vzdialenosti od krídla rovnaké rýchlosti aj tlaky, takže tá konštanta je v tomto prípade predsa len pre všetky trubice rovnaká
prúdenie nie je stacionárne (pohybujúce sa krídlo mení rýchlosť vzduchu vo svojom okolí)	prúdenie je stacionárne ako ho uvažujeme vo vzťažnej sústave spojenej s lietadlom
vzduch nie je nestlačiteľná tekutina	na platnosť vysvetlenia nie je v skutočnosti potrebná nestlačiteľnosť, ale nestlačenosť, a vzduch tu nemusí byť výrazne stláčaný

krátka vsuvka: Machovo číslo

- ako spoznať, či je pri danom prúdení stlačiteľná tekutina stlačená, alebo nie?
- stlačiteľnosť tekutiny je jej kľúčovou vlastnosťou v akustike
(ak sa v tekutine šíri zvuk, tak sa určite stláča a zrieďuje)
- kvantitatívne kritérium toho, či k tomuto stláčaniu a zrieďovaniu dochádza,
je pomer typickej rýchlosti prúdenia tekutiny a rýchlosti zvuku v tejto tekutine
(intuitívne to znie rozumne, poriadnejšiej argumentácii sa tu venovať nebudeme)
- Machovo číslo: $Ma = \frac{v}{c}$ pre $Ma \ll 1$ považujeme tekutinu za "nestlačiteľnú"
(v definícii Ma je v typická rýchlosť tekutiny a c je rýchlosť zvuku v tejto tekutine)

vážnejšia námietka

námietka

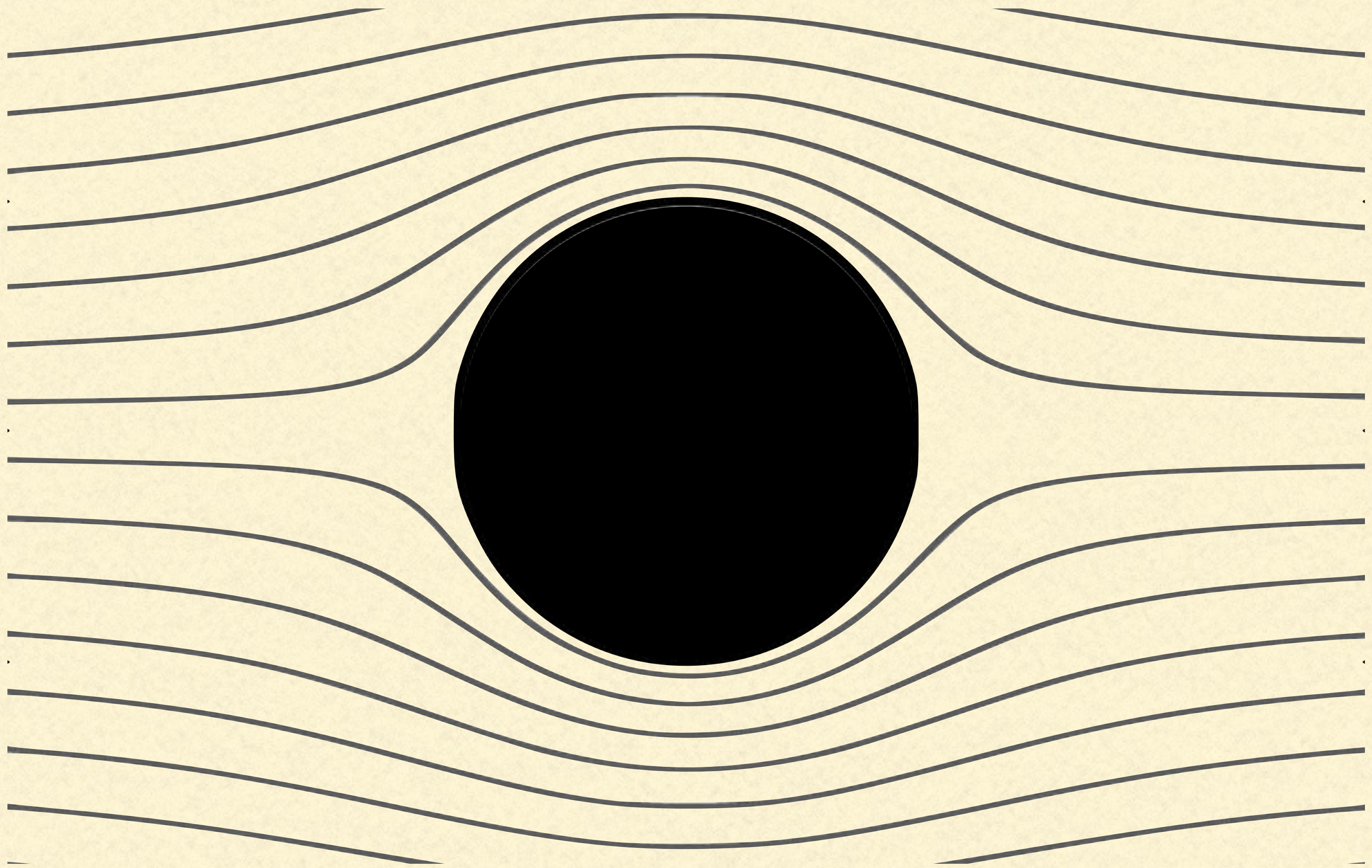
- celá argumentácia je založená na predpoklade, že časti tekutiny, ktoré sa pri začiatku krídla od seba oddelia, sa pri jeho konci opäť stretnú
- z tohto (a z ničoho iného) vyplýva tvrdenie, že "horný kúsok" musí ísť rýchlejšie ako "dolný" (aby stihol dlhšiu vzdialenosť za rovnaký čas)
- lenže tento predpoklad nijako nevyplýva ani z Bernoulliho rovnice, ani z jej odvodenia, ani zo vzťahu $S v = \mathrm{const}$

pripúšťa sa

- predpoklad o rôznych rýchlostiach vzduchu tesne pod a tesne nad krídlom je pre celé vysvetlenie kľúčový a naozaj je to nezávislý predpoklad, uvedený zatiaľ bez dôkazov
- vysvetlenie pomocou Bernoulliho rovnice preto nemožno považovať za uspokojivé, kým obhajoba jasne nedokáže oprávnenosť tohto predpokladu

príprava na rozhodujúci útok obžaloby

- skúsme sa pozrieť na to, čo nám Bernoulliho rovnica hovorí v prípade gule namiesto krídla
- vo vertikálnom smere tentoraz nič (symetria) v horizontálnom smere hovorí toto: energia vzduchu je v každej prúdovej trubici ďaleko vpravo rovnaká ako ďaleko vľavo (pretože je tam rovnaký tlak)
- energia tekutiny sa teda nemení, čo znamená, že ani energia gule sa nemení (zachov. energie)
- to ale znamená, že na guľu pôsobí nulová sila



Bernoulliho rovnica nám teda dáva pre guľu nulový odpor vzduchu, čo je veľmi podozrivý výsledok

J. d'Alembert, korunný svedok obžaloby

- pre obtekanie gule vzduchom platí za predpokladu zanedbateľnej viskozity Eulerova rovnica (z ktorej Bernoulliho rovnica vyplýva ako zákon zachovania)
- v roku 1752 našiel Jean d'Alembert odpor vzduchu pre guľu presným riešením Eulerovej rovnice (toto riešenie je príliš ťažké pre prvákov, takže ho vynecháme, ale už v druhom a určite v treťom ročníku by ste ho mali vcelku ľahko zvládnuť)
- výsledok: dostal nulový odpor (sily, pôsobiace na guľu sa v súčte vynulovali)
- dôsledok: nielen Bernoulliho, ale aj Eulerova rovnica je pomerne nedôveryhodná, pretože dáva v niektorých jednoduchých prípadoch zjavne nerealistické výsledky

Stokesov výpočet

- o sto rokov neskôr (1851) zopakoval d'Alembertov výpočet George Stokes, akurát že nie pre Eulerovu rovnicu, ale pre Navier-Stokesovu rovnicu

- vyšla mu odporová sila $$F = 6\pi r \eta v$$ kde η je viskozita tekutiny, r je polomer gule a v je jej rýchlosť (v stojacej tekutine)

- toto je konečne v zhode s experimentom (platí to pre dostatočne malé rýchlosti, pre väčšie rýchlosti závisí odpor od rýchlosti kvadraticky alebo komplikovanejšie)

- lenže pre tekutiny s nenulovou viskozitou neplatí Bernoulliho rovnica, takže Stokes len potvrdzuje, že používanie tejto rovnice pre obtekanie telies je veľmi podozrivé

Bernoulli vracia úder

- po svedeckých výpovediach d'Alamberta a Stokesa to vyzerá pre Bernoulliho ako stratený prípad a jeho rovnica sa zdá byť odsúdená na nepoužívanie
- lenže potom vystúpi Bernoulli so záverečnou rečou, v ktorej uzná, že pre odpor tekutiny dáva jeho rovnica kvalitatívne nesprávny výsledok, ale zároveň upozorní , že pre vztlakovú silu pôsobiacu na krídlo dáva aj kvantitatívne správny výsledok
- konečný verdikt súdu je, že niečo na nej predsa len bude a môže sa používať
- kedy sa môže používať a kedy nie, zostáva tak trochu záhadou
(ktorú do istej miery vyriešil v roku 1904 neskorší nacistický hajzel Ludwig Prandtl)

čo je to za bordel?

- nuž, to je hydrodynamika. (a nehovorte, že ste neboli varovaní už minule)
- užitočný citát (Cyril Hinshelwood, laureát Nobelovej ceny za chémiu):
  Fluid mechanics was thus discredited by engineers from the start, which resulted in an unfortunate split – between the field of hydraulics, observing phenomena which could not be explained, and theoretical fluid mechanics, explaining phenomena which could not be observed
- dnešná situácia:
  máme poriadnu rovnicu hydrodynamiky (Navier-Stokes), ktorú nevieme moc riešiť
  máme zjednodušené rovnice, ktoré občas nevieme uspokojivo odvodiť
  máme experimentálne fakty, ktoré občas nevieme uspokojivo vysvetliť

TOTO JE NEDOKONČENÁ PREZENTÁCIA

všetko, čo nasleduje, sú len prípravy pre budúce slidy, z ktorých netreba na skúšku vedieť nič

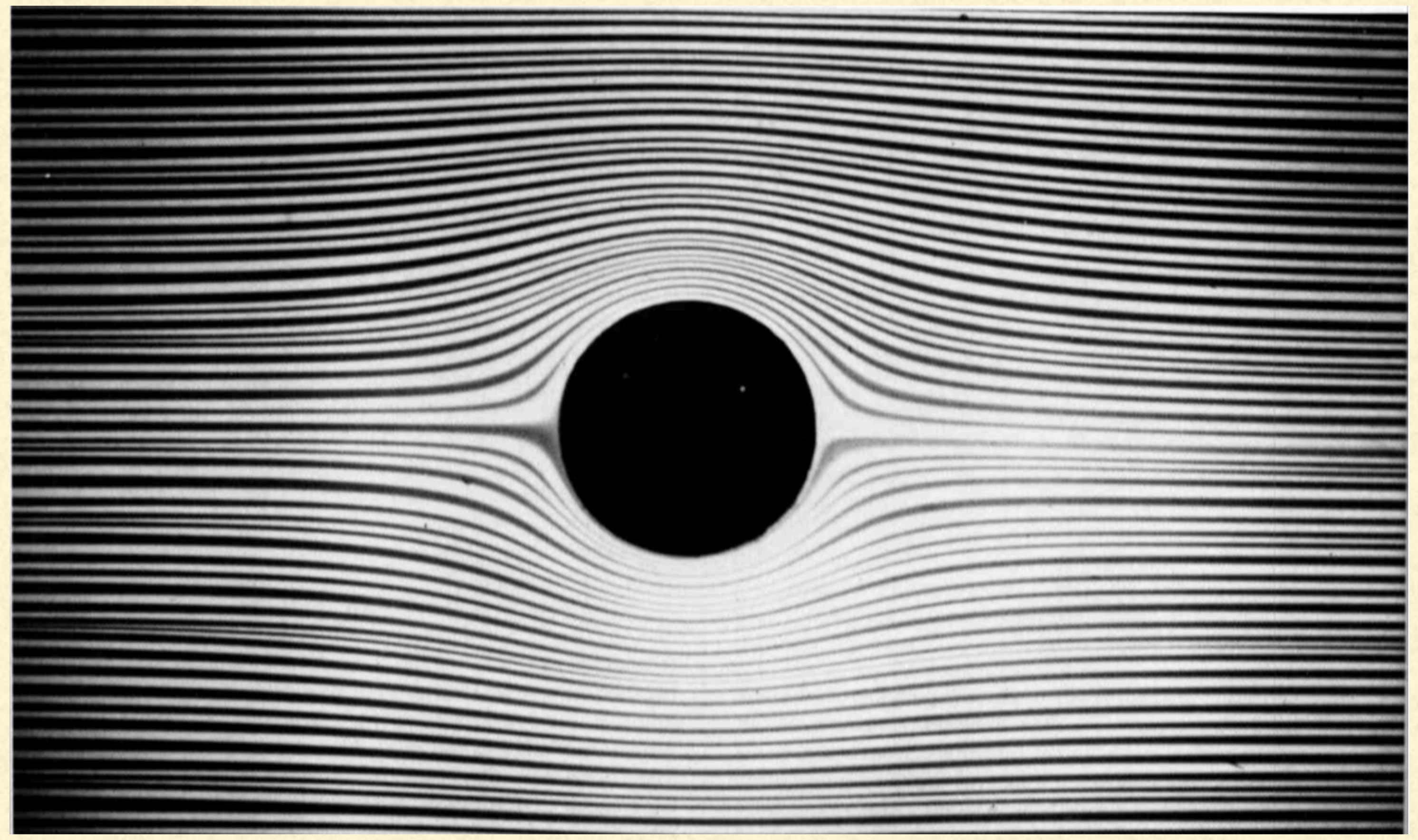
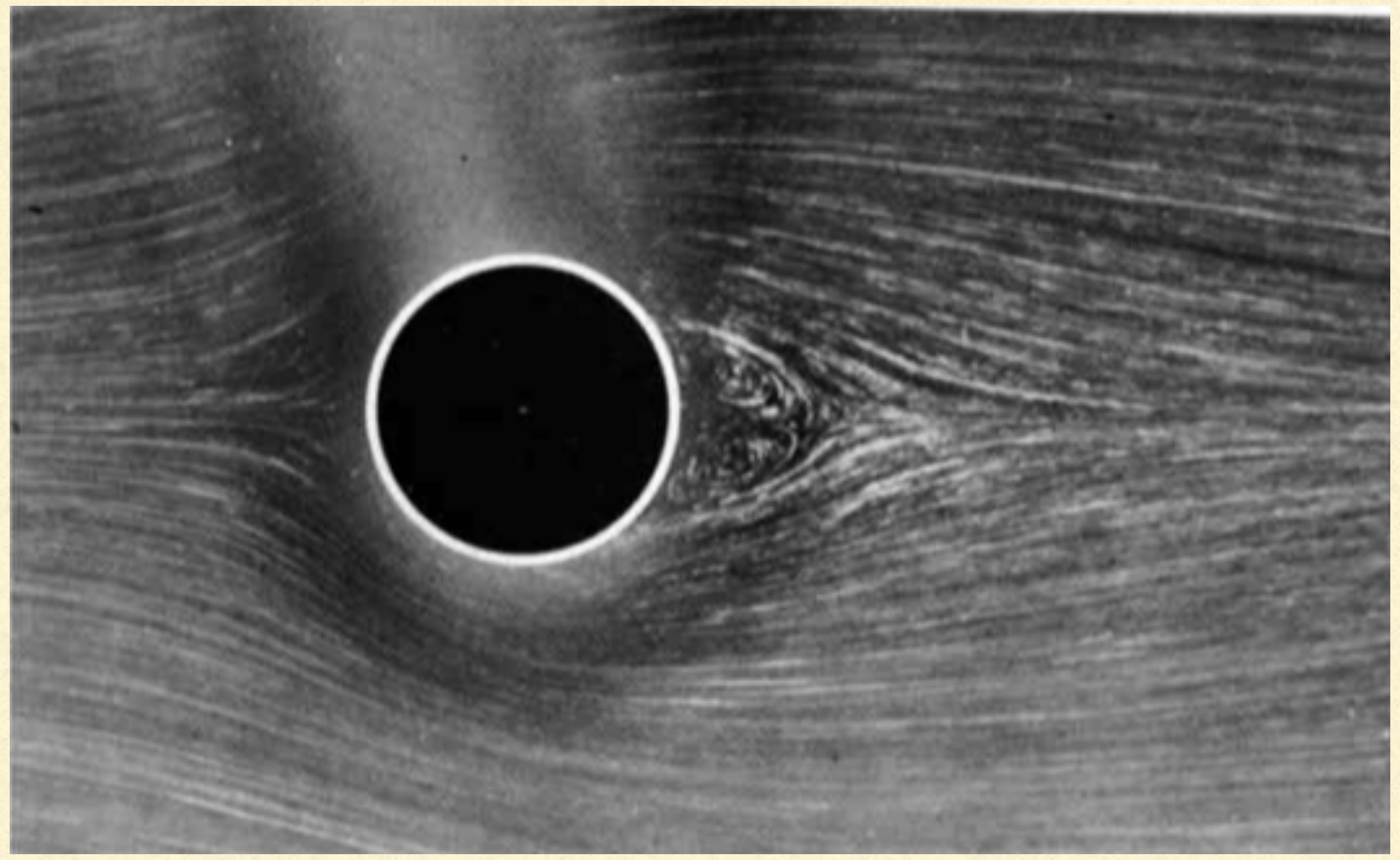
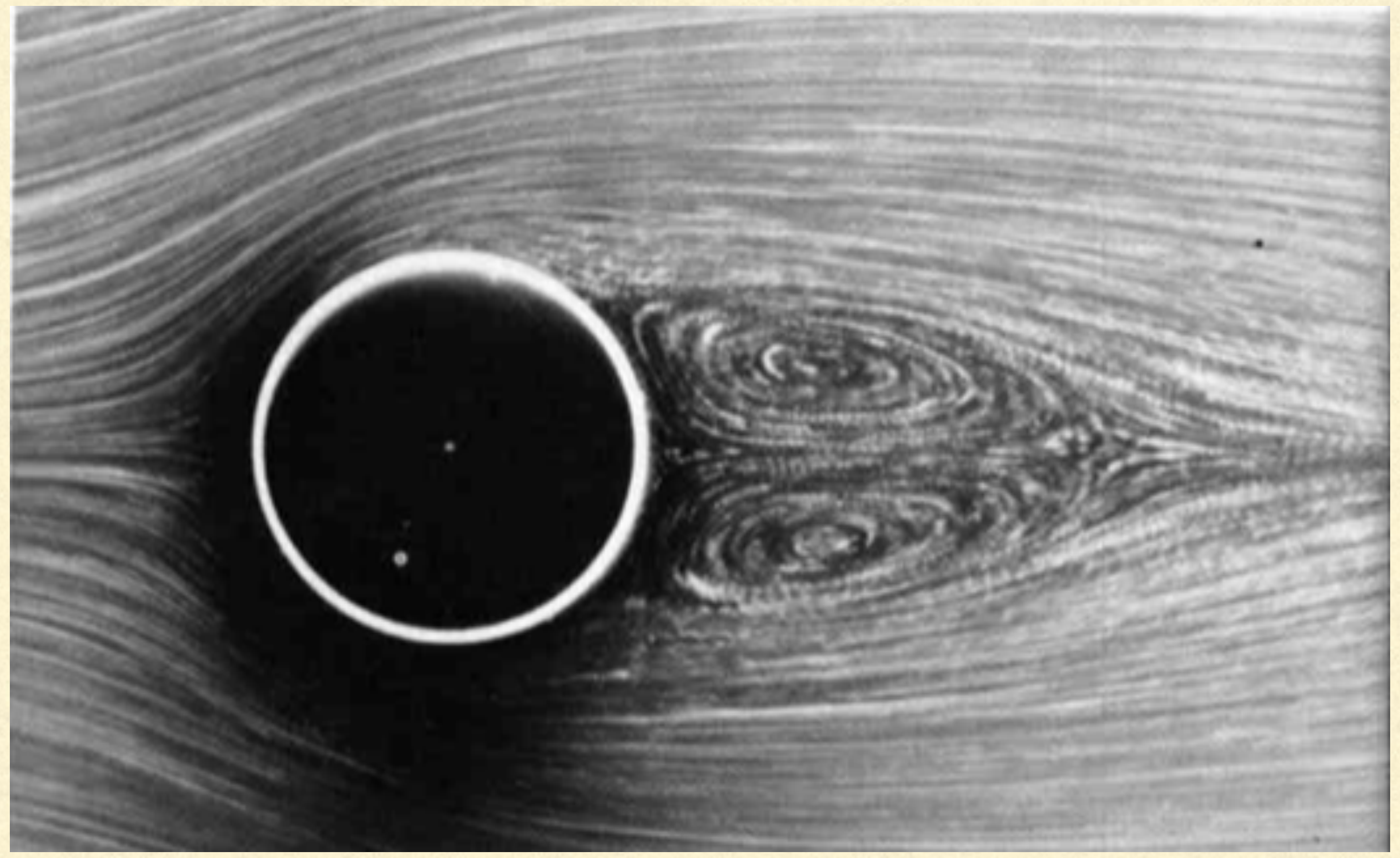
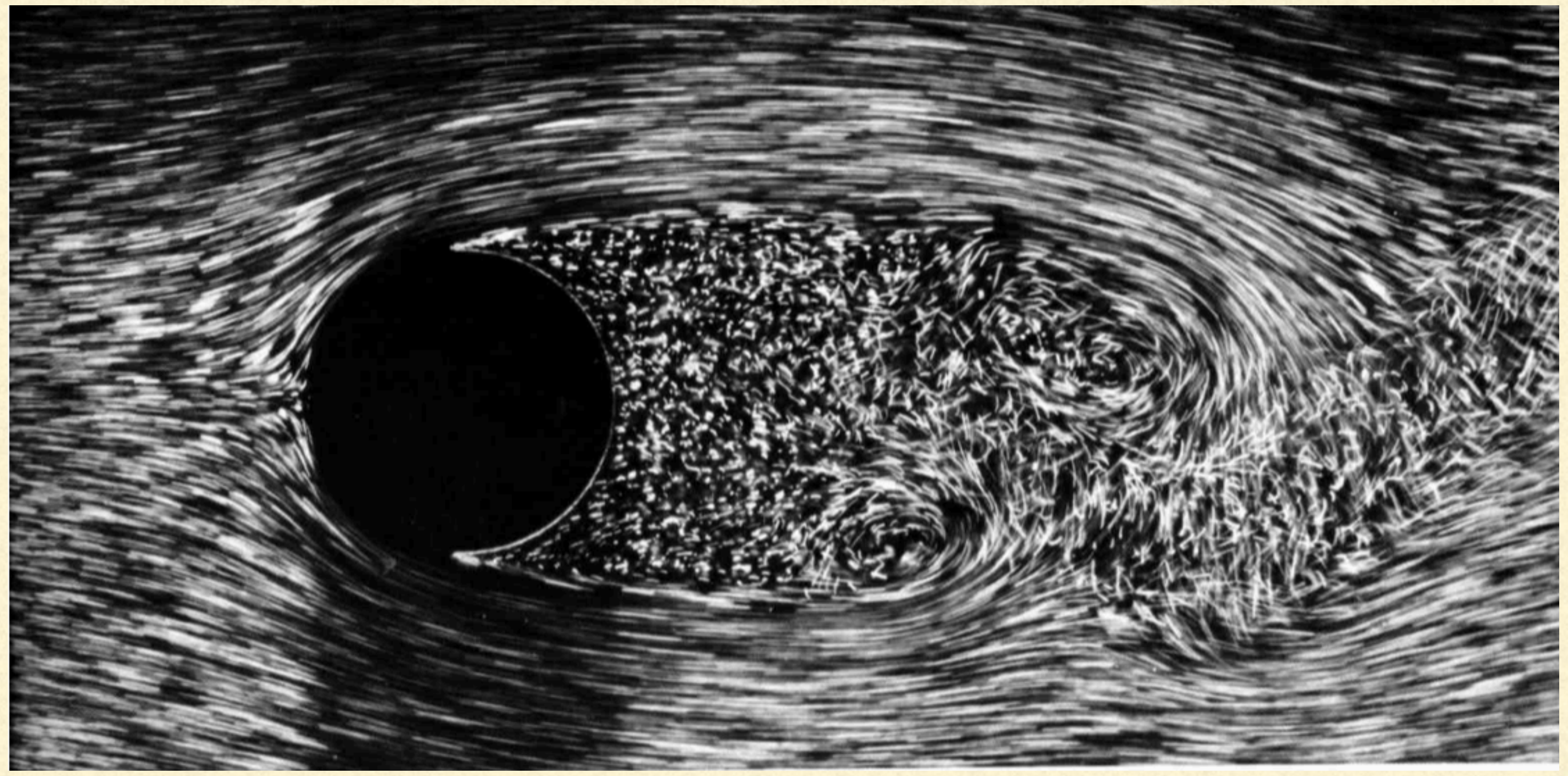
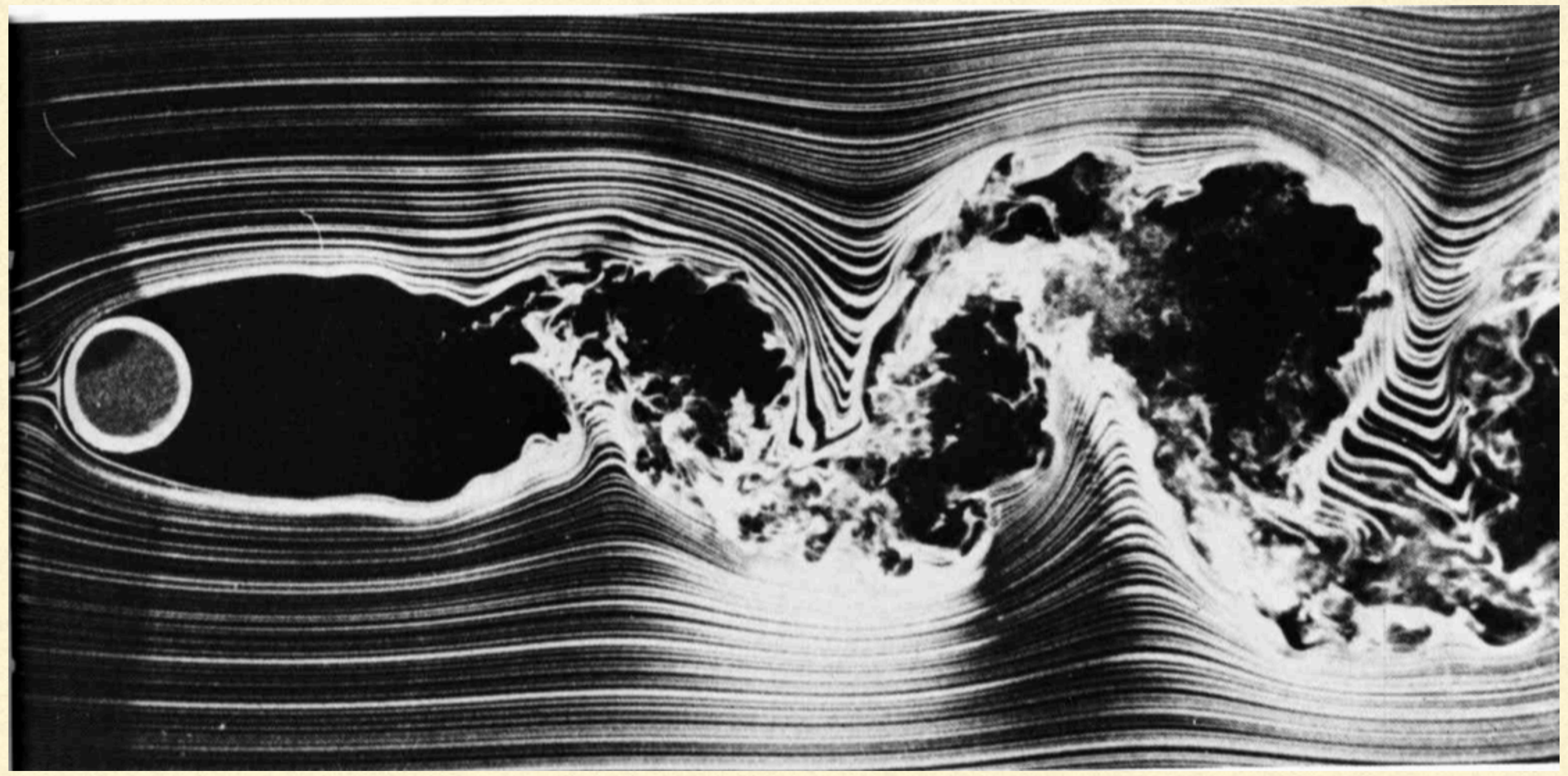
čo hovorí experiment o obtekaní telies

- základný experimentálny fakt: prúdenie tekutiny okolo telesa závisí od jeho rýchlosti a pri značne odlišných rýchlostiach môže byť kvalitatívne úplne iné

- veľmi názorné príklady (fotografie reálnych prúdení) sa dajú nájsť v knihe Milton van Dyke: An album of fluid motion

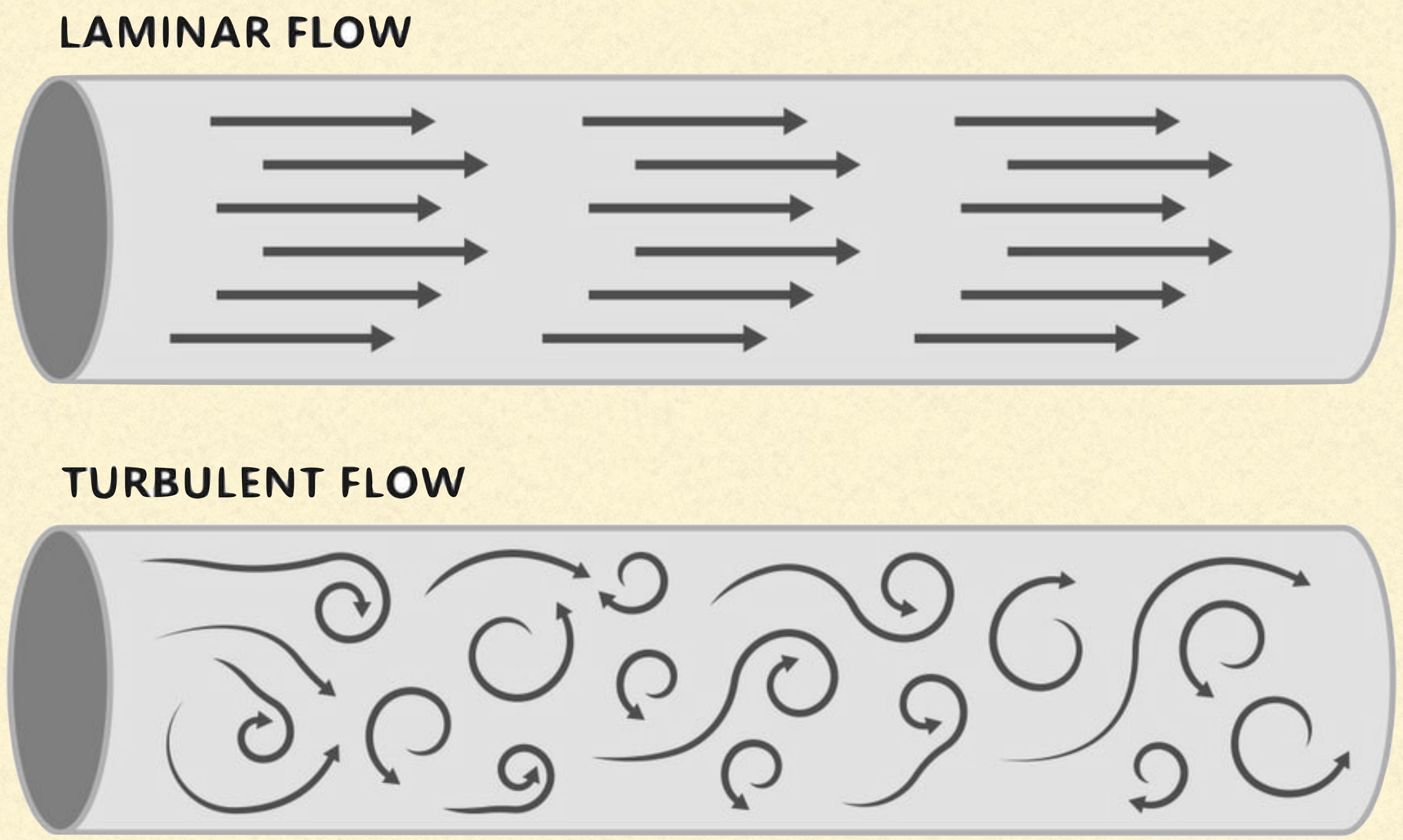
krátka vsuvka: Reynoldsovo číslo

obtekanie valca

turbulencia

- užitočný citát (Horace Lamb, 1932)
  I am an old man now, and when I die and go to heaven there are two matters on which I hope for enlightenment. One is quantum electrodynamics, and the other is the turbulent motion of fluids. And about the former I am rather optimistic.



Prandtlova hypotéza hraničnej vrstvy

čo s rovnicou, ktorú nevieme riešiť

jedna možnosť – približné riešenie

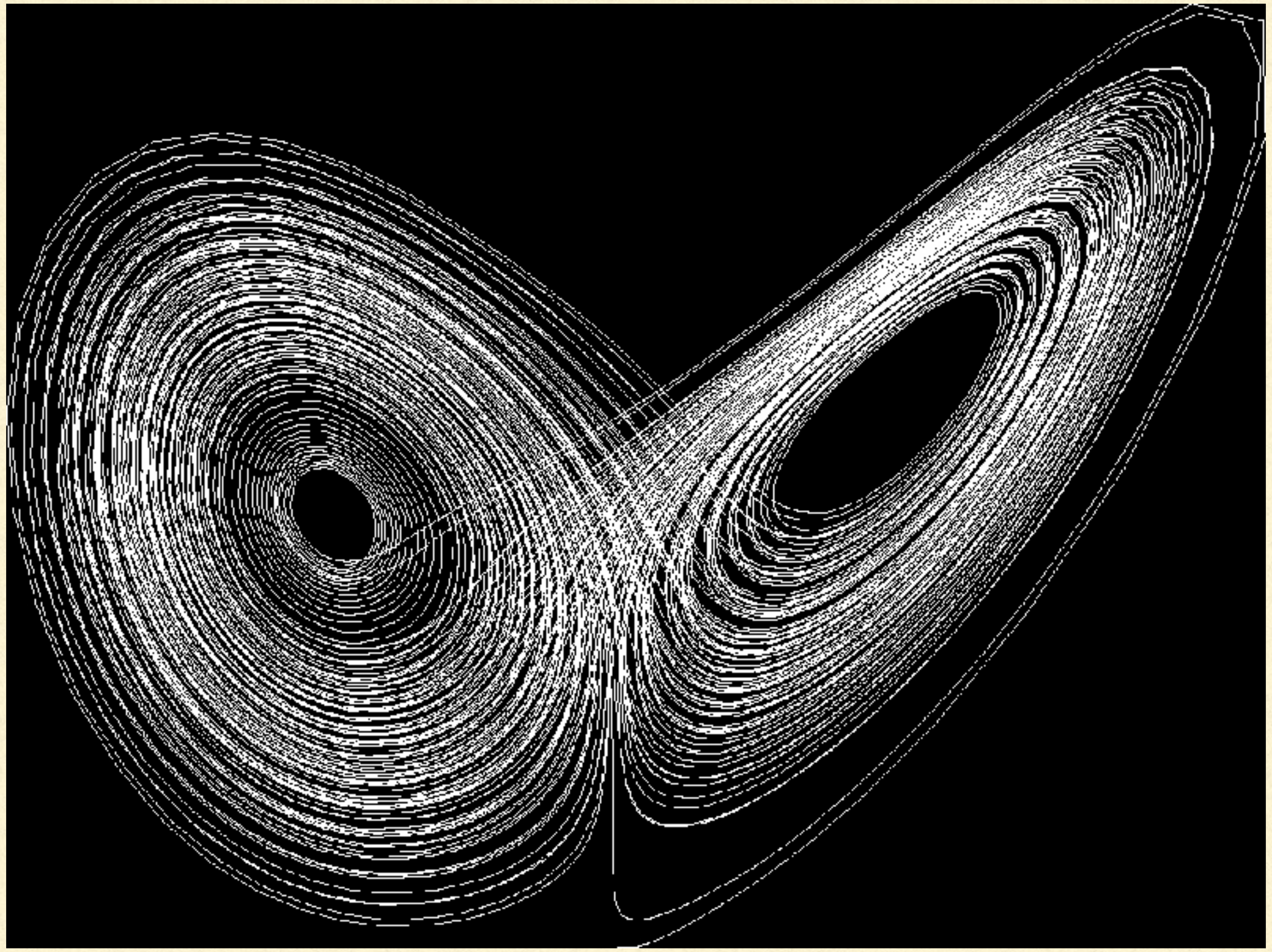
- najčastejšie numerické (sofistikované verzie našej primitívnej metódy krok za krokom)
- typický príklad: predpovedanie počasia
- rieši sa N-S rovnica pre stlačiteľnú tekutinu plus ďalšie rovnice (pre teplotu, vlhkosť, …)
- typické hodnoty krokov: časový 10 min
  priestorový horizontálny 50 km
  priestorový vertikálny 1 km

druhá možnosť – zjednodušenie rovnice

- už samotná N-S rovnica pre <u>nestlačiteľnú</u> tekutinu je netriviálnym zjednodušením
- ďalšie zjednodušenia dostaneme použitím rovnice v špeciálnych prípadoch, v ktorých sú niektoré členy v nej zanedbateľné
- typické príklady: zanedbanie viskozity, zanedbanie stlačenia stlačiteľnej tekutiny, uvažovanie stacionárneho pohybu tekutiny (t.j. takého, ktoré sa nemení v čase), a pod.

poznámka o Lorenzovom atraktore

- ukážka toho, že numerické riešenie značne zjednodušených rovníc môže viesť k úplne fundamentálnym objavom
- Edward Lorenz, 1963: numerické riešenie zjednodušených meteorologických rovníc
- takto objavil takzvaný dynamický chaos (efekt motýlích krídiel) a podivný atraktor (množinu bodov "priťahujúcich riešenia", ktorá je zároveň fraktálom, t.j. množinou s neceločíselným počtom rozmerov)



toto nie je ten motýľ, toto je ten atraktor

in the previous episode

- na minulej prednáške sme si zo zákona sily odvodili Navier-Stokesovu rovnicu

$$\rho(\vec{r},t)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overrightarrow{v}(\vec{r},t)\cdot\nabla\right)\overrightarrow{v}(\vec{r},t)=\rho(\vec{r},t)\overrightarrow{g}-\nabla p(\vec{r},t)+\eta\Delta\overrightarrow{v}(\vec{r},t)+\eta'\nabla\left(\nabla\cdot\overrightarrow{v}(\vec{r},t)\right)$$

konvektívna derivácia

hustota gravitačnej sily

hustota tlakovej sily

hustota viskóznej sily

- povedali sme si o nej, že je príliš ťažká na to, aby ju ktokoľvek na svete vedel vyrieši

základné zjednodušenia hydrodynamiky

$$\rho(\vec{r},t)\left(\cancel{\frac{\partial}{\partial t}} + \overrightarrow{v}(\vec{r},t)\cdot\nabla\right)\overrightarrow{v}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\overrightarrow{g} - \nabla p(\vec{r},t) + \cancel{\eta\nabla^2\overrightarrow{v}(\vec{r},t)} + \cancel{\eta'\nabla\left(\nabla\cdot\overrightarrow{v}(\vec{r},t)\right)}$$

- nestlačiteľná tekutina (v troch rozmeroch znie podmienka nestlačiteľnosti $\nabla\cdot\overrightarrow{v} = 0$)
- zanedbateľná viskozita (tzv. ideálna kvapalina, ale oveľa výstižnejší je von Neumannov názov suchá voda, ktorý upozorňuje na to, že často ide o nerealistické priblíženie)
- stacionárne prúdenie (pole rýchlostí sa nemení v čase)

základné zjednodušenia hydrodynamiky

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial}{\partial t}} + \overrightarrow{v}(\vec{r},t)\,.\,\nabla\right)\overrightarrow{v}(\vec{r},t) = \rho\,\overrightarrow{g} - \nabla p(\vec{r},t) + \cancel{\eta\Delta\overrightarrow{v}(\vec{r},t)}$$

- zanedbateľná viskozita (tzv. ideálna kvapalina, ale oveľa výstižnejší je von Neumannov názov suchá voda, ktorý upozorňuje na to, že často ide o nerealistické priblíženie)
- potenciálové prúdenie (pole rýchlostí je konzervatívne v tom zmysle, ako sme to mali definované pre silové polia, cez nezávislosť konkrétneho integrálu od spojnice bodov) za tohto predpokladu sa zjednoduší člen $(\overrightarrow{v}\cdot\nabla)\overrightarrow{v}$
- stacionárne prúdenie (pole rýchlostí sa nemení v čase)

Bernoulliho rovnica

- nestlačiteľnosť (samotný N-S)
- neviskóznosť (Euler)
- stacionárnosť $\overrightarrow{v}(\vec{r},t)\,.\,\nabla\overrightarrow{v}(\vec{r},t) = \overrightarrow{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p(\vec{r},t)$
- stacionárnosť v 1D $\rho v\,.\,\partial_x v = \partial_x p$ $\quad \partial_x(\frac{1}{2}\rho v^2 + p) = 0$