

LESK A BIEDA HYDRODYNAMIKY

Bernoulliho rovnica

mechanika 41

je hydrodynamika ľahká alebo t'ážká?

Bernoulliho rovnica

- toto je jediná hydrodynamická rovnica, ktorá sa učí v rámci stredoškolskej fyziky
- je to jednoduchá rovnica, ktorá dokáže ľahko vysvetliť niektoré dôležité a pritom úplne prekvapujúce javy
- načo sú nám teda nejaké ďalšie rovnice hydrodynamiky, ktoré sú povestné svojou komplikovanosťou a ktoré skoro nikdy nevieme presne vyriešiť?

Eulerova a Navier-Stokesova rovnica

- sú všeobecné hydrodynamické rovnice, o jednej bola reč na minulej prednáške o druhej bude reč na budúcej prednáške
 - sú to (najmä tá Navier-Stokesova) extrémne ťažké rovnice a okrem niekoľkých vcelku jednoduchých prípadov ich vôbec nevieme presne riešiť
 - načo sú nám tieto zložité rovnice?
-

Bernoulliho rovnica

- nie je pohybovou rovnicou pre prúdiacu tekutinu (t.j. nie je to náhrada Eulerovej rovnice) je to vlastne zákon zachovania mechanickej energie v špeciálnom type prúdenia
 - konkrétne ide o stacionárne prúdenie ideálnej kvapaliny resp. tekutiny (tá stacionárnosť znamená, že pole rýchlostí v Eulerovom opise nezávisí od času tá ideálnosť znamená, že viskozita je nulová - inak sa mech. energia nezachováva)
 - tekutina sa navyše nesmie stláčať (často sa preto hovorí, že Bernoulliho rovnica platí len pre nestlačiteľné tekutiny, ale toto tvrdenie je výrazným spôsobom nesprávne)
 - z uvedeného je jasné, že Bernoulliho rovnica platí len v dosť špecifických situáciách
-

odvodenie Bernoulliho rovnice v 1D

- kinetická energia daného kúska tekutiny:

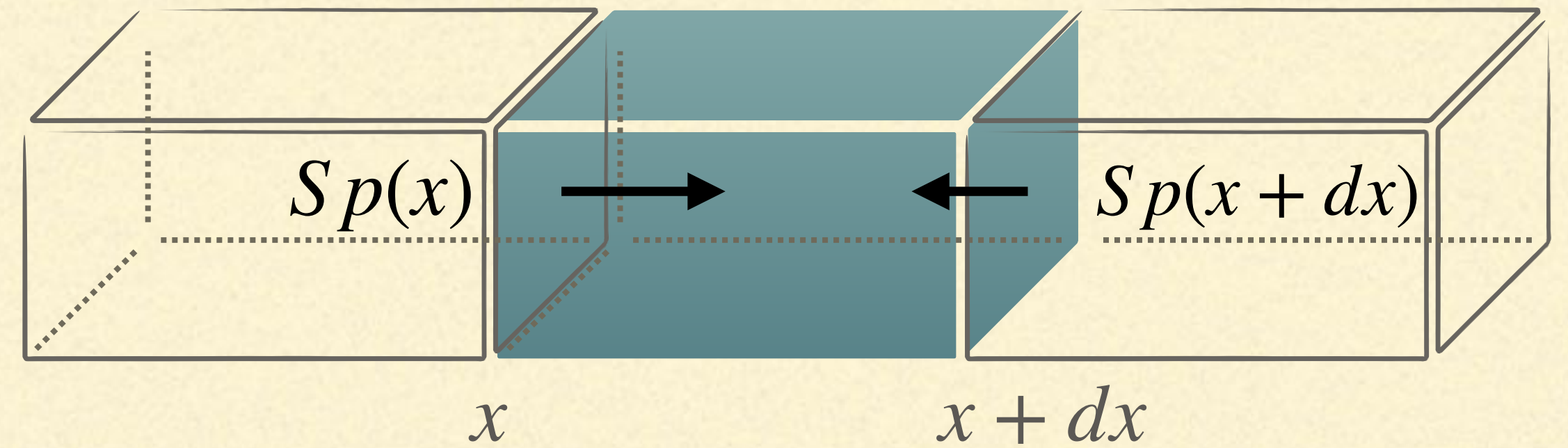
$$E_k = \frac{1}{2} \rho S dx v^2(x)$$

- keď sa tento kúsok presunie a stane sa z neho susedný kúsok, prírastok E_k bude

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \rho S dx \Delta v^2(x)$$

- tento prírastok je rovný práci tlakových síl $\Delta E_k = F \cdot dx$, pričom celková tlaková sila pôsobiaca na náš kúsok je daná rozdielom tlakov zľava a zprava $F = -S \Delta p(x)$, čiže

$$\Delta E_k = -S dx \Delta p(x)$$



- po vydelení objemom kúska dostávame

$$\Delta \left(\frac{1}{2} \rho v^2(x) + p(x) \right) = 0$$

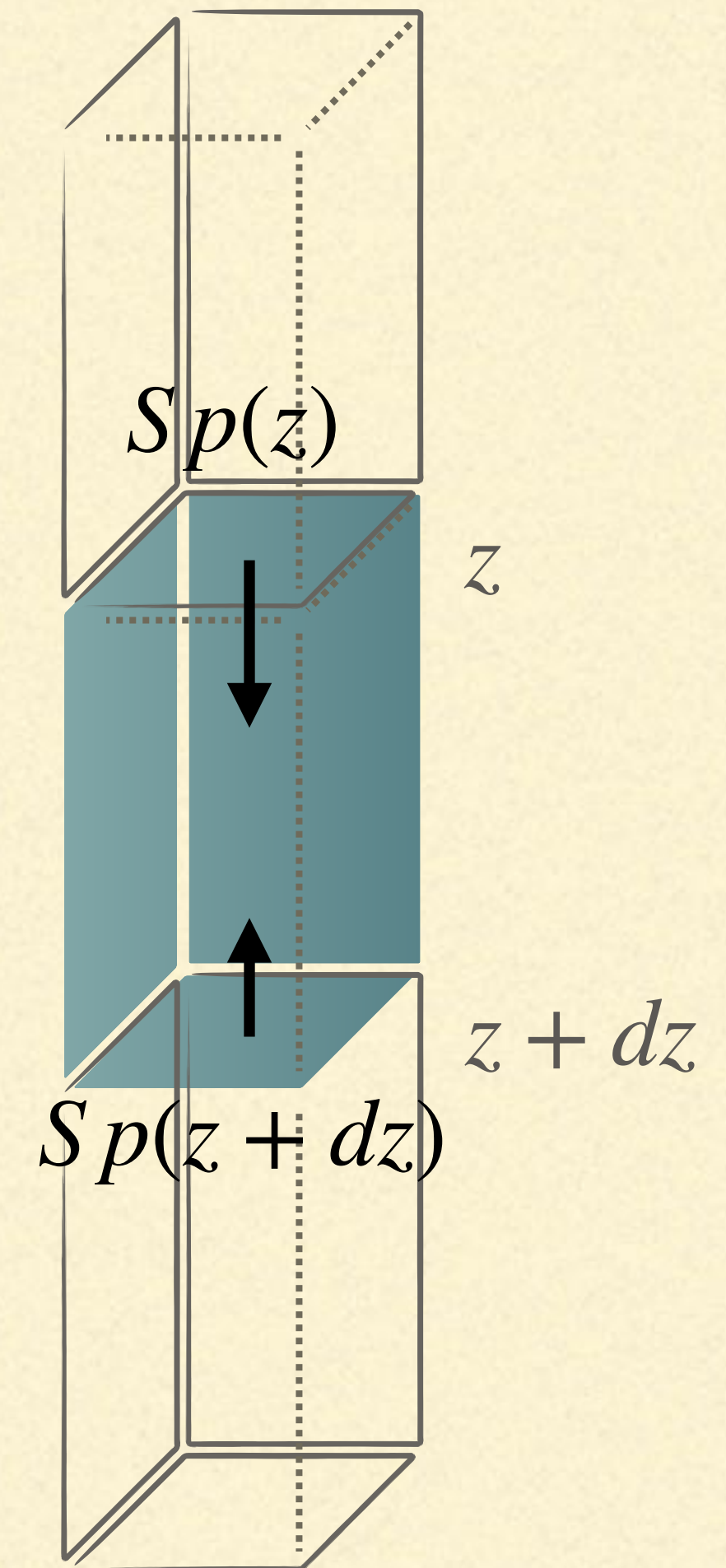
- ak je zmena nejakej veci nulová, vec samotná je konštantná

$$\frac{1}{2} \rho v^2(x) + p(x) = \text{const}$$

pridanie potenciálnej energie

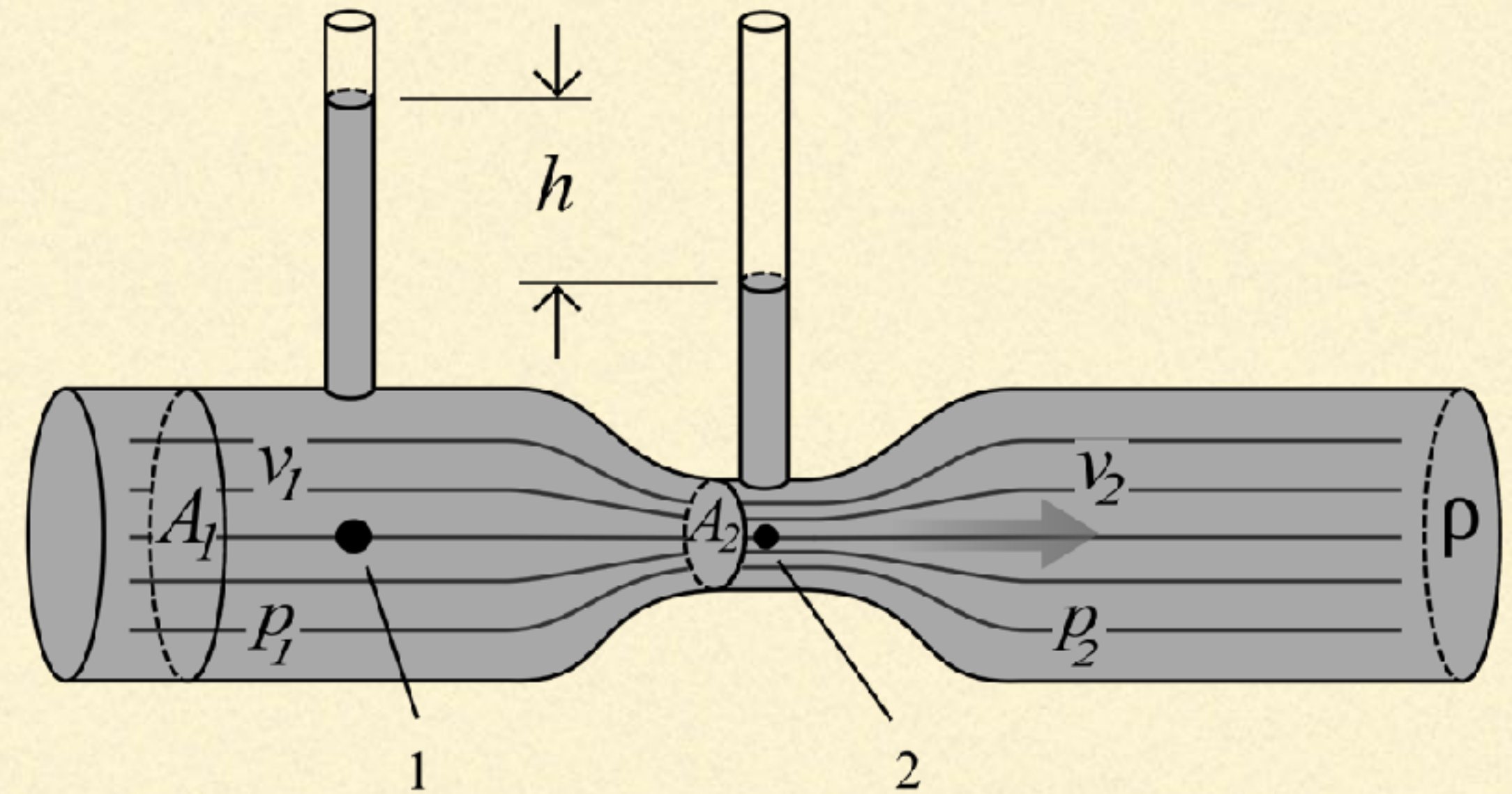
- ak sú v hre aj konzervatívne objemové sily (napr. gravitačná), potom zmena kinetickej energie bude rovná práci všetkých síl, čiže tlakových aj objemových
- práca konzervatívnych síl bude rovná rozdielu potenciálnych energií (so záporným znamienkom - prečo?)
- potenciálna energia v hom. gravitačnom poli je $E_p = m g h$ čiže
$$E_p(z) = \rho S dz g z$$
- zo zmeny kinetickej energie $\Delta E_k = - S dz \Delta p(x) - \rho S dz g z$ máme

$$\frac{1}{2} \rho v^2(z) + p(z) + \rho g z = \text{const}$$



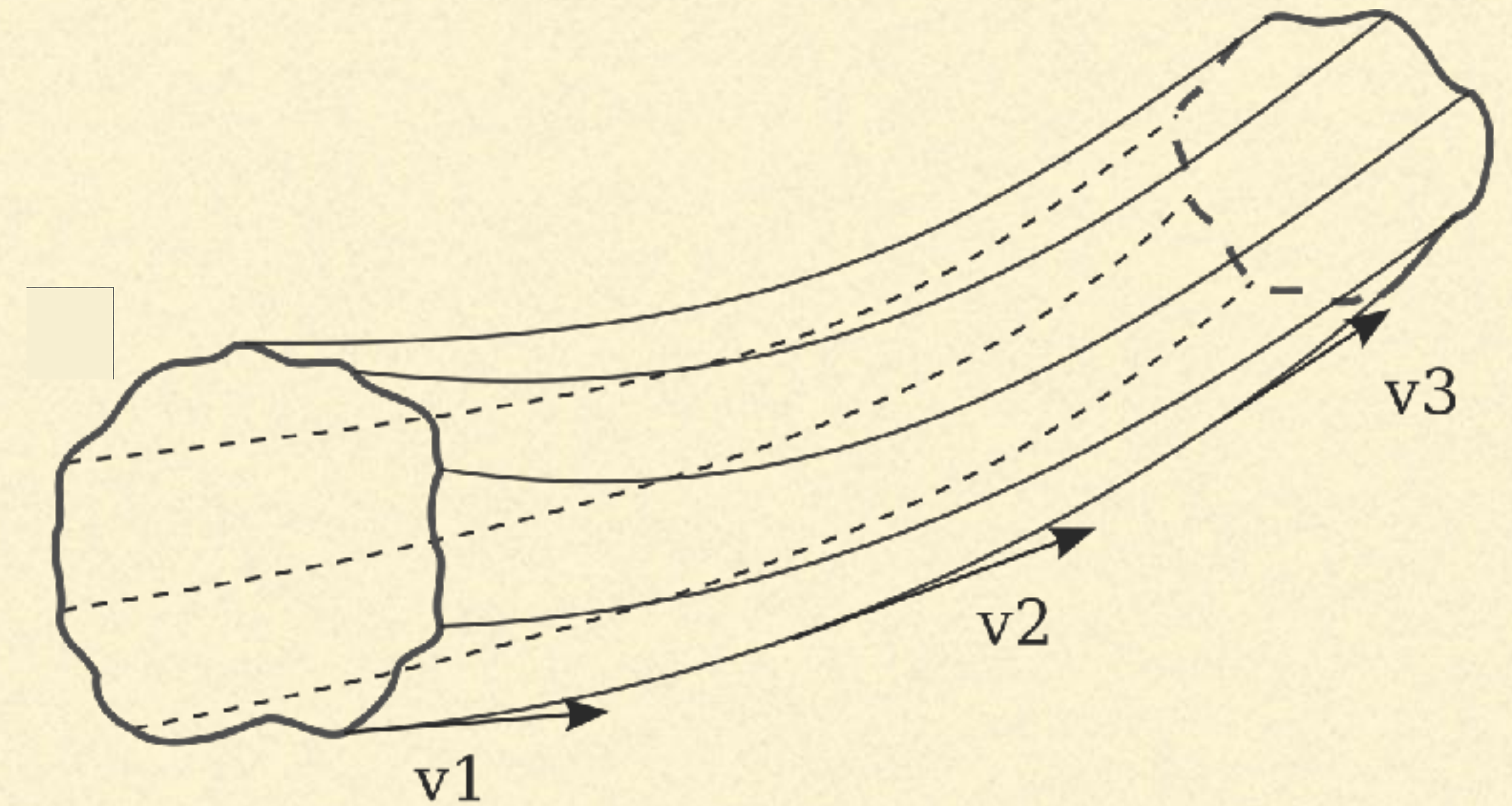
notoricky známa aplikácia

- pre nestlačiteľnú kvapalinu platí $S_1 v_1 = S_2 v_2$ (na obrázku sú plochy označované A , nie S) čiže v užšom mieste tečie tekutina rýchlejšie
- z Bernoulliho rovnice pritom vyplýva, že tlak je v mieste z vyššou rýchlosťou nižší
- a Pascalov zákon hovorí, že tlak je v danom mieste vo všetkých smeroch rovnaký
- celkove dostávame kvantitatívne správny opis pomerne prekvapujúceho javu



Bernoulliho rovnica v 3D

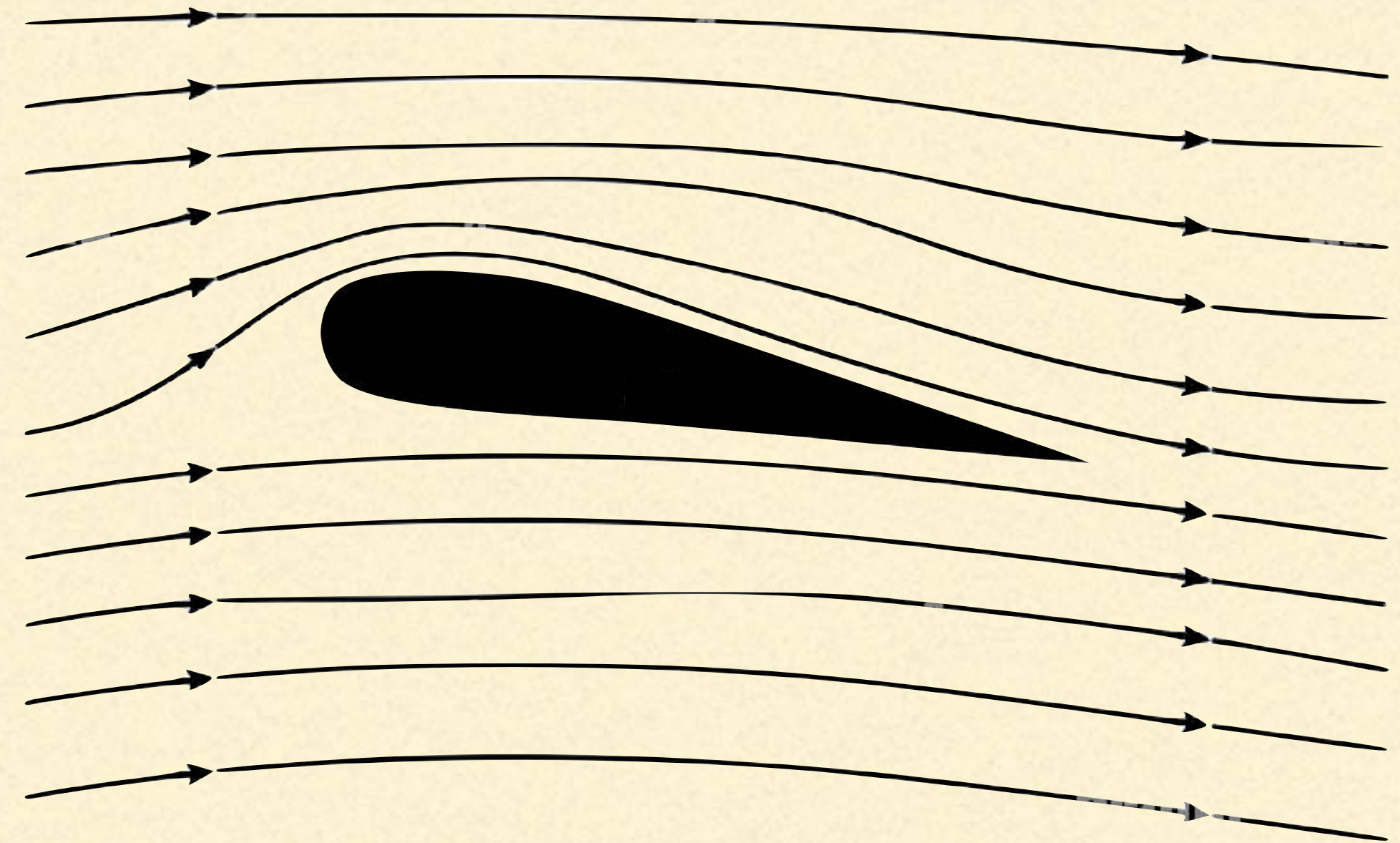
- v poli rýchlostí môžeme definovať čiary (tzv. prúdové), ktorých dotyčnice v každom bode majú smer daný poľom rýchlostí
- ak teraz vezmeme v tekutine nejakú uzavretú krivku, vytvorí prúdové čiary prechádzajúce touto krivkou tzv. prúdovú trubicu
- v úzkej trubici máme prakticky jednorozmerné prúdenie (aj keď pozdĺž krivky, ktorá nemusí byť rovná) a pre toto prúdenie môžeme použiť rovnaké argumenty, aké sme použili v 1D



takto dostaneme v troch rozmeroch Bernoulliho rovnicu, ktorá platí pre jednotlivé prúdové trubice

killer application

- “vysvetlenie” úplne neintuitívneho faktu, že krídla dokážu udržať lietadlá vo vzduchu (a ani nimi pritom netreba mávať)
- v hornej časti musí prejsť vzduch väčšiu vzdialenosť (kvôli profilu krídla), čiže tam má väčšiu rýchlosť a v jej dôsledku nižší tlak (lebo Bernoulliho rovnica)
- pri veľkých rýchlostiach vie byť rozdiel tlakov až taký výrazný, že vykompenzuje tiaž celého lietadla



takto jednoducho sme “vysvetlili”
taký zdanlivo nepochopiteľný jav

a teraz to celé rozbijeme

- o našom vysvetlení fungovania krídla lietadla pomocou Bernoulliho rovnice treba vedieť v prvom rade toto: je to nesprávne vysvetlenie (aj keď je tak trochu správne)
 - presnejšia formulácia: toto vysvetlenie je úplný cintorín zakopaných psov (práve preto je Bernoulliho rovnica dobrým ilustračným príkladom lesku a biedy rôznych priblížení v rámci hydrodynamiky, ktorá je bez tých priblížení príliš ťažká)
 - ďalší postup: voči inkriminovanému vysvetleniu fungovania krídla lietadla vyslovíme najprv niekoľko stupňujúcich sa výhrad, ktoré vcelku bez problémov zvládne, potom ho konfrontujeme so skutočným výpočtom, ktorý veľmi jasne demonštruje, že nielen Bernoulliho, ale ani Eulerova rovnica nie v prípade krídla dostatočne dobrou fyzikou
-

námietky a ich zamietnutia

námietka

- pod a nad krídlom sú rôzne prúdové trubice s odlišnými konštantami v Bernoulliho rovnici (tá konštanta môže byť pre každú trubicu iná, nemôžeme používať všade tú istú konštantu)
- prúdenie nie je stacionárne (pohybujúce sa krídlo mení rýchlosť vzduchu vo svojom okolí)
- vzduch nie je nestlačiteľná tekutina

zamieta sa

- všetky prúdové trubice majú v dostatočnej vzdialenosti od krídla rovnaké rýchlosti aj tlaky, takže tá konštanta je v tomto prípade predsa len pre všetky trubice rovnaká
 - prúdenie je stacionárne ak ho uvažujeme vo vzťažnej sústave spojenjej s lietadlom
 - na platnosť vysvetlenia nie je v skutočnosti potrebná nestlačiteľnosť, ale nestlačenosť, a vzduch tu nemusí byť výrazne stláčaný
-

krátka vsuvka: Machovo číslo

- ako spoznať, či je pri danom prúdení stlačiteľná tekutina stlačená, alebo nie?
 - stlačiteľnosť tekutiny je jej kľúčovou vlastnosťou v akustike (ak sa v tekutine šíri zvuk, tak sa určite stláča a zrieduje)
 - kvantitatívne kritérium toho, či k tomuto stláčaniu a zriedovaniu dochádza, je pomer typickej rýchlosti prúdenia tekutiny a rýchlosti zvuku v tejto tekutine (intuitívne to znie rozumne, poriadnejšie argumentácii sa tu venovať nebudeme)
 - Machovo číslo: $Ma = \frac{v}{c}$ pre $Ma \ll 1$ považujeme tekutinu za "nestlačiteľnú" (v definícii Ma je v typická rýchlosť tekutiny a c je rýchlosť zvuku v tejto tekutine)
-

vážnejšia námietka

námietka

- celá argumentácia je založená na predpoklade, že časti tekutiny, ktoré sa pri začiatku krídla od seba oddelia, sa pri jeho konci opäť stretnú
- z tohto (a z ničoho iného) vyplýva tvrdenie, že "horný kúsok" musí ísť rýchlejšie ako "dolný" (aby stihol dlhšiu vzdialenosť za rovnaký čas)
- lenže tento predpoklad nijako nevyplýva ani z Bernoulliho rovnice, ani z jej odvodenia, ani zo vzťahu $S v = \text{const}$

pripúšťa sa

- predpoklad o rôznych rýchlostiach vzduchu tesne pod a tesne nad krídlom je pre celé vysvetlenie kľúčový a naozaj je to nezávislý predpoklad, uvedený zatiaľ bez dôkazov
 - vysvetlenie pomocou Bernoulliho rovnice preto nemožno považovať za uspokojivé, kým obhajoba jasne nedokáže oprávnenosť tohto predpokladu
 - ale ten predpoklad často nebýva splnený
-

Bernoulli by dával aj onakvejšie krídla

- ak by to vysvetlenie bolo v poriadku, t.j. ak by tekutina obtekala krídlo tak, že jej pôvodne susedné časti idúce dvomi rôznymi cestami (pod krídlom a nad krídlom) by sa za krídlom znovu stretli, potom čím väčší by bol rozdiel medzi dĺžkami týchto ciest, tým väčší by bol rozdiel rýchlostí, a teda aj tlakov (Bernoulli), a tým väčšia by bola vztlaková sila

- to by ale znamenalo, že bežný profil krídla lietadla



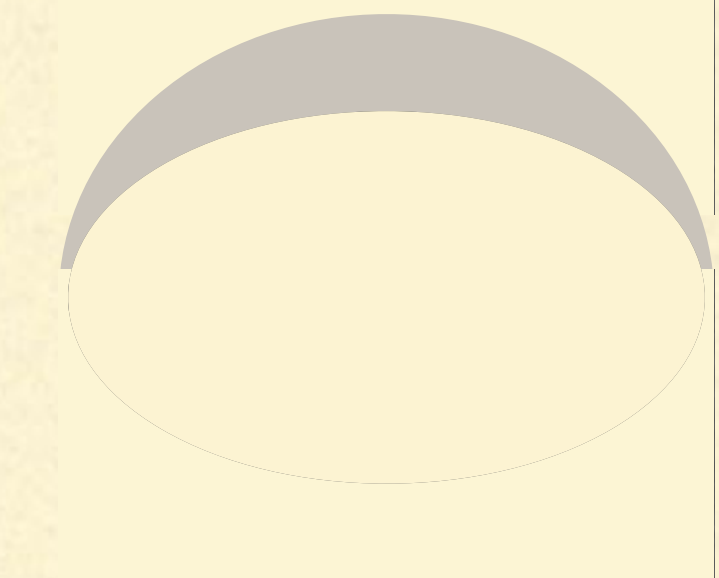
nie je ideálny

- z hľadiska vztlakovej sily by totiž takáto podivnosť



bola oveľa lepšia

- prečo sa teda nepoužívajú takéto profily krídiel? lebo z experimentu vieme, že nefungujú lepšie (Nemci skúšali počas prvej svetovej vojny aj krídla typu "mačací chrbát", ktoré by mali tiež fungovať)



skúšobný pilot lietadla s takým typom krídiel v liste Einsteinovi: "letelo to ako tehotná kačka"

prečo písal pilot Einsteinovi?

- pretože krídla s profilom mačací chrbát skúšalo nemecké letectvo základe 2-stranového článku Alberta Einsteina z roku 1916 (to už mal hotovú všeobecnú teóriu relativity)
- v tom článku používa Einstein práve Bernoulliho rovnicu a okrem nej nejaké kvalitatívne úvahy
- mravné ponaučenie: hydrodynamika sa dá robiť aj viac-menej intuitívne, ale v takom prípade sa dá celkom ľahko dospieť k všelijakým záverom, ktoré sa v experimente jednoducho nepotvrdia (intuícia nebýva v hydrodynamike dobrý radca)

DIE NATURWISSENSCHAFTEN

Herausgegeben von
Dr. Arnold Berliner und Prof. Dr. August Pütter

Vierter Jahrgang.

25. August 1916.

Heft 34.

Elementare Theorie der Wasserwellen und des Fluges.

Von A. Einstein, Berlin-Wilmersdorf.

Worauf beruht die Tragfähigkeit der Flügel unserer Flugmaschinen und der im Gleitflug durch die Luft dahingleitenden Vögel? Über diese Frage herrscht vielfach Unklarheit; ja ich muß sogar gestehen, daß ich ihrer einfachsten Beantwortung auch in der Fachliteratur nirgends begegnet bin. Ich hoffe daher, manchem Leser ein Vergnügen zu machen, indem ich mit der nachfolgenden kleinen Betrachtung aus der Theorie der Flüssigkeitsbewegungen diesem Mangel abzuhelpen suche.

Durch eine nach rechts hin (Fig. 1) sich verengende Röhre ströme in der Pfeilrichtung eine inkompressible Flüssigkeit, deren innere Reibung wir vernachlässigen. Wir fragen nach der Druckverteilung in der Röhre. Da durch jeden Querschnitt pro Zeiteinheit dieselbe Flüssigkeitsmenge hindurchströmen muß, so wird die Strömungsgeschwindigkeit q an den Stellen größten Querschnitts am kleinsten, an den Stellen kleinsten Querschnitts am größten sein. Die Geschwindig-

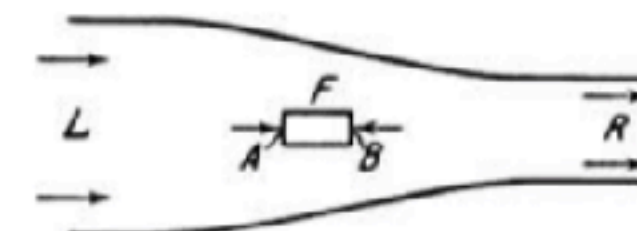


Fig. 1.

gekehrt. Quantitativ ist dieser Satz für inkompressible Flüssigkeiten bekanntlich durch die Gleichung

$$p = \text{konst} - \frac{1}{2} \rho q^2$$

ausgedrückt, wobei ρ die Dichte der Flüssigkeit bedeutet.

Wir betrachten zunächst einige allgemein bekannte Beispiele zu diesem Satz. Ausfluß einer unter Druck stehenden Flüssigkeit aus einem Gefäße (Torricelli). Bei J (Fig. 2) ist der Druck größer, die Geschwindigkeit dagegen kleiner als bei A , derart, daß

$$p + \frac{1}{2} \rho q^2$$

während des Ausströmens konstant ist.

Als zweites Beispiel diene der Flüssigkeits-Zerstäuber (Fig. 3). Der durch J zugeführte Luftstrom erweitert sich nach seinem Austritt in die freie Luft nach allen Seiten unter Abnahme seiner Geschwindigkeit. Bei P herrscht deshalb ein geringerer Druck als bei G , also auch ein ge-

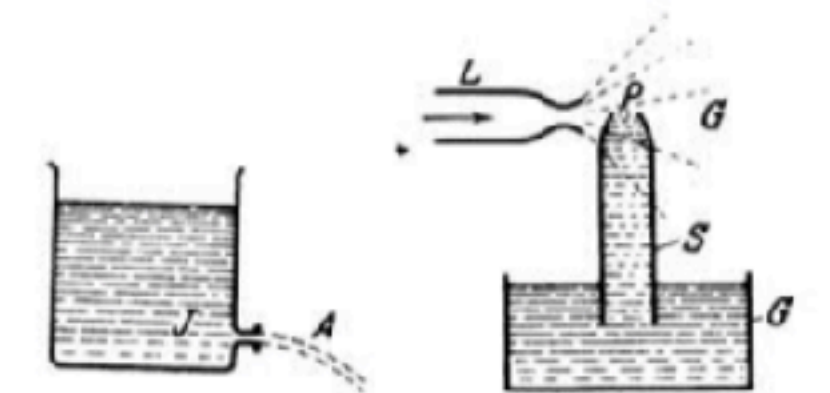


Fig. 2.

Fig. 3.

Bernoulli nestačí

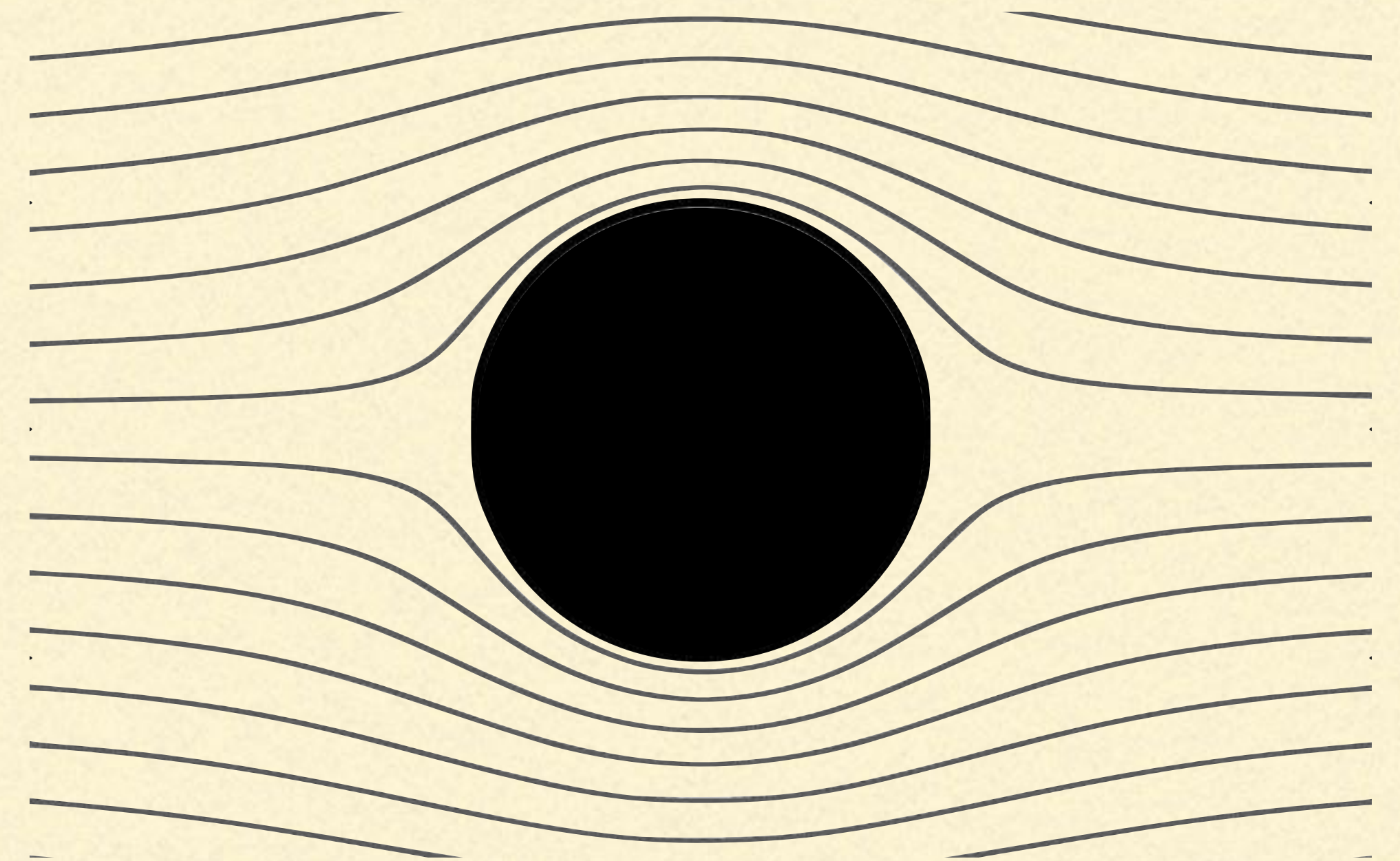
- vysvetlenie fungovania leteckého krídla pomocou Bernoulliho rovnice je okrem tejto rovnice založené aj na nezdôvodnenom predpoklade o rýchlostiach tekutiny
 - tento predpoklad vedie v mnohých prípadoch k záverom odporujúcim experimentu
 - ak teda chceme porozumieť krídlu, nemali by sme o týchto rýchlostiach radšej nič predpokladať, ale mali by sme ich vypočítať (na to slúžia tie zložitejšie rovnice)
 - inými slovami, na pochopenie fungovanie krídla nestačí zákon zachovania energie (Bernoulli), treba vyriešiť pohybovú rovnicu tekutiny (Euler resp. Navier-Stokes)
-

Eulerova rovnica v 2D a 3D

- ak chceme použiť Bernoulliho rovnicu pre výpočet vztlakovej sily pôsobiacej na obtekané teleso, najprv potrebujeme najst' rýchlosti prúdiacej tekutiny, a to sa dá urobiť len cez riešenie Eulerovej (alebo Navier-Stokesovej) rovnice
 - keďže na obtekanie potrebujeme viac rozmerov ako jeden, ako prvú vec potrebujeme najst' zovšeobecnenie Eulerovej rovnice z 1D na 2D či 3D
 - toto zovšeobecnenie je pomerne priamočiare, ale pre nás nie je nevyhnutné (keďže rovnicu aj tak nebudeme riešiť), takže si ho tu nejdeme ani uvádzať
 - všetko ďalej budú teda len informácie na úrovni klebiet (aj keď dôležitých)
-

d'Alembert a obtekanie kruhu

- v roku 1752 našiel Jean d'Alembert riešenie Eulerovej rovnice pre obtekanie kruhu (v 2D) aj pre obtekanie valca a gule (v 3D)
- toto riešenie je pre prvákov príliš ťažké, takže ho vynecháme, ale v druhom a určite v treťom ročníku by ste ho mali vcelku ľahko zvládnuť
- pre silu pôsobiacu na kruh (resp. valec či guľu) dostal v jednom smere očakávané a v inom smere veľmi neočakávané riešenie (to prvé je príklad lesku a to druhé biedy hydrodynamiky)



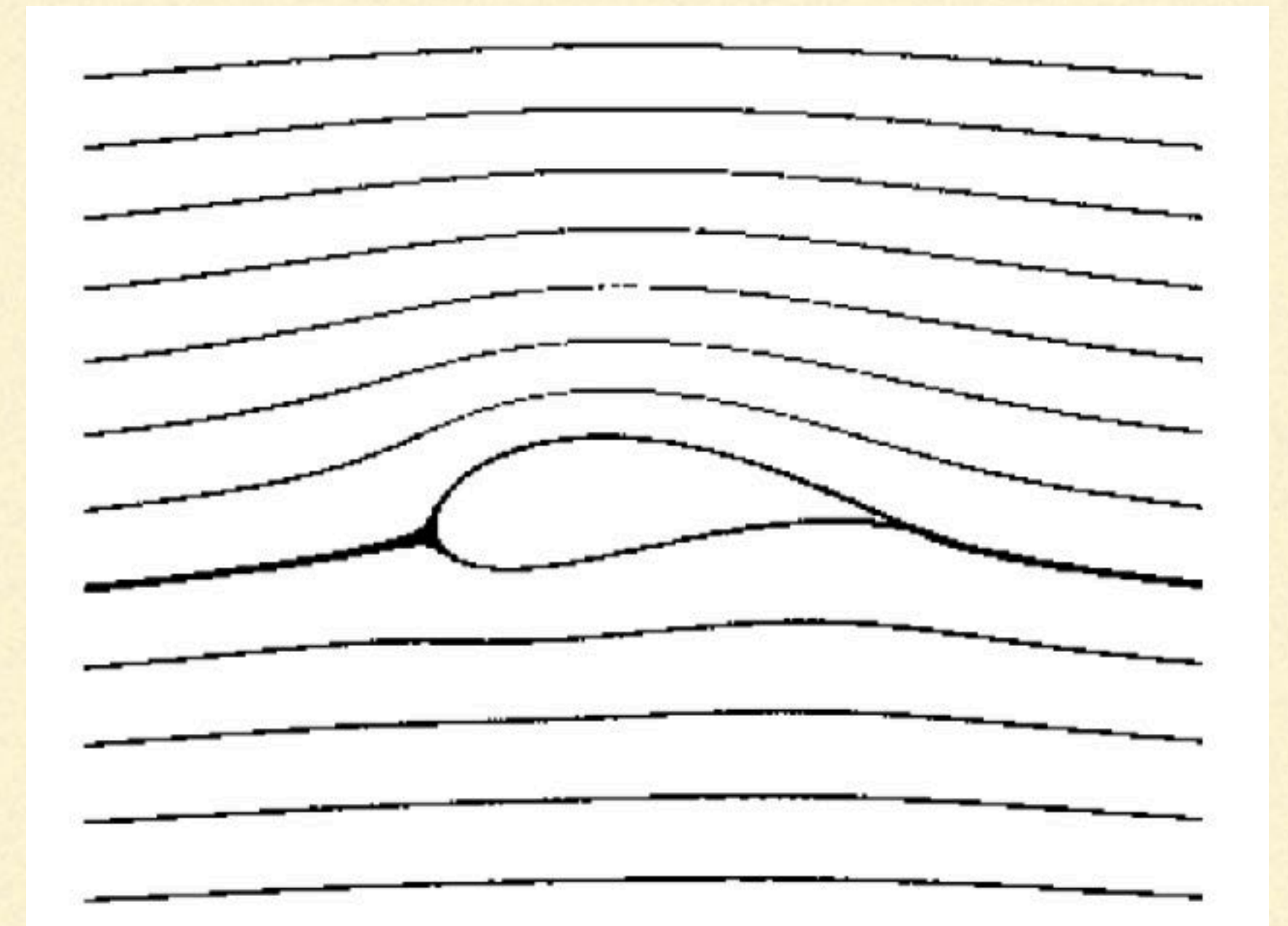
celková sila pôsobiaca na kruh vyšla nulová v smere kolmom na prúd (lesk) a nulová aj v smere prúdu (bieda)

lesk d'Alembertovho riešenia

- nulová sila (v smere kolmom na prúd) pri obtekaní kruhu, valca či gule je očakávateľný výsledok (zo symetrie je jasné, že nič iné vyjsť nemohlo, lebo v dôsledku symetrie musí byť prúdenie nad telesom rovnaké ako pod ním)
 - zaujímavé preto nie je ani tak samotné toto riešenie, zaujímavé sú iné riešenia, ktoré sa z neho dajú dostať vtipnými trikmi (tie triky sú pre prvý ročník príliš zložité, ale základná informácia o nich je pomerne jednoduchá a dosť zaujímavá)
 - tieto triky však fungujú len v dvoch rozmeroch, preto si teraz povieme niečo málo o hydrodynamike v rovine (v 3D hydrodynamike sa tieto triky, žiaľ, nedajú použiť)
-

krídlo v 2D

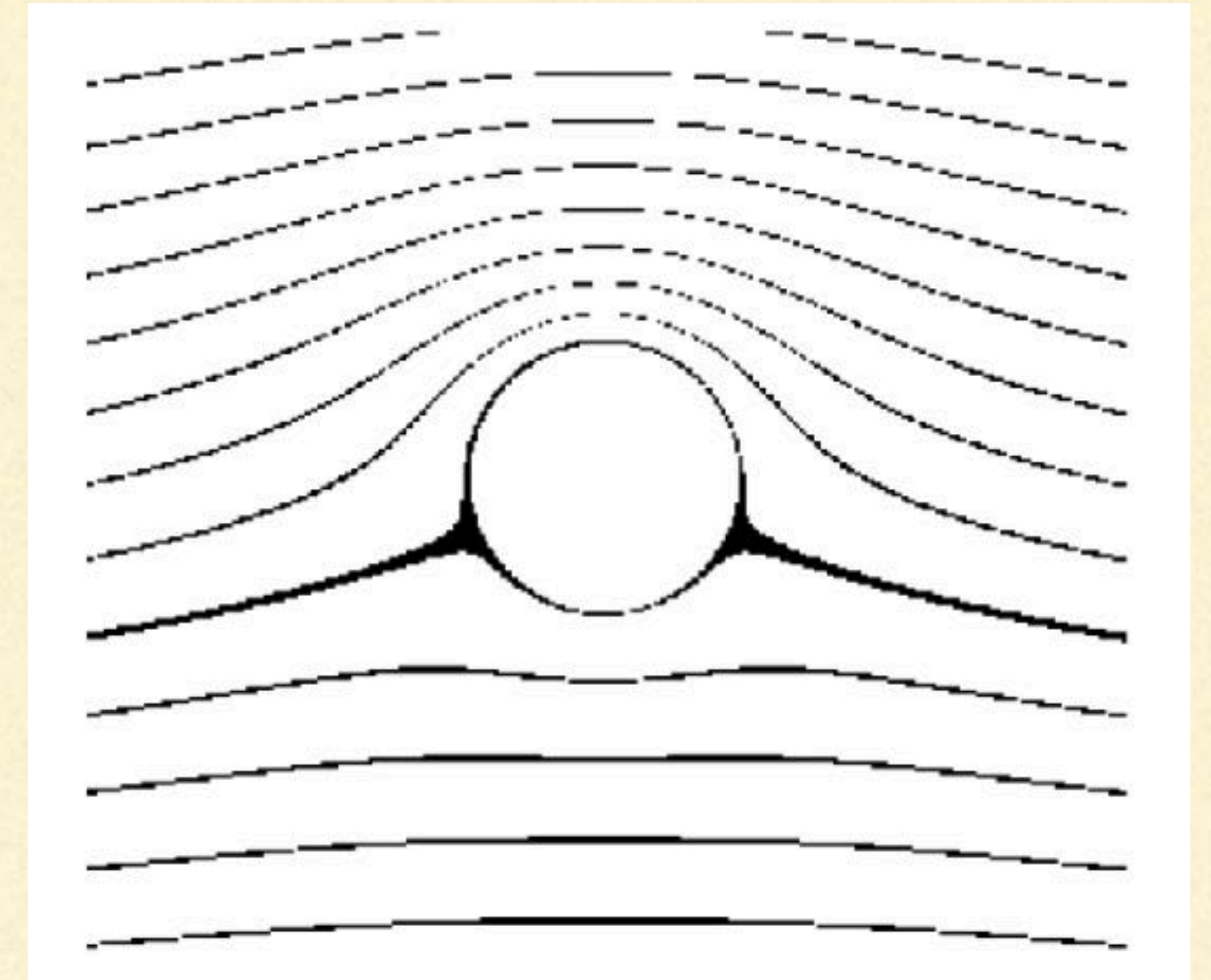
- hydrodynamika v rovine sa prekvapujúco zjednoduší, ak tú rovinu chápeme ako rovinu komplexných čísiel
- zázrak: pre niektoré typy prúdení v rovine prejde nelineárna Eulerova rovnica na takzvanú Laplaceovu rovnicu, ktorá je lineárna (čiže oveľa jednoduchšia)
- známe riešenia Laplaceovej rovnice vieme špeciálnymi zobrazovacími (hovorí sa im konformné transformácie) previesť na iné riešenia
- pri týchto zobrazeniach prejde kruh na profil krídla a Bernoulliho rovnica nám dá nenulovú vztlakovú silu



zo známeho riešenia pre rýchlosti pri obtekaní kruhu získame rýchlosti pri obtekaní krídiel určitých profilov

rotujúci kruh v 2D

- istou fintou sa dá k riešeniam Laplaceovej rovnice pridať rotácia celej roviny (a s ňou aj tekutiny), čo umožní vypočítať rýchlosti prúdenia tekutiny okolo rotujúceho kruhu
- keď sa potom z Bernoulliho rovnice vypočíta celková sila pôsobiaca na rotujúci kruh, vychádza nenulová
- takto vieme vypočítať silu, ktorá spôsobuje zatačanie rotujúceho kruhu pri pohybe cez vzduch alebo inú tekutinu (tento jav sa volá Magnusov efekt a v 3D sa prejavuje napr. zatačaním rotujúceho valca či lopty)



v 2D vieme takto
vypočítať silu pôsobiacu
na rotujúce teleso

a čo 3D?

- v 3D nám komplexná rovina a triky v nej už nepomôžu
- ale intuícia získaná v 2D nám môže pomáhať aj v 3D
- intuíciu by sme totiž mali v hydrodynamike opierať (ak sa dá) o presné výpočty
- 2D výpočty nám napríklad umožňujú intuitívne chápať Magnusov jav v športe



bieda d'Alembertovho riešenia

- o lesku d'Alembertovho riešenia Eulerovej rovnice pre obtekanie kruhu, valca či gule sme si už niečo povedali, teraz si povieme niečo o biede tohto riešenia
 - ak spočítame celkovú silu pôsobiacu na teleso, dostaneme nulu (presne nulu)
 - v smere kolmom na prúd tekutiny je to očakávaný výsledok (kvôli symetrii úlohy)
 - v smere prúdu je to úplne neočakávaný výsledok, hovorí sa mu d'Alembertov paradox (v skutočnosti to nie je paradox, je to však prudký nesúlad teórie s experimentom)
 - nevyhnutný záver: Eulerova rovnica nie je spoľahlivým opisom prúdenia tekutiny !!! (napriek niektorým svojim nepopierateľným úspechom najmä pri výpočtoch v 2D)
-

Euler is dead

- zdá sa, že v hydrodynamike je Eulerova rovnica (a spolu s ňou aj Bernoulliho rovnica) nie veľmi dôveryhodná vec, ktorá síce niekedy dáva dobré výsledky, ale nie je celkom jasné kedy a prečo
- takzvanú ideálnu kvapalinu, pre ktorú platí Eulerova rovnica, volajú fyzici suchá voda, aby zdôraznili, že ide o nerealistické priblíženie (vymyslel v. Neumann a spropagoval Feynman)
- zdá sa, že ak chceme opisovať reálne tekutiny, musíme do opisu zahrnúť viskozitu



niekoľko poznámok na záver

- pridať viskozitu do Eulerovej rovnice bude veľmi ľahké (ako ukážeme nabudúce)
 - výsledna rovnica je extrémne ťažká (ako si povieme nabudúce)
 - a ani táto ťažká rovnica nám neposkytuje vysvetlenie často sa vyskytujúceho a prakticky veľmi dôležitého javu, ktorému sa hovorí turbulencia (nabudúce)
 - presnejšie povedané, možno tá rovnica to vysvetlenie obsahuje, ale zatiaľ nikto nebol schopný to vysvetlenie z tej rovnice vydolovať
 - hydrodynamika je ťažká (a to o tých hlavných ťažkostiach ešte len bude reč)
-