HYDRODYNAMIKA V PLNEJ PARÁDE

Navier-Stokesova rovnica

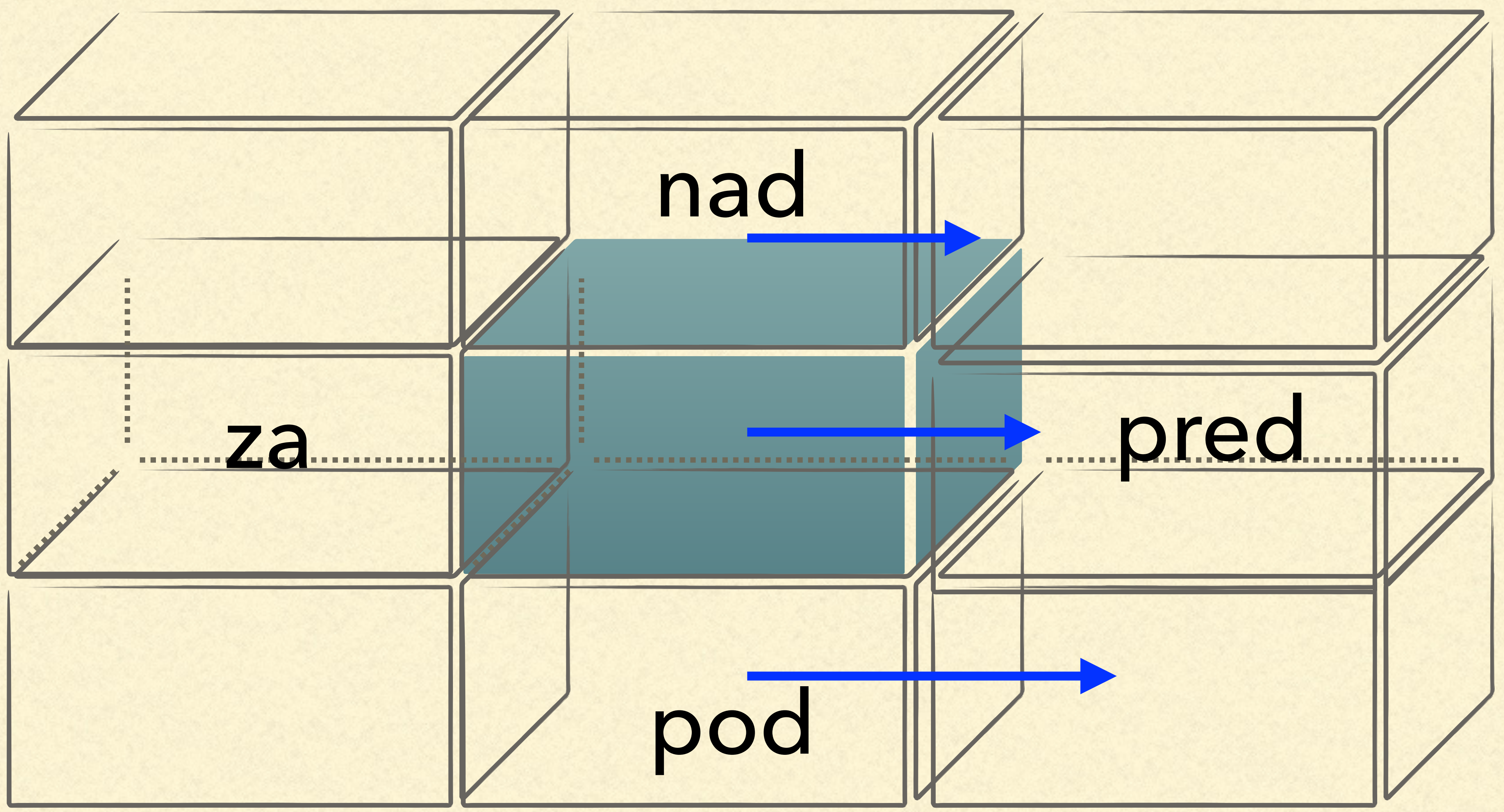
mechanika 43

in the previous episode...

- Eulerova rovnica pre prúdenie tekutín nedokáže vysvetliť niektoré elementárne javy
- najvýraznejším zlyhaním je d'Alembertov výpočet odporu prostredia pre guľu a valec
- nulová výsledná sila odporu prostredia opísaného Eulerovou rovnicou je v príkrom rozpore s experimentom, ktorý dáva pre malé rýchlosti silu úmernú rýchlosti a pre väčšie rýchlosti silu úmernú kvadrátu rýchlosti (toto sme mali v minulom semestri)
- v Eulerovej rovnici niečo zásadné chýba a to niečo je viskozita (tzv. vnútorné trenie)

čo je viskozita?

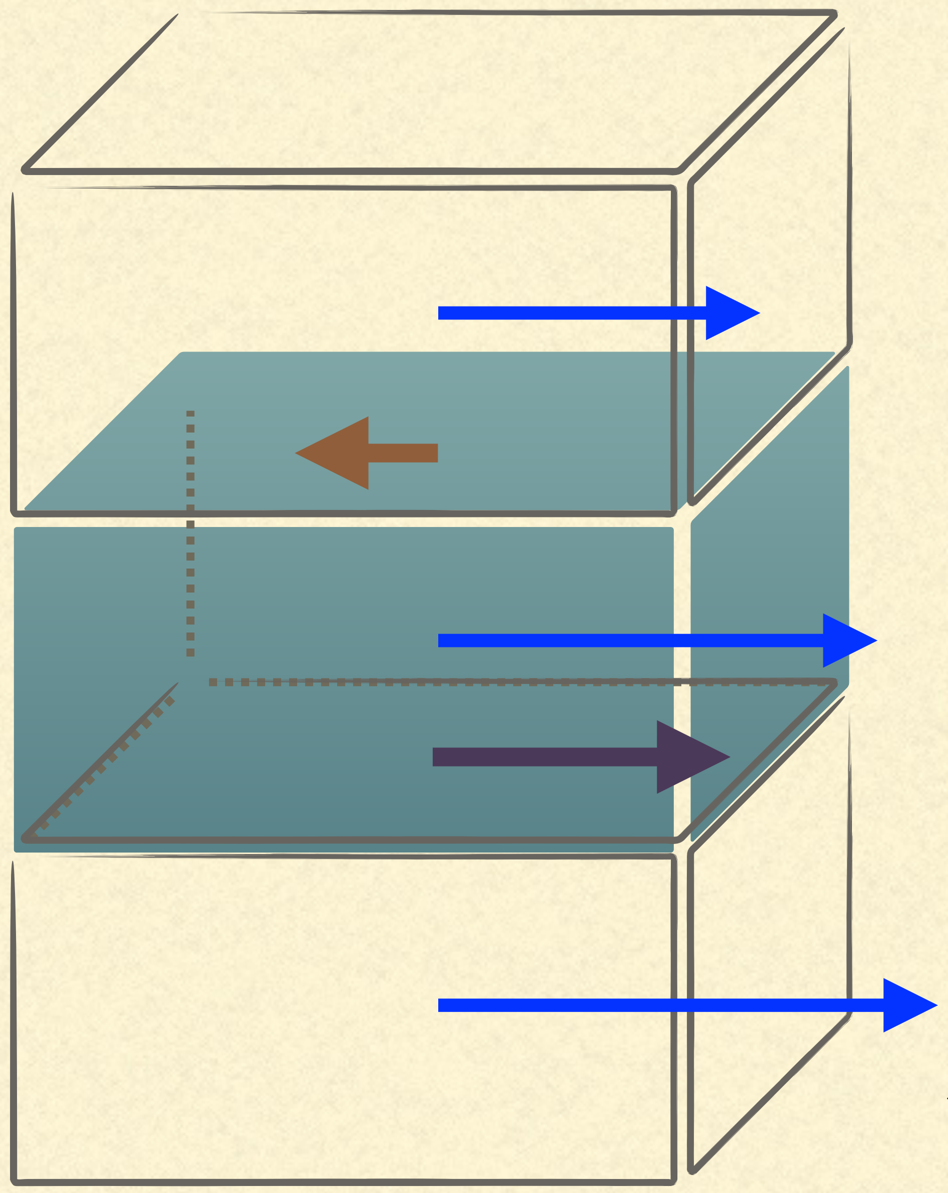
- v Eulerovej rovnici sme brali do úvahy sily, ktorými na kúsok tekutiny pôsobia susedné kúsky, ktoré sú tesne pred ním a za ním (v smere prúdenia tekutiny)
- ale na daný kúsok pôsobia aj iní susedia, ktorí nie sú pred a za, ale vpravo a vľavo, respektíve nad a pod
- práve tomuto pôsobeniu sa hovorí viskozita (alebo vnútorné trenie)



viskozita ako fyzikálna veličina

- ak sa susediace kúsky tekutiny pohybujú rôznymi rýchlosťami, pôsobia na seba silou
- veľkosť tejto sily je pre bežné tekutiny

  $F_x = \eta \, S \, \frac{\Delta v_x}{\Delta z}$ (parameter η sa volá viskozita)
- zdôvodnenie je úplne analogické tomu, ktoré sme použili pri Hookovom zákone
- sila pôsobiaca na daný kúsok je súčtom síl od jednotlivých susedov (v limite $dz \to 0$)



sila zhora

$$F_x(x, y, z, t) = \eta \, S \, \frac{\partial v_x(x, y, z + dz, t)}{\partial z}$$

sila zdola

$$F_x(x, y, z, t) = -\, \eta \, S \, \frac{\partial v_x(x, y, z, t)}{\partial z}$$

sú znamienka správne? prečo?

hustota celkovej sily v smere osi x

od susedov v smere osi z:

$$f_x(x, y, z, t) = \eta \, \frac{\partial^2 v_x(x, y, z, t)}{\partial z^2}$$

prechod do troch rozmerov

- viskozita sa nemá ako prejaviť v jednorozmernom prúdení, čiže musíme prejsť do troch rozmerov (alebo dvoch), čo rovnice mierne (fakt len mierne) skomplikuje
- rovnice v troch rozmeroch budeme písať rovno pre nestlačiteľnú tekutinu (len aby bol ich zápis prehľadnejší, stlačiteľné zovšeobecnenie je jednoduché)
- rovnice nebudeme odvádzať (to necháme na Teoretickú mechaniku) len ich napíšeme, aby sme videli ich štruktúru a vedeli porovnať jednotlivé členy
- práve vzájomná veľkosť jednotlivých členov sa totiž ukáže byť veľmi dôležitá

Eulerova rovnica v 3D

- namiesto derivácie podľa x sa objaví nový symbol symbol ∇ (hovorí sa mu nabla) ktorý predstavuje formálny vektor so zložkami $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

- konvektívna derivácia má v 3D tvar $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$

- Eulerova rovnica v 3D vyzerá takto: $\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\right) \vec{v} = \rho \, \vec{g} - \nabla p$
  kde $\vec{v}$ aj p sú funkciami polohy $\vec{r}$ a času t a ∇p je vektor so zložkami $\left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}\right)$

- 3D Eulerova rovnica je priamočiarym zovšeobecnením 1D Eulerovej rovnice

Navier-Stokesova rovnica

- nie je nič iné ako Eulerova rovnica s pridanou viskozitou
- viskózny člen obsahuje súčet druhých derivácií podľa súradníc x, y, z
- výsledná Navier-Stokesova rovnica vyzerá pre nestlačiteľnú tekutinu takto:

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\right)\vec{v} = \rho\vec{g} - \nabla p + \eta\,\Delta\vec{v}}$$

kde nový trojuholník Δ sa volá laplacián a je definovaný ako $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

čo budeme robiť s N-S rovnicou?

- nič
- ak teda nepovažujeme za niečo rôzne (dôležité a zaujímavé) klebety, napríklad:
- ako Stokes pomocou tejto rovnice vyriešil (aj keď len do istej miery) d'Alembertov paradox
- ako neskorší nacistický hajzel Prandtl vylepšil (aj keď len do istej miery) Stokesove riešenie
- prečo je už len otázka existencie rozumných riešení N-S rovnice problém doslova za milión
- ako vieme pomocou tejto rovnice predpovedať počasie a prečo len to vieme len do istej miery
- že turbulenciu (jeden zo základných hydrodynamických javov) nevieme vysvetliť pomocou N-S

Stokesov výpočet obtekania gule

- sto rokov po d'Alembertovi (v roku 1851) zopakoval jeho výpočet George Stokes, akurát že nie pre Eulerovu rovnicu, ale pre Navier-Stokesovu rovnicu

- výpočet urobil pre stacionárne (nezávislé od času) prúdenie malými rýchlosťami (vtedy sú dva členy rovnice zanedbateľné a rovnica prejde na lineárnu)

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial}{\partial t}} + \cancel{\vec{v}\cdot\nabla}\right)\vec{v} = -\,\nabla p + \eta\,\Delta\vec{v}$$

- lineárnu rovnicu ľahko vyriešil, vyšla mu odporová sila $F = 6\pi r\,\eta\,v$
  kde η je viskozita tekutiny, r je polomer gule a v rýchlosť tekutiny ďaleko od gule (alebo rýchlosť gule v stojacej tekutine, ak sa na celú vec pozeráme v inej sústave)

úľava, ale len čiastočná

- Stokesovo riešenie pre malé rýchlosti je rozhodne úľavou oproti d'Alembertovi
- pre väčšie rýchlosti a malé viskozity sa však viskózny člen v Navier-Stokesovej rovnici stane zanedbateľným v porovnaní s nelineárnym členom

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\right)\vec{v}=-\nabla p+\cancel{\eta\,\Delta\vec{v}}$$

  a sme späť pri Eulerovej rovnici a d'Alembertovom paradoxe

- a čo takto nezanedbávať nijaký člen a vyriešiť komplet Navier-Stokesovu rovnicu?
- nuž, to je bohužiaľ príliš ťažké (nelineárna rovnica) a presné riešenie nevieme nájsť

Navier-Stokes nedáva Eulera všade

- pre praktické aplikácie hydrodynamiky sa ako nesmierne dôležitý ukázal byť nasledujúci postreh: ak je viskozita nenulová, nedá sa zanedbať všade
- dôvod: pri nehybnej stene je rýchlosť tekutiny nulová
(ak by nebola, tak zo vzťahu pre viskóznu silu by sme pri stene dostali nekonečnú silu pôsobiacu na kúsok tekutiny – ako nekonečnú deriváciu nespojitej funkcie)
- blízko pri stene sú teda rýchlosti vždy malé a nelineárny člen sa nedá zanedbať

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \underbrace{\vec{v}\cdot\nabla}_{\text{pri pevnej stene oveľa menšie}}\right)\vec{v} = -\nabla p + \underbrace{\eta\,\Delta\vec{v}}_{\text{malé}}$$

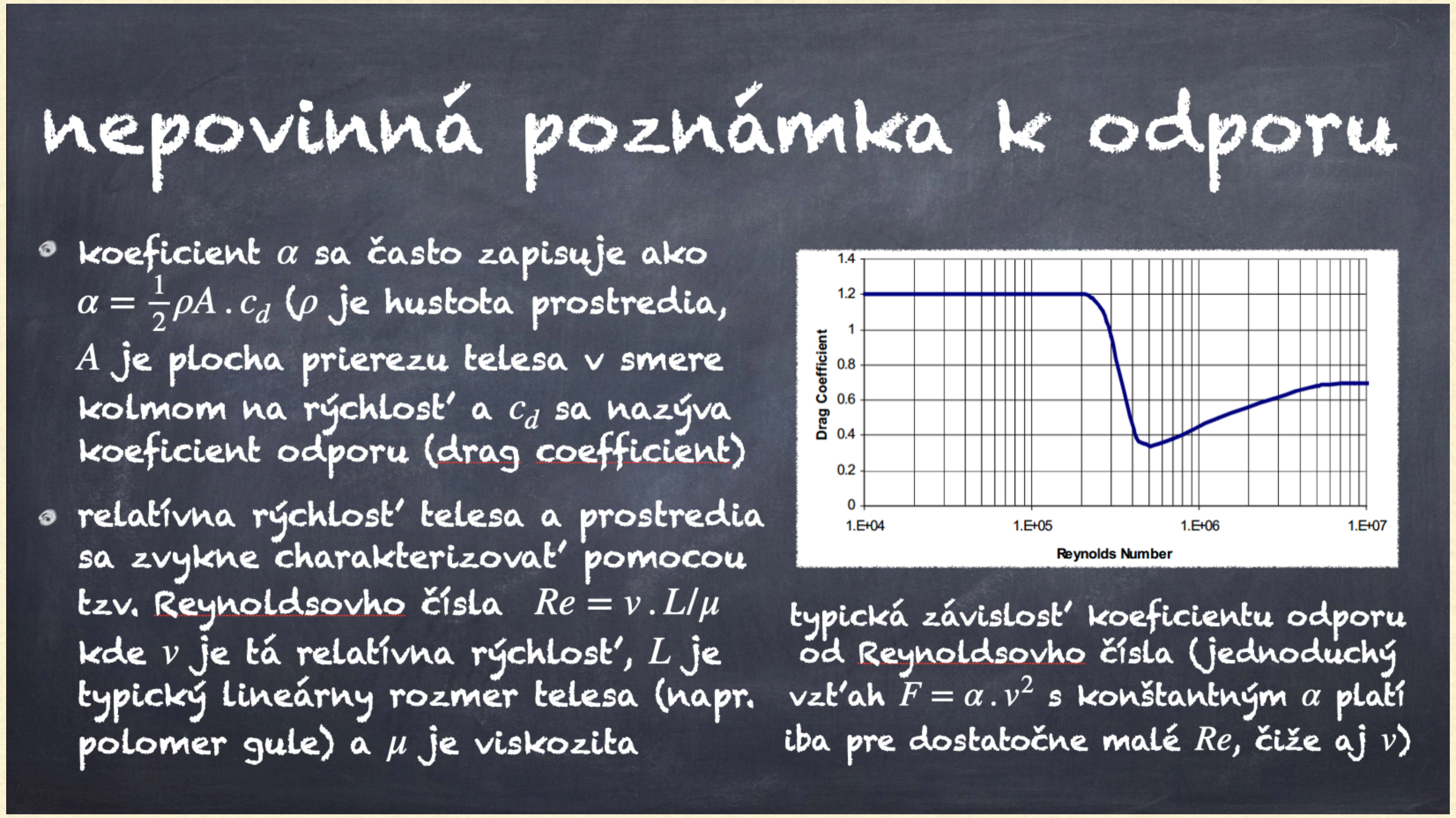
Prandtlova teória hraničnej vrstvy

- pri nízkych viskozitách môžeme používať Eulerovu rovnicu skoro všade, ale nie všade
- v tenkej vrstve pri stene musíme používať celú N-S rovnicu, ale našťastie nie vždy celú
- v roku 1904 Ludwig Prandtl ukázal, že za istých rozumných predpokladov sa dá N-S rovnica v hraničnej vrstve zjednodušiť a riešenia zjednodušenej rovnice sa dajú nájsť
- keď rovnicu vyriešil, vyšlo mu, že sila pôsobiaca na guľu v smere prúdu je úmerná v^2
- ľudia teda konečne chápali vzťahy pre odpor prostredia (pre malé a bežné rýchlosti)

a čo veľké rýchlosti?

- ako sme si povedali, keď sme sa bavili v mechanike o sile odporu prostredia, pre malé rýchlosti je úmerná rýchlosti pre bežné rýchlosti je úmerná druhej mocnine rýchlosti, a pre veľké rýchlosti je závislosť od rýchlosti komplikovaná

- pre veľké rýchlosti by sme potrebovali fakt vyriešiť N-S rovnicu, ktorú nielenže nevieme vyriešiť, ale nevieme ani len dokázať, že má vždy rozumné riešenie



Prandtlova teória vysvetlila prvú (rovnú) časť grafu, zvyšok grafu nevieme z hydrodynamiky presne odvodiť

jeden zo 7 miléniových problémov

- sedem najväčších výziev pre matematiku 21. stor.
- podľa vzoru Hilbertových problémov pre 20. stor.
- za správne vyriešenie každého z týchto siedmich problémov je vypísaná odmena milión dolárov

Millennium Problems

Yang–Mills and Mass Gap

Experiment and computer simulations suggest the existence of a "mass gap" in the solution to the quantum versions of the Yang-Mills equations. But no proof of this property is known.

Riemann Hypothesis

The prime number theorem determines the average distribution of the primes. The Riemann hypothesis tells us about the deviation from the average. Formulated in Riemann's 1859 paper, it asserts that all the 'non-obvious' zeros of the zeta function are complex numbers with real part 1/2.

P vs NP Problem

If it is easy to check that a solution to a problem is correct, is it also easy to solve the problem? This is the essence of the P vs NP question. Typical of the NP problems is that of the Hamiltonian Path Problem: given N cities to visit, how can one do this without visiting a city twice? If you give me a solution, I can easily check that it is correct. But I cannot so easily find a solution.

Navier–Stokes Equation

This is the equation which governs the flow of fluids such as water and air. However, there is no proof for the most basic questions one can ask: do solutions exist, and are they unique? Why ask for a proof? Because a proof gives not only certitude, but also understanding.

čo s rovnicou, ktorú nevieme riešiť?

- štandardná možnosť: približné riešenia (najčastejšie numerické, čiže sofistikované verzie našej pomerne primitívnej, ale veľmi užitočnej metódy “krok za krokom”)
- typický príklad: predpovedanie počasia (numericky sa rieši Navier-Stokesova rovnica pre stlačiteľnú tekutinu plus ďalšie rovnice pre teplotu, vlhkosť, …)
- typické hodnoty krokov: časový 10 min, priestorový horizontálny 50 km a vertikálny 1 km
- odkedy sú k dispozícii počítače, ktoré zvládajú takéto výpočty dostatočne rýchlo, predpovedanie počasia sa enormne zlepšilo (toto platí v horizonte cca desať dní)
- na viac dní počasie predpovedať nevieme (a aj tento fakt je dôsledkom N-S rovnice)

pár slov o dynamickom chaose

- v roku 1963 odvodil Edward Norton Lorenz z N-S rovnice a ďalších rovníc veľmi zjednodušený meteorologický model, ktorý pozostával z troch previazaných obyčajných diferenciálnych rovníc (ktoré zdedili nelinaritu z N-S rovnice)

- numerickým riešením týchto rovníc prišiel na niečo, čo sa považuje za najväčší objav numerickej matematiky: riešenia boli veľmi citlivé na počiatočné podmienky (aj pri málo odlišných počiatočných podmienkach sa po istom čase riešenia rovníc od seba veľmi rýchlo vzďaľovali – tomuto sa hovorí dynamický chaos)

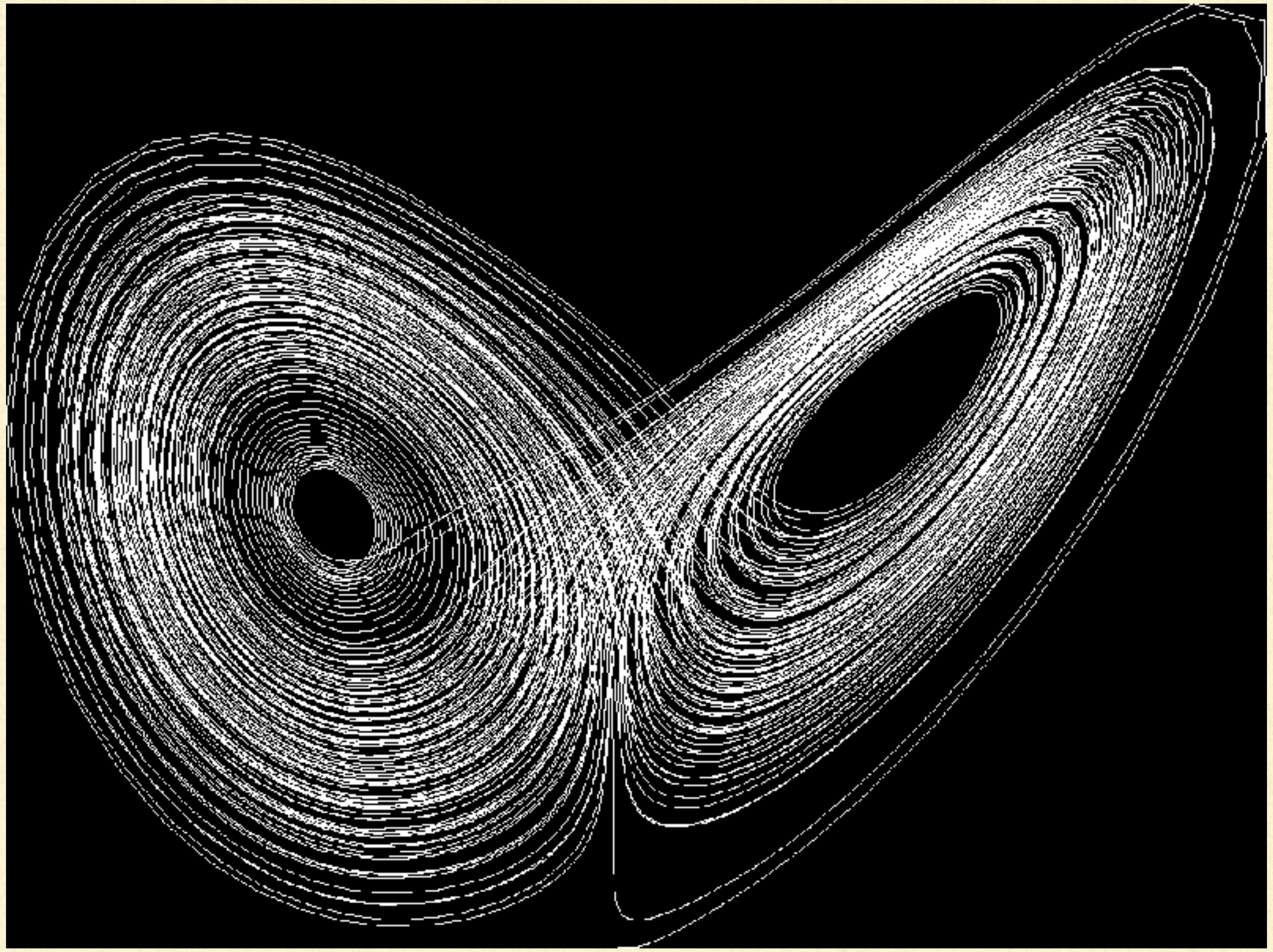
- v takomto systéme sa dá dostatočne ďaleká budúcnosť predpovedať dostatočne presne len v prípade, že extrémne presne poznáme počiatočné podmienky

poznámka o Lorenzovom atraktore

- v meteorológii (t.j. pre pôvodné rovnice vrátane N-S rovnice) sa dynamický chaos zvykne nazývať efekt motýlích krídiel (citát: mávnutie motýlích krídiel v Brazílii môže spôsobiť tornádo v Texase)

- Lorenzov výskum viedol ďalej k objavu podivného atraktora (množiny bodov "priťahujúcich riešenia", ktorá je zároveň fraktálom, t.j. množinou s neceločíselným počtom rozmerov)

- aj takéto veci v sebe skrýva N-S rovnica



toto nie je ten motýľ, toto je ten atraktor

a to ešte nie je všetko

- keďže Navier-Stokesova rovnica má zaslúženú povesť mimoriadne ťažkej rovnice a keďže táto rovnica vznikla z Eulerovej pridaním člena opisujúceho viskozitu, mohlo by sa zdať, že hydrodynamika by mala byť jednoduchšia v limite malých viskozít

- nuž ale nie je to tak, je to presne naopak

- najkomplikovanejší jav celej hydrodynamiky nastáva práve vtedy, keď je člen opisujúci viskozitu malý v porovnaní s inými členmi v Navier-Stokesovej rovnici

- fyzici často hovoria nie o malej viskozite, ale o veľkom Reynoldsovom čísle (to však je len odborná hantýrka, myslia sa tým malé viskozity)

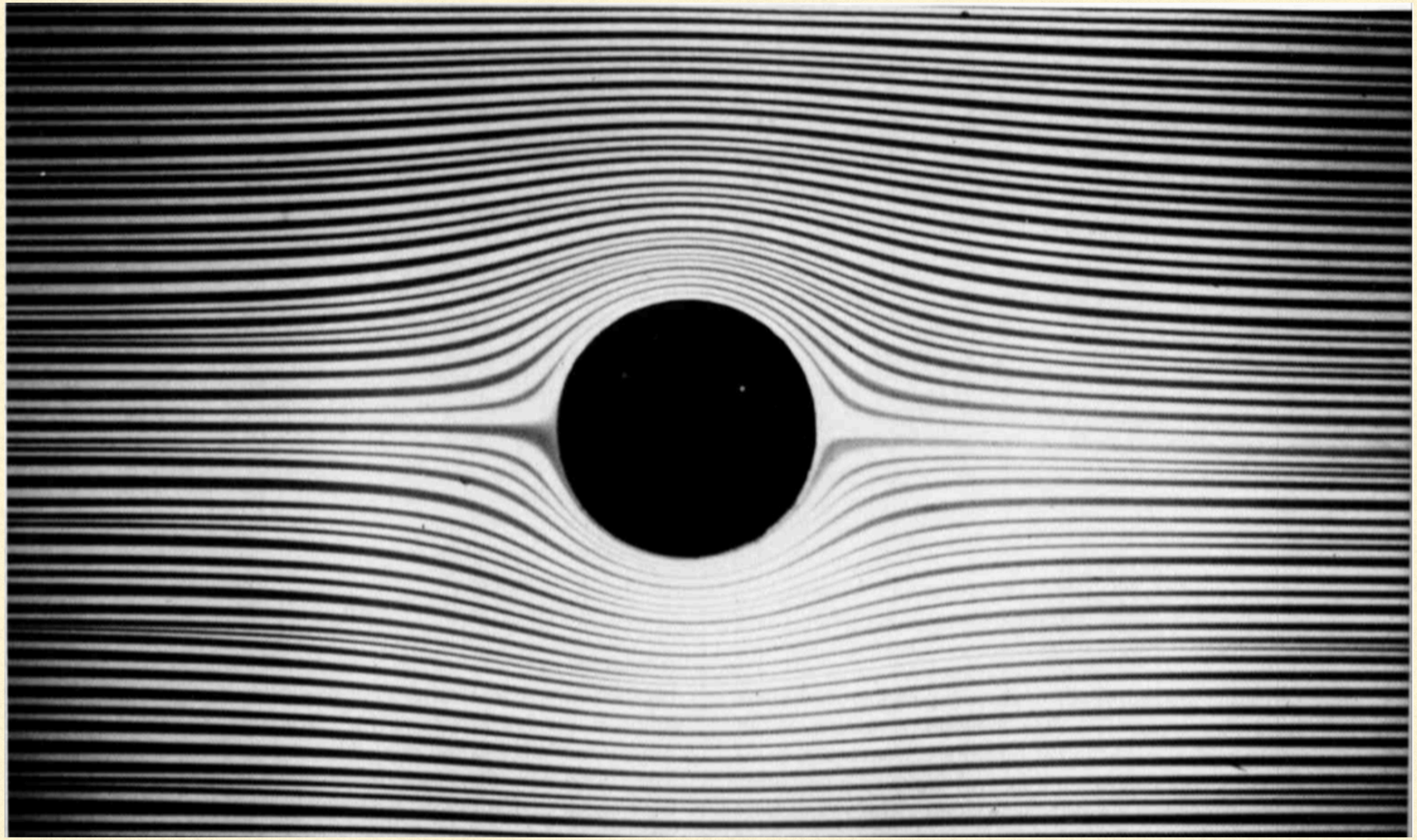
krátka vsuvka: Reynoldsovo číslo

- chceme porovnať dva členy v N-S rovnici $\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\right)\vec{v}=-\nabla p+\eta\,\Delta\vec{v}$
- typickú rýchlosť prúdenia v danej situácii označme U
  typickú dĺžku, na ktorej sa veci signifikantne menia označme L
- typická hodnota $\nabla\vec{v}$ bude U/L (prvá derivácia)
  typická hodnota $\Delta\vec{v}$ bude U/L^2 (druhá derivácia)
- Reynoldsovo číslo: pomer typickej hodnoty konvektívneho a viskózneho člena
  $$R=\frac{\rho U\,.\,U/L}{\eta U/L^2}=\frac{\rho UL}{\eta}$$

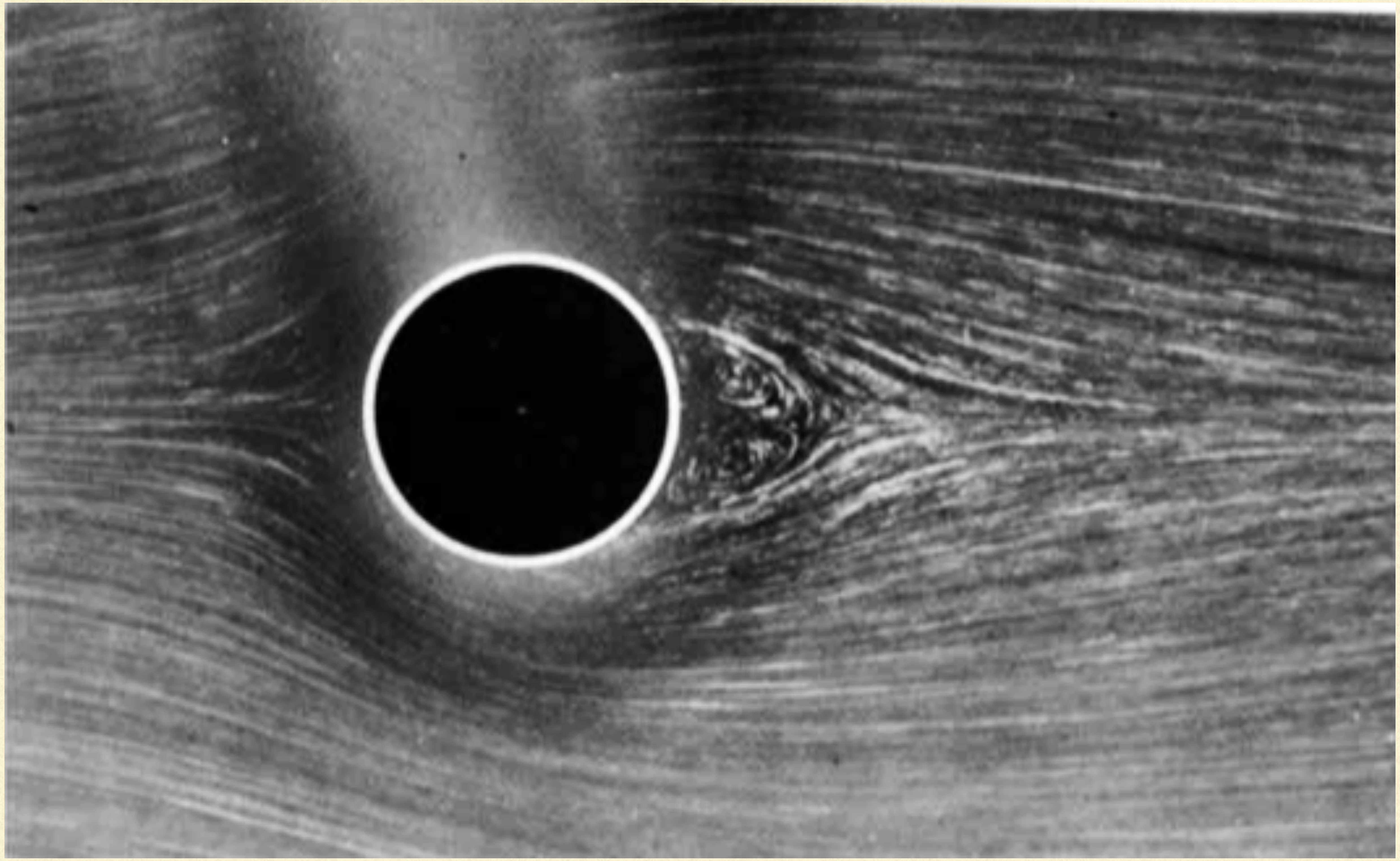
a teraz niekoľko obrázkov

- základný experimentálny fakt: prúdenie tekutiny okolo telesa závisí od jeho rýchlosti a pri značne odlišných rýchlostiach môže byť kvalitatívne úplne iné
- fyzici to radšej formulujú v reči nie rýchlostí, ale Reynoldsových čísiel (pri jednej tekutine s danou viskozitou je to jedno, ale Reynoldsovo číslo je oveľa vhodnejšie na porovnávanie prúdení tekutín s rôznymi viskozitami)
- v ďalšom si ukážeme názorné príklady (fotografie reálnych prúdení okolo valca) prebraté z knihy Milton van Dyke: An album of fluid motion (veľmi odporúčam) courses.washington.edu/me431/handouts/Album-Fluid-Motion-Van-Dyke.pdf

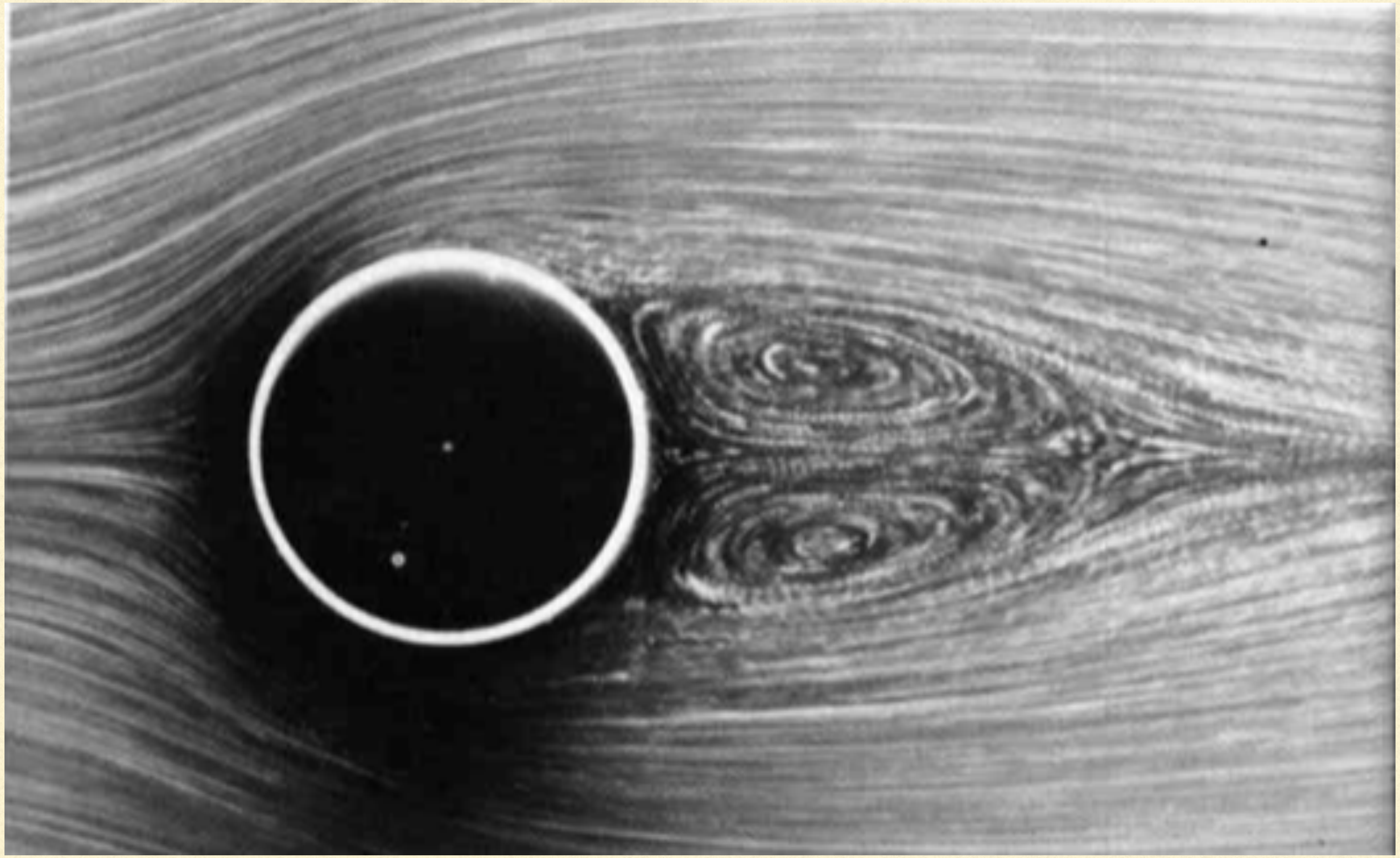
$$R \approx 0.1$$



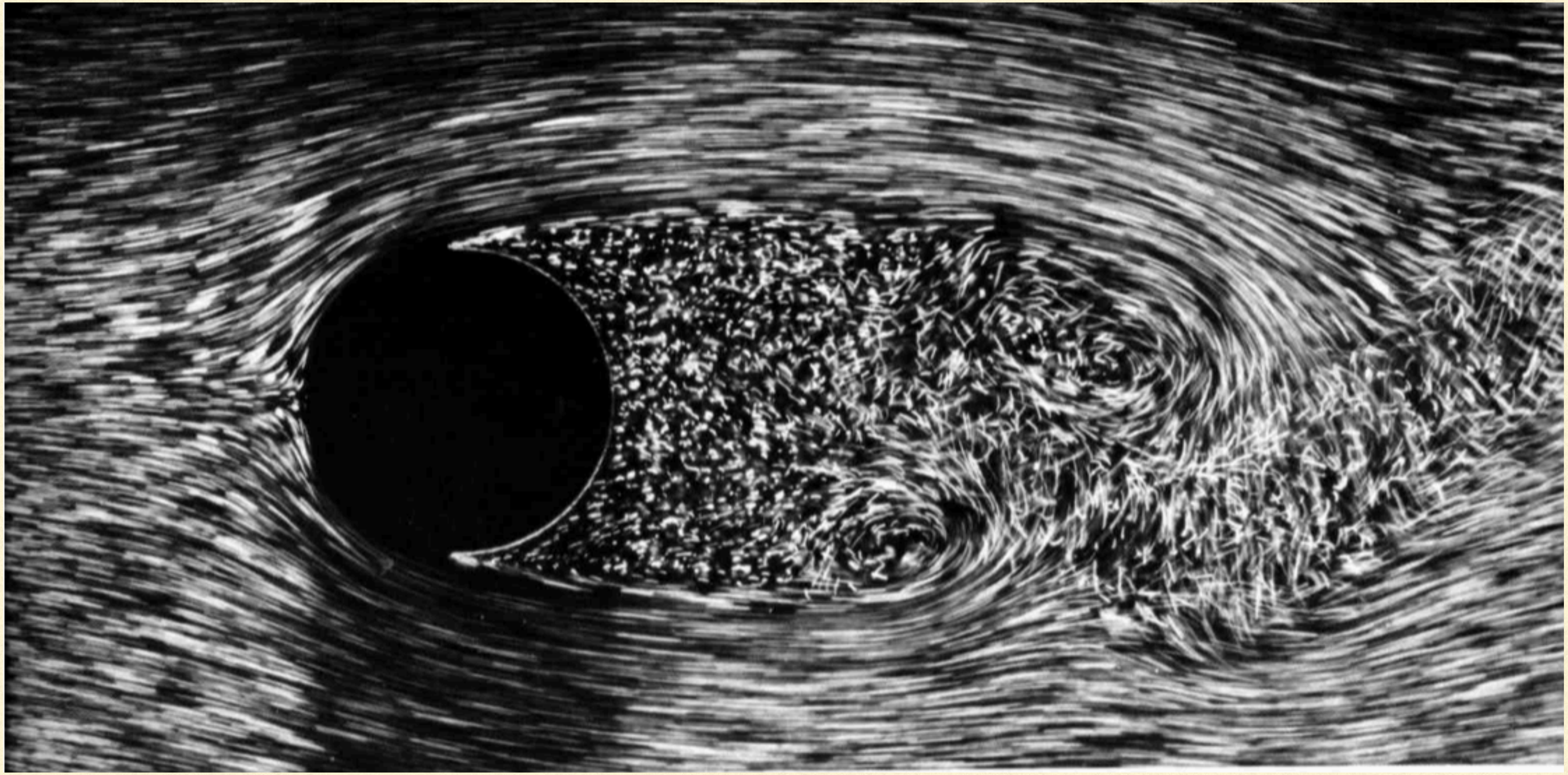
$R \approx 13$



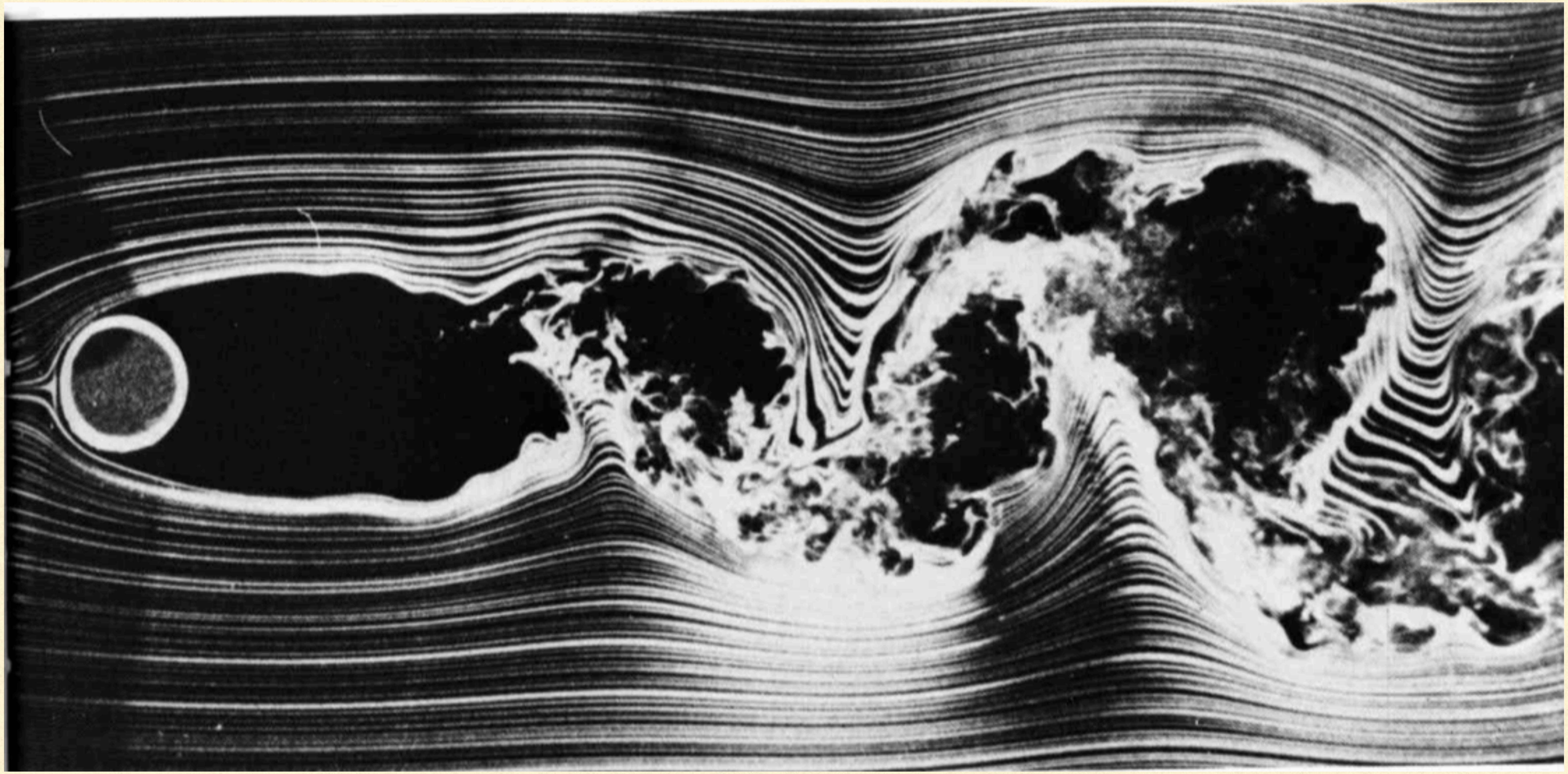
$R \approx 26$



$R \approx 2000$

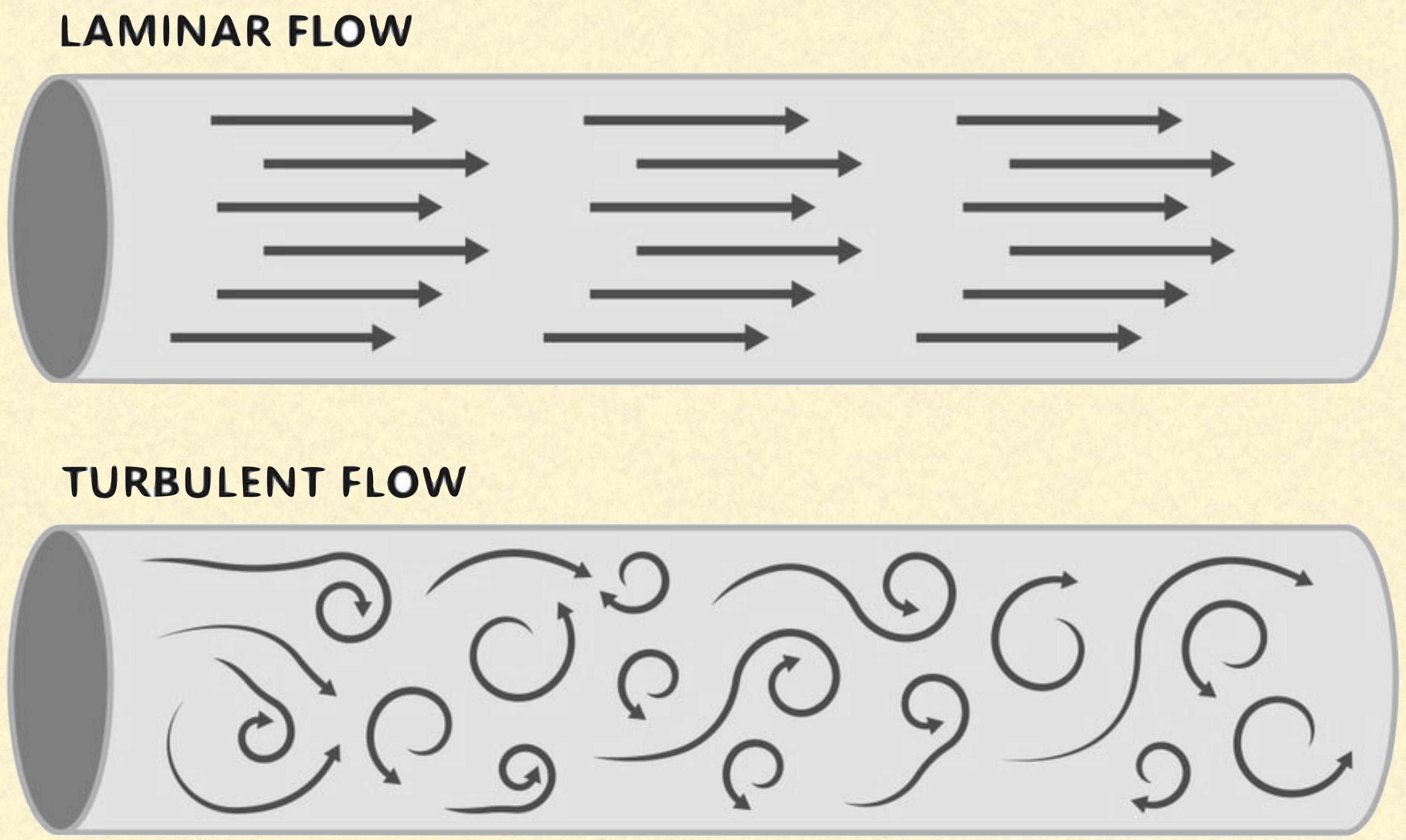


$$R \approx 10000$$



turbulencia

- tomu bordelu vznikajúcemu za valcom pri vysokých Reynoldsových číslach sa hovorí turbulencia
- typickou vlastnosťou turbulentného prúdenia sú chaotické zmeny tlaku a rýchlosti tekutiny
- teória týchto chaotických zmien by mala byť obsiahnutá v Navier-Stokesovej rovici, ale nikto nevie tú teóriu z tej rovnice vytiahnuť
- R. Feynman: turbulencia je jedným z posledných veľkých nevyriešených problémov klasickej fyziky



turbulencia je pritom častý a prakticky dôležitý jav

dva poučné citáty

- jeden sa týka turbulencie a jeden hydrodynamiky všeobecne
- Horace Lamb (1932)
  I am an old man now, and when I die and go to heaven there are two matters on which I hope for enlightenment. One is quantum electrodynamics, and the other is the turbulent motion of fluids. And about the former I am rather optimistic.
- Cyril Hinshelwood (Nobelova cena za chémiu za rok 1956)
  Fluid mechanics was thus discredited by engineers from the start, which resulted in an unfortunate split – between the field of hydraulics, observing phenomena which could not be explained, and theoretical fluid mechanics, explaining phenomena which could not be observed

varovanie na záver

- ako to s hydrodynamikou vyzerá dnes:
  máme poriadnu rovnicu hydrodynamiky (Navier-Stokes), ktorú nevieme moc riešiť
  máme zjednodušené rovnice, ktoré občas nevieme uspokojivo odvodiť
  máme experimentálne fakty, ktoré občas nevieme uspokojivo vysvetliť

- to neznamená, že hydrodynamike sa vlastne nedá rozumieť
  znamená to len toľko, že <u>rozumieť hydrodynamike je ťažké (a nerozumieť ľahké)</u>

- práve preto sme sa toho z hydrodynamiky nepokúšali príliš veľa naučiť
  (ako sme povedali už na začiatku, cieľom bolo nezískať príliš veľké sebavedomie, pretože to by bolo v tomto štádiu štúdia fyziky celkom určite neadekvátne)