TUHÉ TELESO V PRIESTORE

mechanika tuhého telesa v 3D

mechanika 26

porovnanie translácie hmotného bodu v 1D a 3D

hmotný bod v jednom rozmere

- poloha x
- rýchlosť $v = \dot{x}$
- pohybová rovnica $m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$
- hybnosť $p = mv$
- zmena hybnosti $\dot{p} = F$
- kinetická energia $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

hmotný bod v troch rozmeroch

- poloha $\vec{r}$
- rýchlosť $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$
- pohybová rovnica $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$
- hybnosť $\vec{p} = m\vec{v}$
- zmena hybnosti $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$
- kinetická energia $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

porovnanie rotácie tuhého telesa v 2D a 3D

tuhé teleso v dvoch rozmeroch

- orientácia φ
- uhlová rýchlosť $\omega = \dot{\varphi}$
- pohybová rovnica $I\ddot{\varphi} = M(\varphi, \dot{\varphi}, t)$
- iný zápis $\dot{L} = M$
- moment hybnosti $L = I\omega$
- kinetická energia $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$

tuhé teleso v troch rozmeroch

- orientácia $\cancel{\vec{\varphi}}$
- uhlová rýchlosť $\vec{\omega} = \cancel{\dot{\vec{\varphi}}}$
- pohybová rovnica $\cancel{I\ddot{\vec{\varphi}} = \vec{M}(\vec{\varphi}, \dot{\vec{\varphi}}, t)}$
- iný zápis. $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$
- moment hybnosti $\vec{L} = \cancel{I}\vec{\omega}$
- kinetická energia $E_k = \frac{1}{2}\cancel{I}\omega^2$

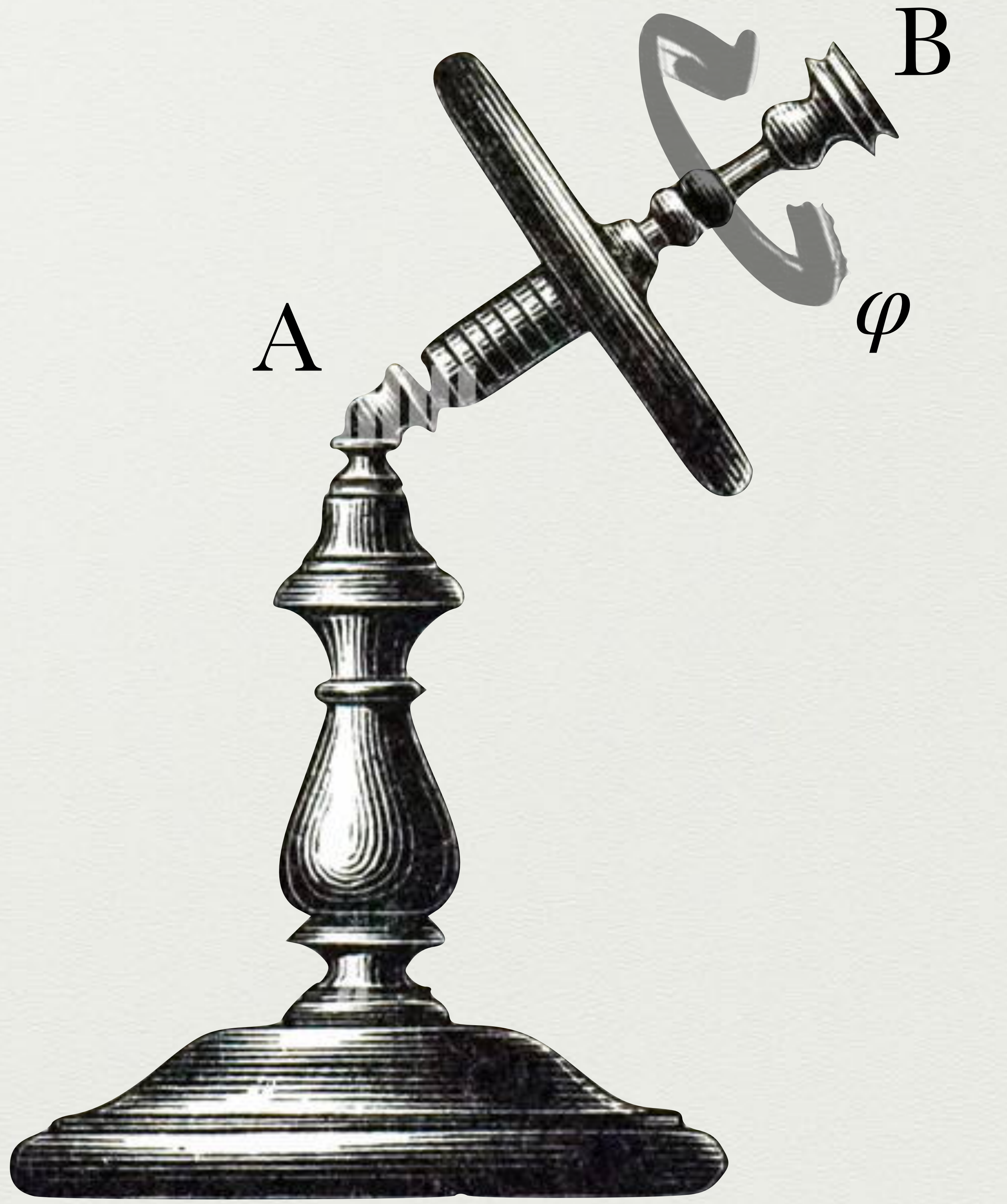
určenie orientácie telesa v priestore

- predstavme si, že poznáme polohu nejakého konkrétneho bodu A tuhého telesa a chceme určiť orientáciu tohto telesa v priestore

- jedna možnosť: určiť “zemepisnú šírku a dĺžku” nejakého iného konkrétneho bodu B a potom ešte uhol φ rotácie telesa okolo osi AB

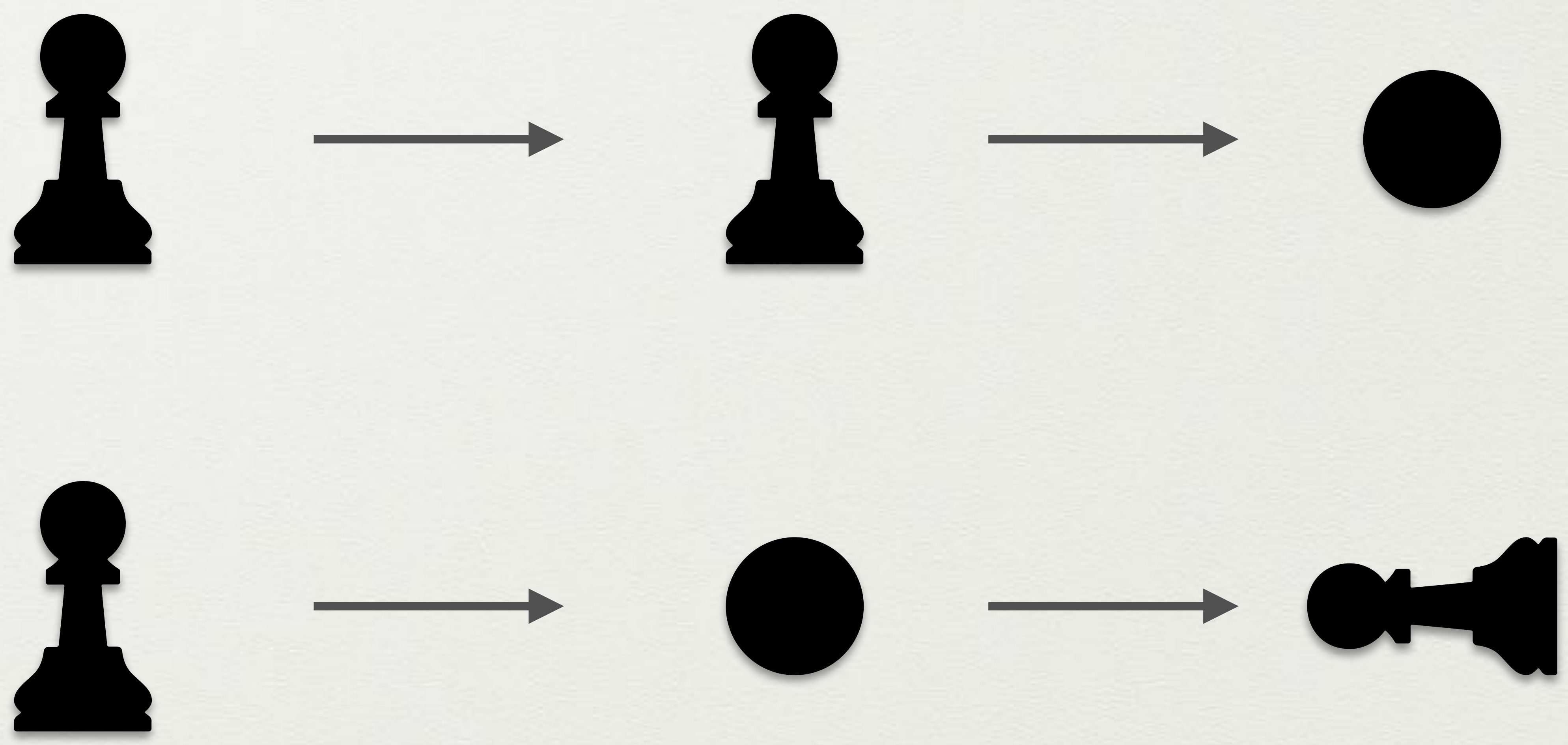
- orientácia (celkové natočenie) je teda určená tromi uhlami a mohlo by sa zdať, že tieto tri čísla tvoria vektor

- ale netvoria – ani tieto tri, ani nijaké iné



prečo nie je orientácia v priestore vektor

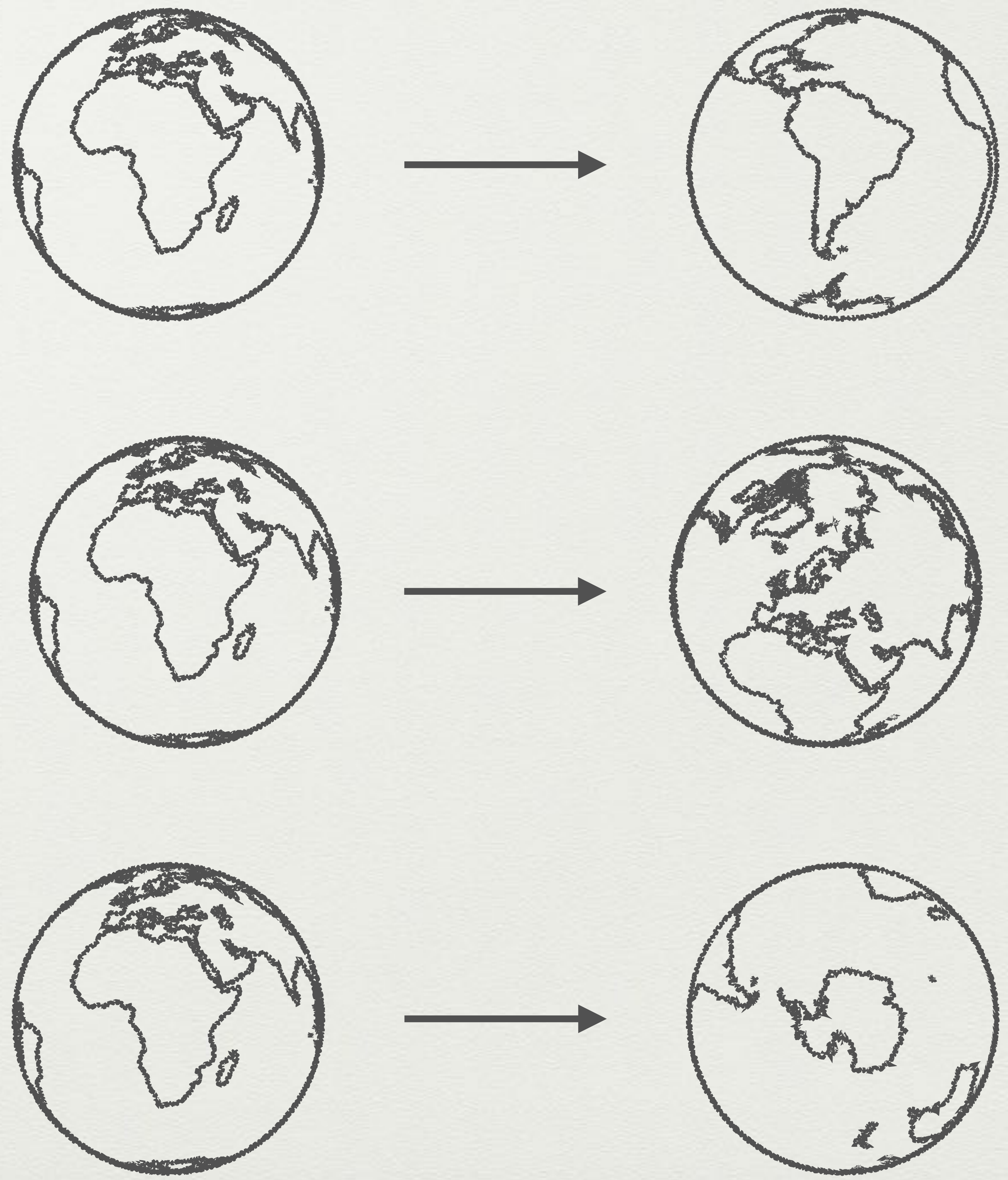
- pri skladaní vektorov nezáleží na poradí, ale pri skladaní rotácií záleží na poradí
- nech sa čierny pešiak otočí najprv o 90° okolo osi z potom o 90° okolo osi x
- a teraz nech sa otočí najprv o 90° okolo osi x potom o 90° okolo osi z
- skladanie vektorov nijako nedokáže zreprodukovať túto vlastnosť rotácií



skladanie rotácií je nekomutatívne
skladanie vektorov je komutatívne

os rotácie a uhol rotácie okolo tejto osi

- orientáciu zotrvačníka sme opísali jednou osou a uhlom otočenia okolo tejto osi
- dá sa takýto opis použiť vždy?
- Eulerova veta: každá zmena orientácie tuhého telesa, pri ktorej sa jeden jeho bod nehýbe, je rotáciou okolo nejakej osi
- nájdite (stačí približne) osi rotácie a uhly otočenia okolo týchto osí pre konkrétne zmeny orientácie Zemegule znázornené na obrázkoch



rýchlosť zmeny orientácie telesa v priestore

- os a smer otočenia tuhého telesa môžeme charakterizovať jednotkovým vektorom $\vec{n}$, uhol tohto otočenia ďalším číslom φ
- táto trojica čísiel (dve nezávislé súradnice $\vec{n}$ a číslo φ) nezodpovedajú nijakému vektoru
- postupnú zmenu orientácie telesa vyjadrujú funkcie $\vec{n}(t)$ a $\varphi(t)$
- rýchlosť zmeny orientácie telesa vyjadrujú derivácie $\dot{\vec{n}}(t)$ a $\dot{\varphi}(t)$

ale rýchlosť zmeny orientácie v priestore je vektor

- keď sme skúmali rotujúce neinerciálne vzťažné sústavy, zaviedli sme si vektor uhlovej rýchlosti $\overrightarrow{\omega}$

- rotáciu tuhého telesa okolo nejakej osi môžeme opísať rovnakým vektorom $\overrightarrow{\omega}$

- rýchlosť bodu s polohovým vektorom $\vec{r}$ pri rotácii s uhlovou rýchlosťou $\overrightarrow{\omega}$ je

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega} \times \vec{r}}$$

- ako smeruje $\overrightarrow{\omega}$ na obrázku?
  ukážte pre pár bodov zotrvačníka, že vektorový súčin naozaj dá správne rýchlosti

nepovinná poznámka

- ak je uhlová rýchlosť (t.j. rýchlosť rotácie) vektor, potom pri skladaní týchto rýchlostí nemôže záležať na poradí (lebo pri skladaní vektorov na ňom nezáleží)
- ako je možné, že pri skladaní rotácií záleží na poradí, ale pri skladaní rýchlostí rotácií na poradí nezáleží?
- vtip je v tom, že pri rýchlostiach rotácií ide o malinké (infinitezimálne) rotácie, a tam sa nekomutatívnosť skladaní neprejaví, ako si teraz ukážeme

- pripomienka z lineárnej algebry: rotácie bázy sa dajú realizovať pomocou matice smerových cosínov
- skladaniu rotácií zodpovedá násobenie príslušných matíc a násobenie matíc je nekomutatívne
- infinitezimálnym rotáciám zodpovedajú matice typu $1 + \epsilon$ respektíve $1 + \epsilon'$
- $(1 + \epsilon)(1 + \epsilon') = 1 + \epsilon + \epsilon' + \dots$
  $(1 + \epsilon')(1 + \epsilon) = 1 + \epsilon + \epsilon' + \dots$
  no a … sú vyššieho rádu malosti

uhlová rýchlosť telesa a jeho moment hybnosti

- moment hybnosti:

$$\vec{L} = \sum_n \vec{r}_n \times \vec{p}_n = \sum_n \vec{r}_n \times m_n \vec{v}_n$$

- moment hybnosti tuhého telesa:

$$\vec{L} = \sum_n m_n \vec{r}_n \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)$$

- $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \,.\, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \,.\, \vec{b})$

- $\vec{L}$ dostaneme tak, že $\vec{\omega}$ vložíme do mašinky

$$\sum_n m_n\, r_n^2 \,\llcorner\!\lrcorner - m_n\, \vec{r}_n (\vec{r}_n \cdot \llcorner\!\lrcorner)$$

- mašinku, ktorá vyrába $\vec{L}$ z $\vec{\omega}$ nazývame moment zotrvačnosti a označujeme ju I

- na rozdiel od 2D rotácií mašinka I nie je len násobenie nejakým konkrétnym číslom

- v súlade s 2D rotáciami je mašinka I lineárna

$$I(\lambda\vec{\omega}) = \lambda I(\vec{\omega})$$
$$I(\vec{\omega} + \vec{\omega}') = I(\vec{\omega}) + I(\vec{\omega}')$$

(dôkaz: pozriem – vidím, ale naozaj pozrite)

- lineárnej mašinke, ktorá vyrába z vektora vektor, sa hovorí **tenzor** (druhého rádu)

reklama

- tenzor momentu zotrvačnosti je asi prvý tenzor, s ktorým sa študent fyziky stretne
- ale rozhodne nie je posledný
- mnohé dôležité fyzikálne veličiny sú tenzory
- niekoľko príkladov:
  tenzor napätí a tenzor deformácie v teórii pružnosti, tenzor toku hybnosti elmag poľa, tenzor permitivity v anizotropných látkach, metrický tenzor v teórii relativity, …
- to, čo sme nazvali tenzormi (lineárne zobrazenia vektorov do vektorov) sú prísne vzaté tenzory druhého rádu
- lineárne zobrazenia, ktoré priraďujú tenzorom (druhého rádu) tenzory (druhého rádu), sa nazvývajú tenzormi štvrtého rádu (podobne sú definované tenzory iných rádov)
- tenzory vyšších rádov sa tiež vo fyzike občas vyskytujú, typickými príkladmi sú tenzor tuhosti v teórii pružnosti alebo Riemannov tenzor krivosti vo všeobecnej teórii relativity

moment zotrvačnosti v kartézskych súradniciach

- vzťah medzi súradnicami $\overrightarrow{L}$ a $\overrightarrow{\omega}$

$$L_x = \sum m_n r_n^2 \omega_x - m_n x_n (x_n \omega_x + y_n \omega_y + z_n \omega_z)$$

$$L_y = \sum m_n r_n^2 \omega_y - m_n y_n (x_n \omega_x + y_n \omega_y + z_n \omega_z)$$

$$L_z = \sum m_n r_n^2 \omega_z - m_n z_n (x_n \omega_x + y_n \omega_y + z_n \omega_z)$$

- tento neprehľadný zápis sa často nahrádza maticovým zápisom, ktorý v skutočnosti nie je o nič prehľadnejší, ale aspoň sa tak snaží tváriť

- maticový zápis

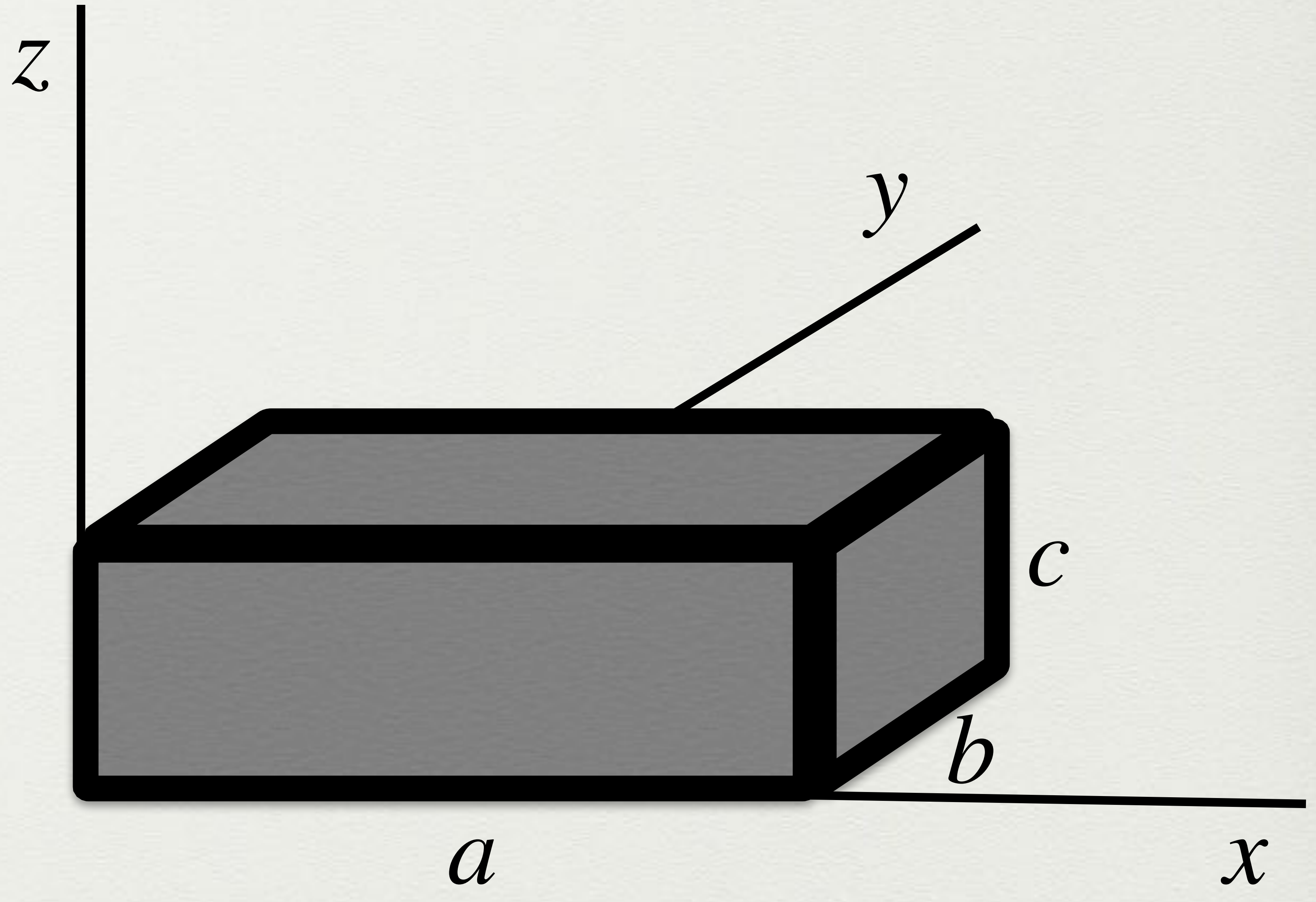
$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

- čo sa často zapisuje ako $\overrightarrow{L} = \bar{\bar{I}}\, \overrightarrow{\omega}$, kde

$$\bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} \sum_n m_n(y_n^2 + z_n^2) & -\sum_n m_n x_n y_n & -\sum_n m_n x_n z_n \\ -\sum_n m_n y_n x_n & \sum_n m_n(x_n^2 + z_n^2) & -\sum_n m_n y_n z_n \\ -\sum_n m_n z_n x_n & -\sum_n m_n z_n y_n & \sum_n m_n(x_n^2 + y_n^2) \end{pmatrix}$$

výpočet zložiek momentu zotrvačnosti – príklad

homogénny kváder na obrázku



$$I_{xx} = \int_0^a \int_0^b \int_0^c \rho \,.\, (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz = \int_0^b \int_0^c \rho\, a\, (y^2 + z^2)\, dy\, dz =$$

$$= \int_0^c \rho\, a \left(\frac{1}{3} b^3 + b z^2 \right) dz = \frac{1}{3}\, \rho\, (a b^3 c + a b c^3) = \frac{1}{3}\, m\, (b^2 + c^2)$$

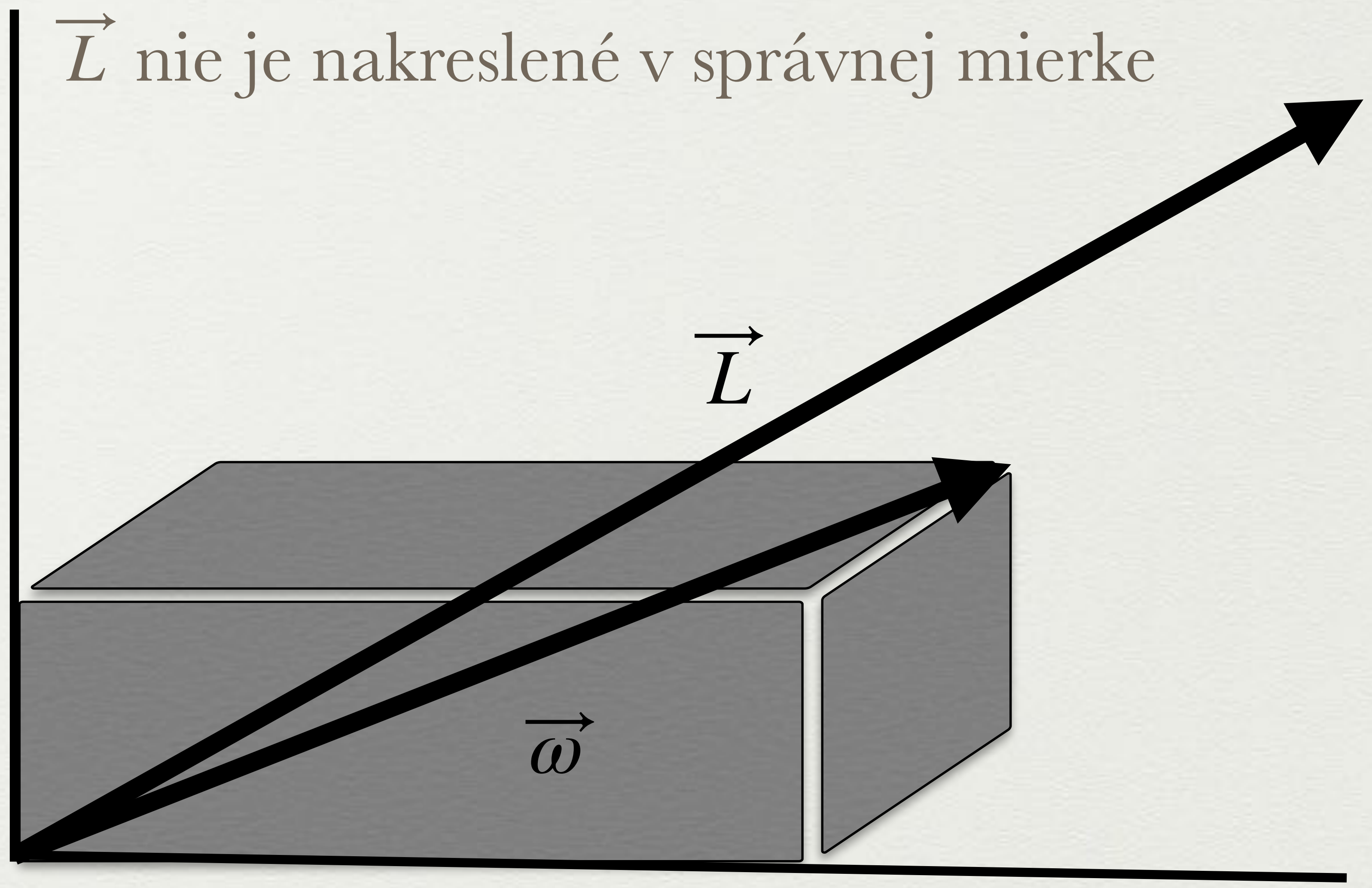
$$I_{xy} = -\int_0^a \int_0^b \int_0^c \rho \,.\, xy\, dx\, dy\, dz = -\frac{1}{4}\, \rho\, a^2 b^2 c = -\frac{1}{4}\, m\, ab \qquad I_{xz} = -\frac{1}{4}\, m\, ac$$

$$I_{yx} = I_{xy} \qquad I_{yy} = \frac{1}{3}\, m\, (a^2 + c^2) \qquad I_{yz} = -\frac{1}{4}\, m\, bc \qquad I_{zx} = I_{xz} \qquad I_{zy} = I_{yz} \qquad I_{zz} = \frac{1}{3}\, m\, (a^2 + b^2)$$

významný dôsledok faktu, že $\bar{\bar{I}}$ je tenzor

- vezmime v predchádzajúcom príklade
  $\rho = 1 \qquad a = 3 \qquad b = 2 \qquad c = 1$
  (v správnych fyzikálnych jednotkách)

$$\bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} 10 & -9 & -\frac{9}{2} \\ -9 & 20 & -3 \\ -\frac{9}{2} & -3 & 26 \end{pmatrix}$$



- rotácia okolo telesovej uhlopriečky s $\omega = \sqrt{14}$

$$\vec{L} = \bar{\bar{I}}\,\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 10 & -9 & -4.5 \\ -9 & 20 & -3 \\ -4.5 & -3 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.5 \\ 10 \\ 6.5 \end{pmatrix}$$

veľmi dôležitý fakt:
vektory $\vec{L}$ a $\vec{\omega}$
nie sú rovnobežné

3D mechanika tuhých telies je ťažká a neintuitívna

- vektory $\vec{L} = \bar{\bar{I}}\,\vec{\omega}$ a $\vec{\omega}$ nemusia byť (a zväčša ani nie sú) rovnobežné
- toto predstavuje ďalšiu podstatnú komplikáciu mechaniky tuhých telies
- to, že orientácia tuhého telesa nie je vektor a jeho moment zotrvačnosti nie je skalár (ktorý sa navyše mení s meniacou sa orientáciou) robia z 3D mechaniky tuhých telies hnusne ťažkú a veľmi neintuitívnu disciplínu
- mohli by sme sa do nej pustiť, ale stálo by nás to veľa síl, ktoré môžeme v tomto semestri využiť rozumnejšie (väčšinu mechaniky tuhého telesa preto necháme na prednášku z teoretickej mechaniky v budúcom semestri)

ale niečo sa predsa len pokúsime aspoň nahliadnuť

- náš ďalší postup bude takýto: nebudeme sa ani len pokúšať napísať pohybové rovnice pre rotáciu tuhého telesa v priestore, nieto ich riešiť
- budeme sa ale snažiť vyťažiť čo najviac informácie z rovnice $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$
- väčšinou to nebude mať charakter rigoróznych odvodení, pôjde skôr o kvalitatívne (prípadne semikvantitatívne) úvahy
- ale aj také postupy bývajú vo fyzike často veľmi užitočné (najmä ak presnejšie výsledky získať nevieme, alebo aj vieme, ale len s rádovo väčšou námahou)

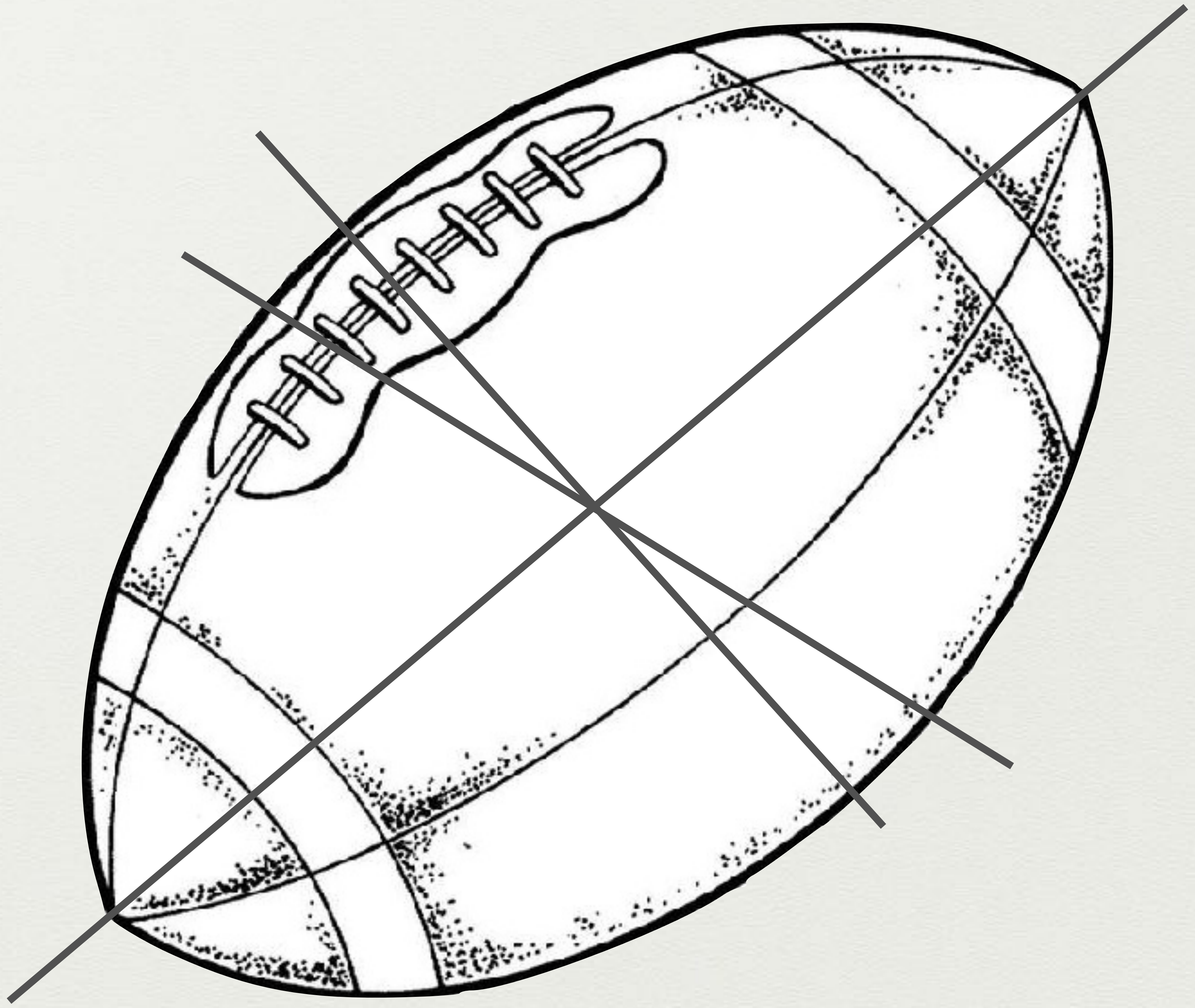
hlavné osi tenzora momentu zotrvačnosti

- $\bar{\bar{I}}$ je symetrická matica (pozri definíciu)

- symetrické matice sa dajú diagonalizovať, t.j. dá sa nájsť taká (ortonormálna) báza, v ktorej je daná matica diagonálna

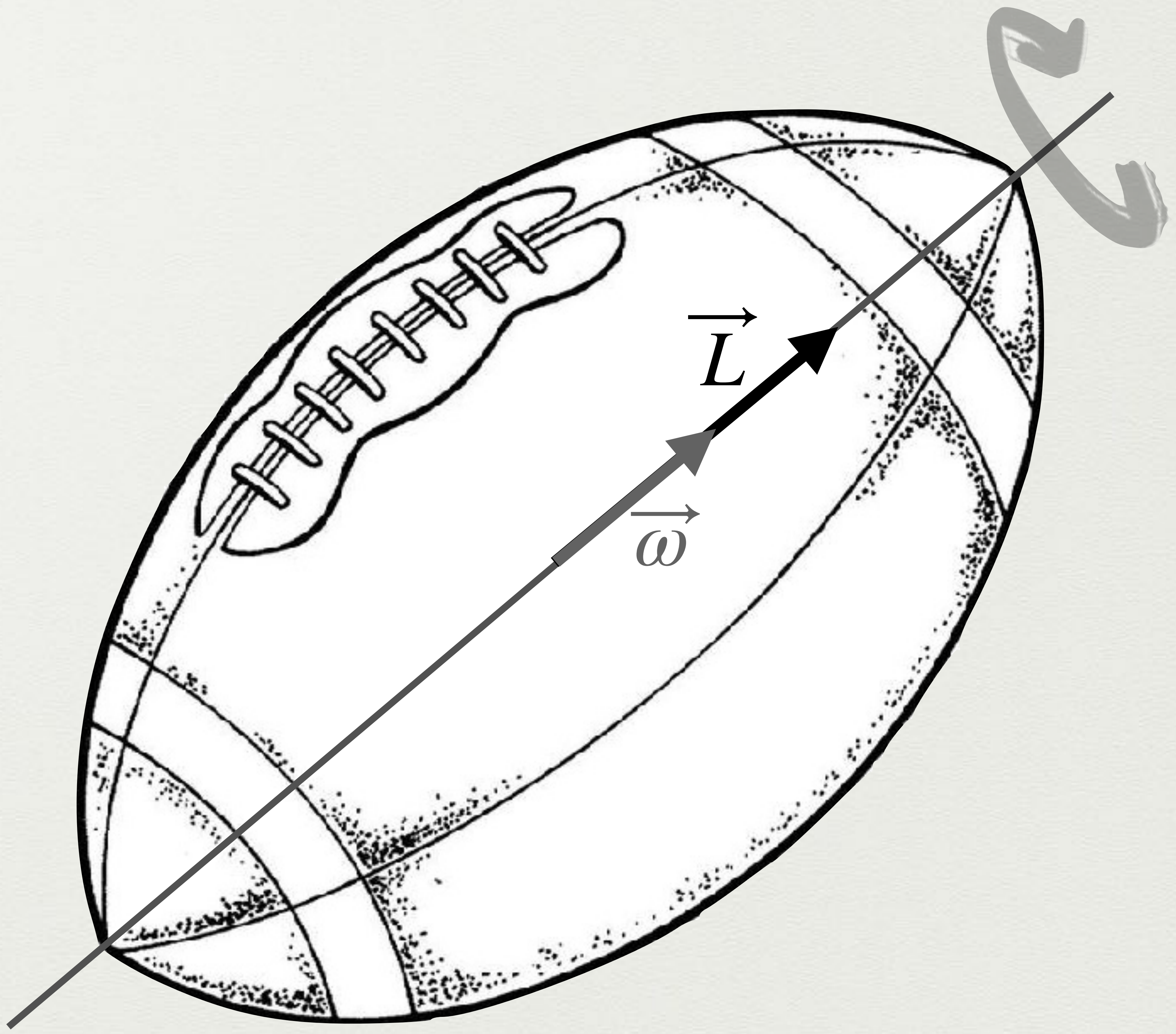
- osi súradnicovej sústavy, v ktorej je matica $\bar{\bar{I}}$ diagonálna, sa nazývajú hlavnými osami tuhého telesa resp. jeho momentu zotrvačnosti

- ak má uhlová rýchlosť $\vec{\omega}$ smer jednej z hlavných osí, moment hybnosti $\vec{L}$ je rovnobežný s $\vec{\omega}$



dobrý hod lopty v americkom futbale

- pohyb v homogénnom gravitačnom poli, v ktorom je moment sily vzhľadom k hmot. stredu nulový
- v takom prípade sa moment hybnosti zachováva (ak neberieme do úvahy odpor vzduchu)
- ak teleso rotuje okolo jednej zo svojich hlavných osí, moment hybnosti je rovnobežný s vektorom uhlovej rýchlosti
- rotácia pôvodnou uhlovou rýchlosťou vyhovuje podmienke zachovania momentu hybnosti



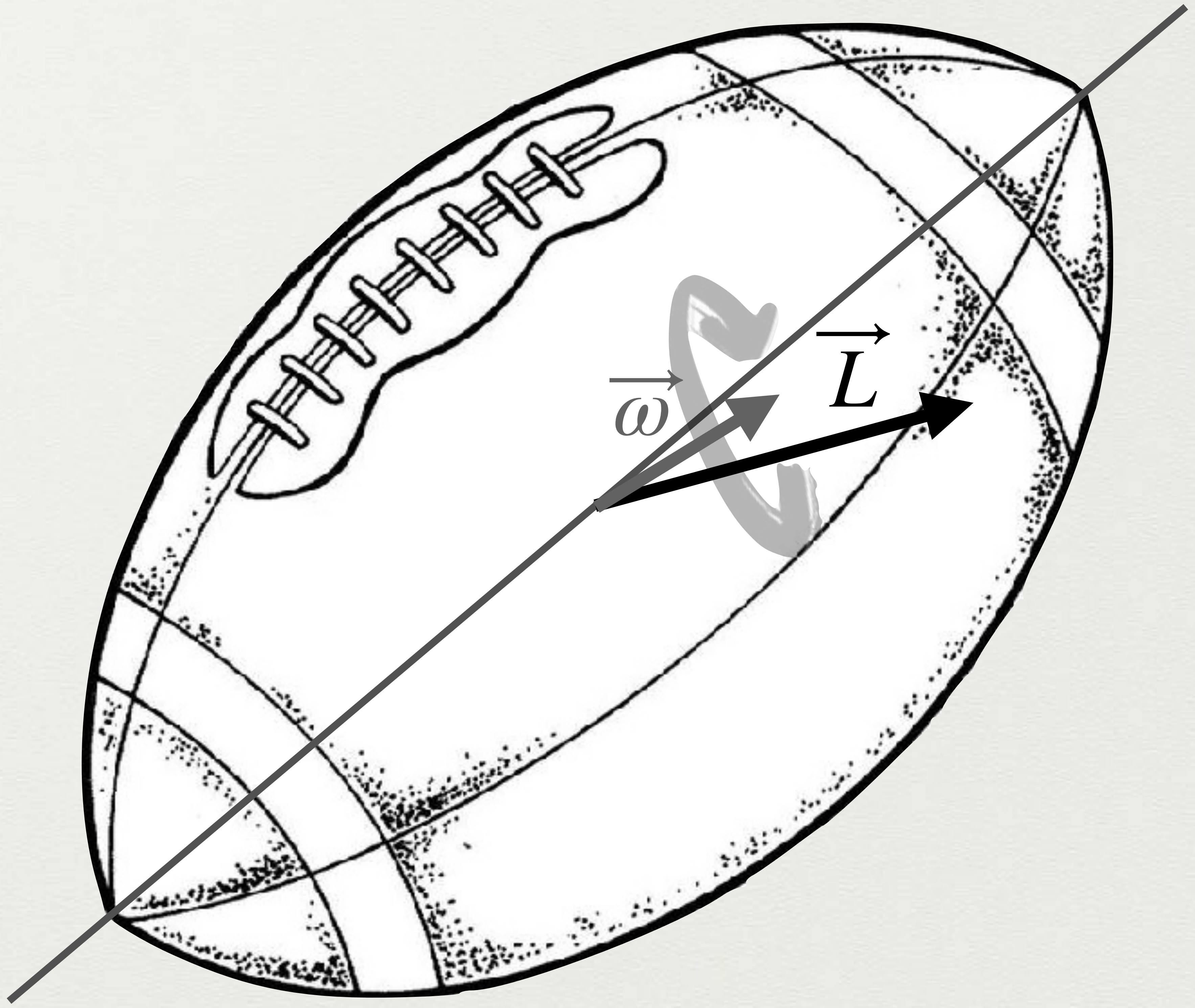
menej dobrý hod lopty v americkom futbale

- uvažujme teraz prípad, keď lopte udelíme rotáciu uhlovou rýchlosťou $\vec{\omega}$ takmer, ale nie celkom okolo jednej z hlavných osí

- moment hybnosti $\vec{L}$ sa bude zachovávať, ak sa bude lopta (a s ňou aj vektor $\vec{\omega}$) rovnomerne otáčať okolo vektora $\vec{L}$

- tomuto otáčaniu sa zvykne hovoriť precesia

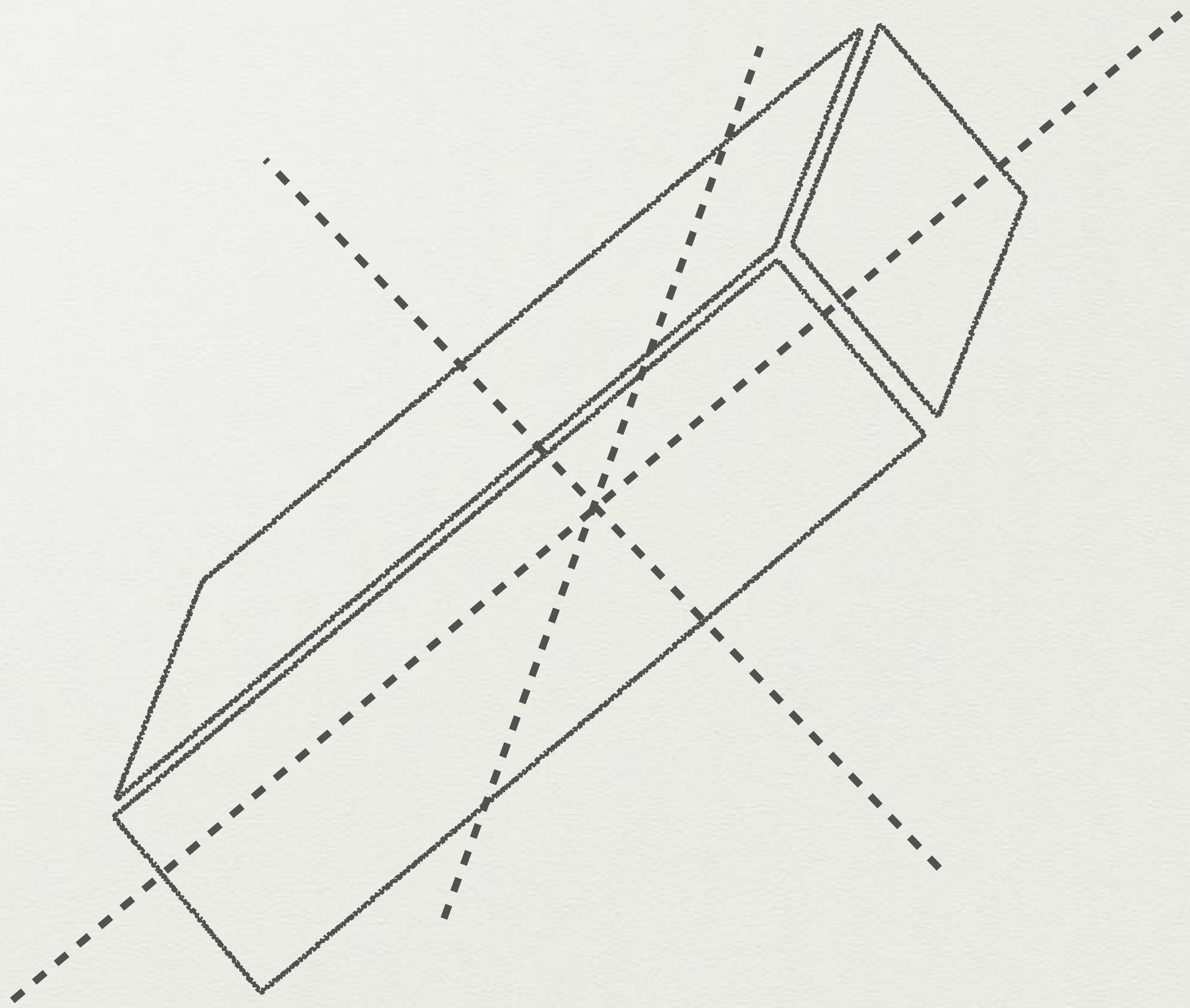
- z našej úvahy nevyplýva uhlová rýchlosť precesie, ani to, že táto rýchlosť je nenulová (to vyplýva až z ďalších úvah alebo z riešenia pohybových rovníc)



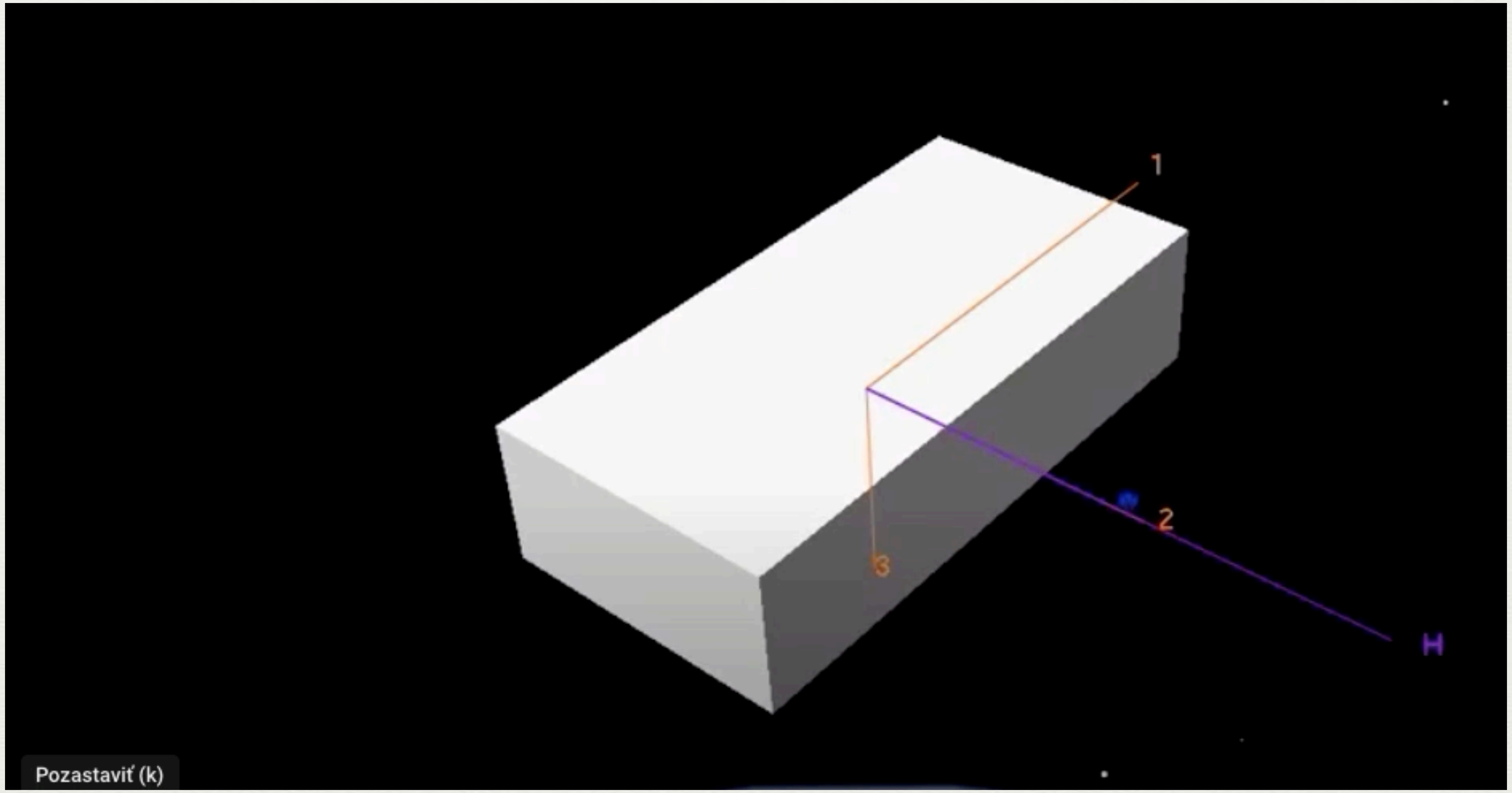
ohraničená použiteľnosť kvalitatívnych úvah

- ak by sme namiesto rugbyovej lopty uvažovali kváder, potom pre dve z troch hlavných osí by analogická úvaha prešla, ale pre tretiu nie (pre jednu z hlavných osí dá riešenie pohybových rovníc niečo podstatne iné ako precesiu)

- všetky naše úvahy treba preto brať s rezervou, len ako akýsi prvotný pokus o porozumenie niektorým pohybom (nie je to naozajstné porozumenie)



pohyb kvádra v bezváhovom stave



neprecesný pohyb okolo jednej z osí

a ešte jeden príklad

nesymetrické teleso v bezváhovom stave