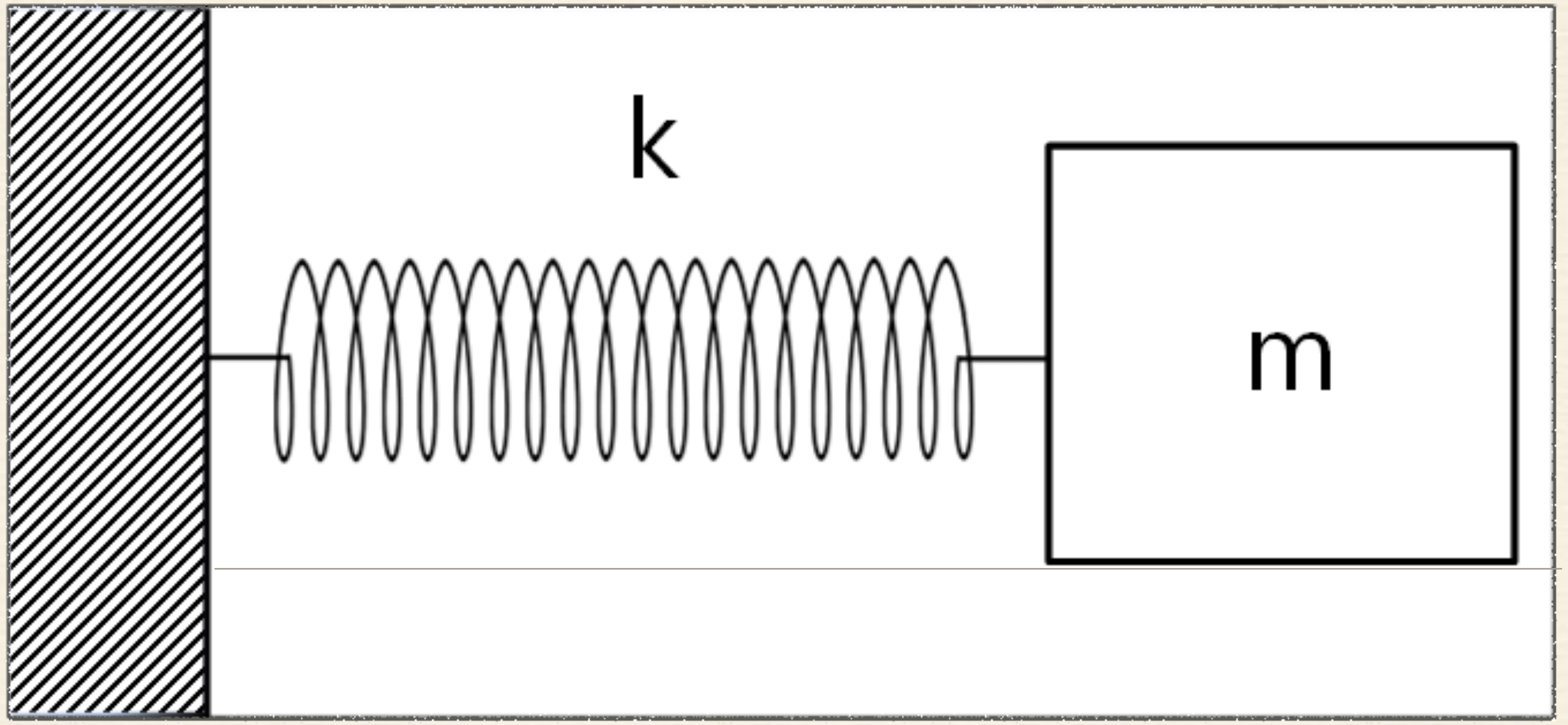
Extrémne dôležitý fyzikálny systém

lineárny harmonický oscilátor

mechanika 10

mimoriadne dôležitá vec



Čo je dôležité na tejto neprirodzenej blbosti?

To, že sa v niečom podobá na veľa prirodzených a často sa vyskytujúcich vecí.

teleso na pružine

$$F = -k\,.\,x$$

prečo je to tak, povieme si o chvíľu

je to pomerne dôležité, pretože pružiny bývajú súčasťou niektorých významných zariadení, napríklad hodiniek

veľa iných vecí

$$F = -k\,.\,x$$

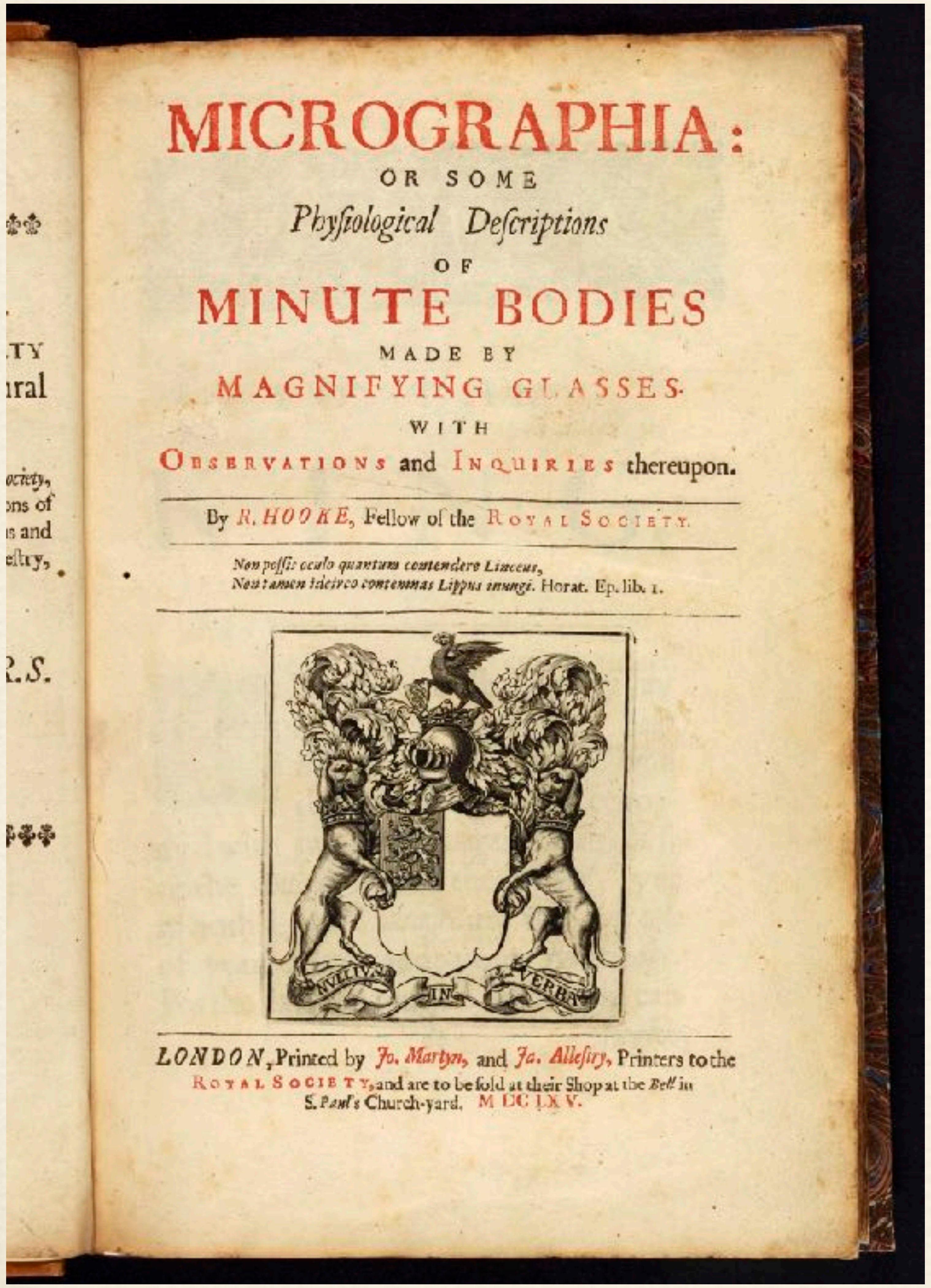
prečo je to tak, povieme si hneď potom

je to extrémne dôležité, pretože také veci sa vyskytujú všade okolo nás – kamkoľvek sa pozrieme, uvidíme takú vec

Robert Hooke (1635-1703) významne vylepšil množstvo fyzikálnych prístrojov, napríklad mikroskop, ďalekohľad a vákuovú pumpu. Potom pomocou týchto prístrojov objavil mikroskopické fosílie, bunkovú štruktúru rastlín, rotáciu Marsu a Jupitera a všeličo iné. Vo fyzike sú najvýznamnejšie jeho objavy týkajúce sa pružnosti. Jedným z nich je objav zákona pre silu, ktorou pôsobí na telesá natiahnutá alebo stlačená pružina.

Nezachoval sa ani jeden jediný Hookov portrét. Pritom nie je veľmi pravdepodobné, že nijaký neexistoval. Skôr sa predpokladá, že prípadné Hookove portréty dal niekto zničiť a za hlavného podozrivého býva považovaný Issac Newton, ktorý Hooka neznášal (bolo to vzájomné). Hovorieva sa, že na prednáškach je dobré predstavovať vedcov aj z ich ľudskej stránky. Takže toto bol príklad silného ľudského citu.

Mikrografia (1665) a obrázok blchy v nej



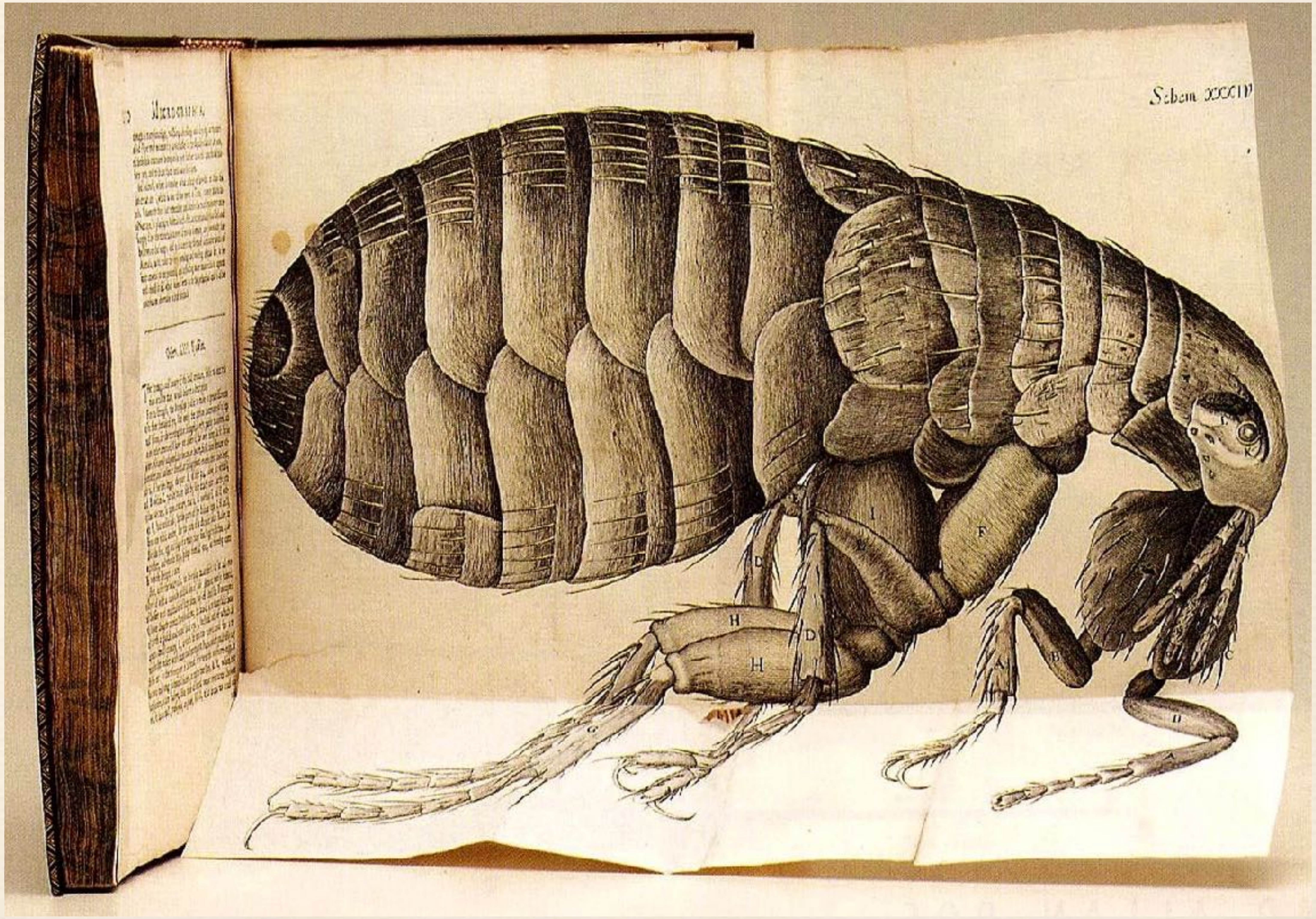
MICROGRAPHIA:
OR SOME
Physiological Descriptions
OF
MINUTE BODIES
MADE BY
MAGNIFYING GLASSES.
WITH
OBSERVATIONS and INQUIRIES thereupon.

By *R. HOOKE*, Fellow of the ROYAL SOCIETY.

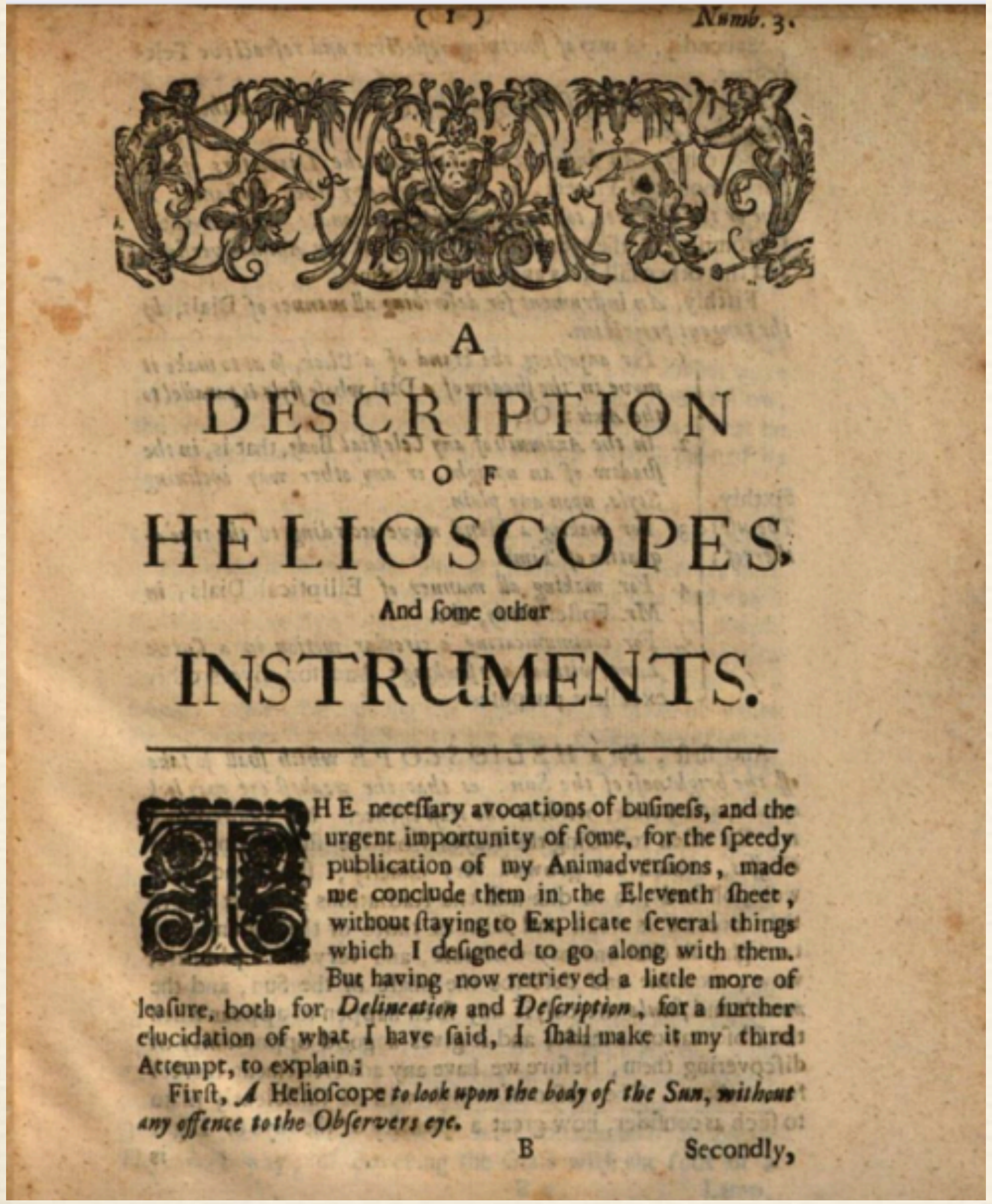
Non possis oculo quantum contendere Linceus,
Non tamen idcirco contemnas Lippus inungi. Horat. Ep. lib. 1.

NULLIUS IN VERBA

LONDON, Printed by *Jo. Martyn*, and *Ja. Allestry*, Printers to the ROYAL SOCIETY, and are to be sold at their Shop at the *Bell* in S. *Paul's* Church-yard. MDCLXV.



Opis slnkohľadov (1675) a anagram v ňom



(1) Numb. 3.

A

DESCRIPTION

OF

HELIOSCOPES,

And some other

INSTRUMENTS.

THE necessary avocations of business, and the urgent importunity of some, for the speedy publication of my Animadversions, made me conclude them in the Eleventh sheet, without staying to Explicate several things which I designed to go along with them. But having now retrieved a little more of leasure, both for *Delineation* and *Description*, for a further elucidation of what I have said, I shall make it my third Attempt, to explain;

First, *A* Helioscope *to look upon the body of the Sun, without any offence to the Observers eye.*

B Secondly,

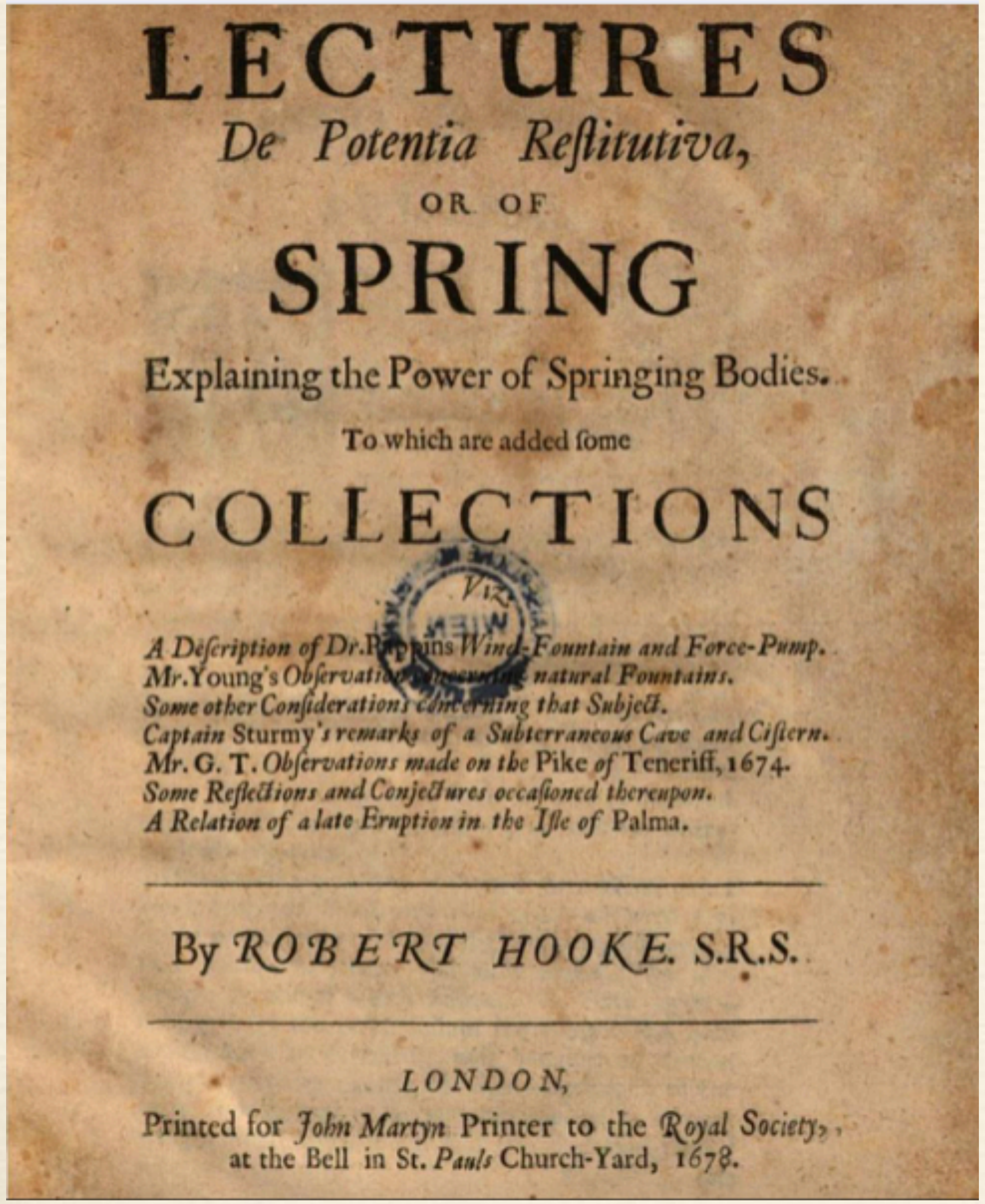
Aby som vyplnil prázdne miesto na poslednej strane, pridám sem opisy desiatky z tisíciek vynálezov, ktoré mienim publikovať …

1. …

2. …

3. Správnu teóriu pružnosti a jej výklad v tých prípadoch, v ktorých hrá úlohu. A tiež spôsob výpočtu rýchlosti telies pod jej vplyvom. ceiiinosssttuv

Prednášky o pružine (1678) a riešenie anagramu



LECTURES
De Potentia Reſtitutiva,
OR OF
SPRING
Explaining the Power of Springing Bodies.
To which are added ſome
COLLECTIONS
Viz.
A Deſcription of Dr. Papins Wind-Fountain and Force-Pump.
Mr. Young's Obſervations concerning natural Fountains.
Some other Conſiderations concerning that Subject.
Captain Sturmy's remarks of a Subterraneous Cave and Ciſtern.
Mr. G. T. Obſervations made on the Pike of Teneriff, 1674.
Some Reflections and Conjectures occaſioned thereupon.
A Relation of a late Eruption in the Iſle of Palma.

By ROBERT HOOKE. S.R.S.

LONDON,
Printed for John Martyn Printer to the Royal Society,
at the Bell in St. Pauls Church-Yard, 1678.

V tejto knihe vysvetlil, čo znamenal anagram ceiiinosssttuv. Zmyslom anagramu bolo mať dôkaz o tom, že to vedel už pred tromi rokmi (keby sa niekto hádal o prvenstvo objavu).

anagram znamenal toto: ut tensio, sic vis
preklad: aké predĺženie, taká sila
presná formulácia: sila je úmerná predĺženiu

V knihe boli opísané experimenty, na základe ktorých dospel Hooke k tomuto záveru
(a ten dodnes ako jediný nesie jeho meno)

Hookove experimenty

- Prednášky o pružine
  výborne to ilustruje jedna strana s obrázkami
- Fig. 1
  závislosť predĺženia od váhy (bežná pružina)
- Fig. 2
  závislosť predĺženia od váhy (hodinová pruž.)
- Fig.1
  predĺženie zaťaženého kovového lanka

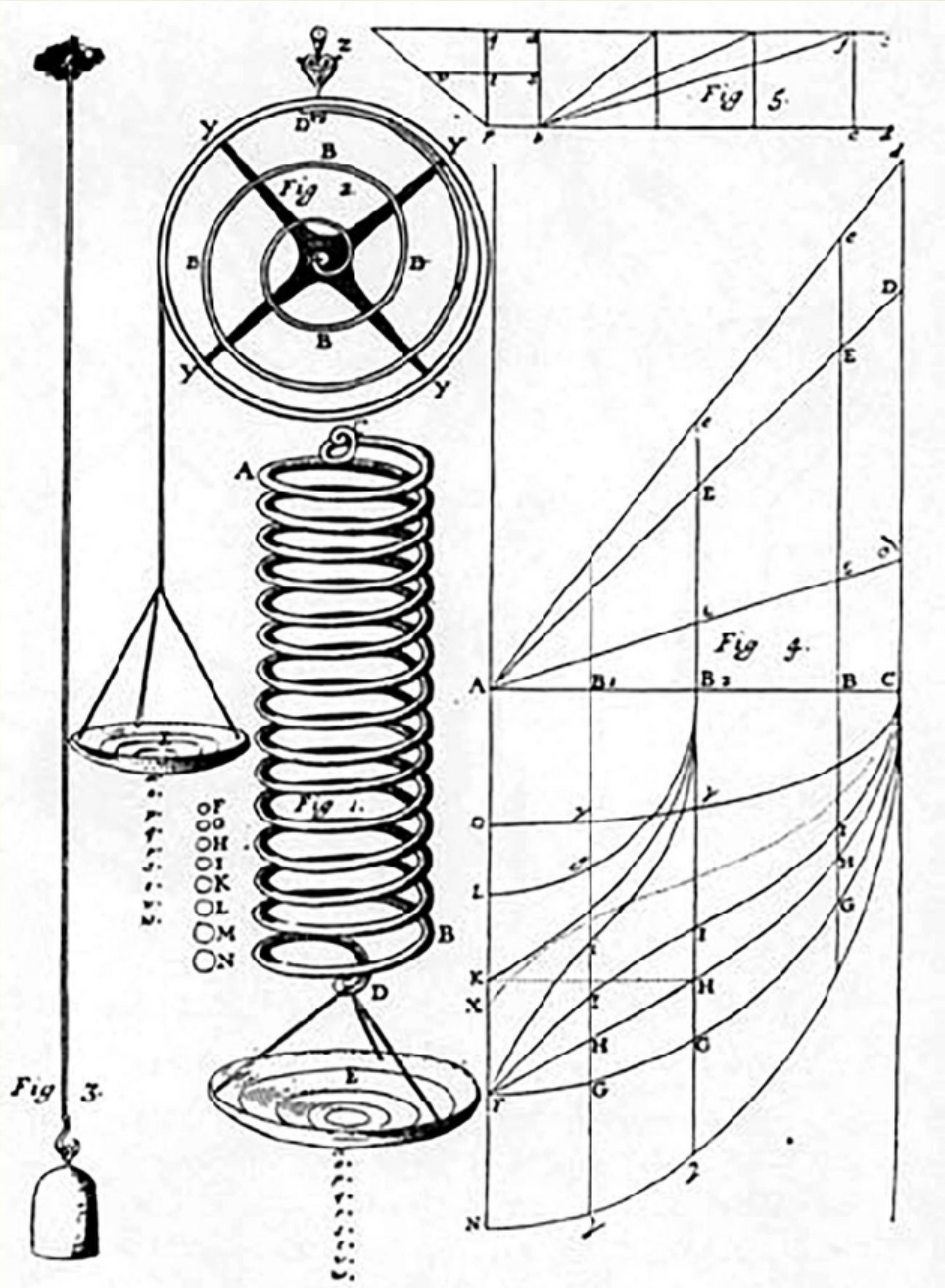


PLATE TO HOOKE'S LECTURE 'OF SPRING' 1678.

FIG. 1. Wire helical spring stretched to points s, p, q, r, s, t, v, w, by weights F. G. H. I. K. L. M. N.
FIG. 2. Watch spring similarly stretched by weights put in pan.
FIG. 3. The 'Springing of a string of Brass Wire 36 ft. long'.
FIG. 4. Diagram of velocities of springs.
FIG. 5. Diagram of law of ascent and descent of heavy bodies.

Tým sme vybavili pružiny. A čo iné veci?

Na každé teleso pôsobí v malom okolí jeho stabilnej rovnováhy sila úmerná výchylke z rovnovážnej polohy.

- nech je sila pôsobiaca na teleso ľubovoľná funkcia polohy $F(x)$
- Taylorov rad: $F(x) = \cancel{F(0)} + \underbrace{F'(0)}_{-k} . x + \cancel{\frac{1}{2}F''(0)\,x^2} + \cdots$
- pre dostatočne malé x sú kvadratický a vyššie členy zanedbateľné (pre $x = 0.001$ je $x^2 = 0.00001$, $x^3 = 0.0000001$, $\cdots$ a ak to nestačí, zoberiem ešte menšie x)
- rovnováha: $F(0) = 0$ stabilná rovnováha: $F'(0) < 0$ (premyslite si)

systémy v okolí stabilnej rovnováhy ($F = -kx$)

Pozoruhodná vlastnosť nášho sveta:
Okolia dostatočne malé z matematického hľadiska
sú často dostatočne veľké z fyzikálneho hľadiska.

Priblíženie $F = -kx$ preto opisuje veľa dôležitých javov.

domy, stromy, listy, mosty, zem, vzduch, …

pohyb telesa na ktoré pôsobí sila $F = -kx$

- pohybová rovnica: $m\,.\,\ddot{x}(t) = -k\,.\,x(t)$ respektíve $m\,.\,\ddot{x}(t) + k\,.\,x(t) = 0$
- je to lineárna dif. rovnica s konšt. koef. a s nulovou pravou stranou
- recept na riešenie týchto rovníc poznáme: riešenie hľadaj v tvare $e^{\alpha t}$
- dosadením do rovnice dostaneme: $m\alpha^2 + k = 0$
- riešenie: $\alpha = \sqrt{-\frac{k}{m}}$ odmocnina zo záporného čísla, čo s tým?
- pripomienka : $i^2 = -1$ $\alpha = \sqrt{-\frac{k}{m}} = \sqrt{-1}\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm\, i\omega$ kde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

pokračovanie riešenia rovnice $m\ddot{x}(t) = -kx(t)$

- všeobecné riešenie (z princípu superpozície): $x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$
- ako tomu máme rozumieť? môže byť poloha telesa komplexné číslo?
- $x(t)$ nemusí byť komplexné, pretože súčet dvoch komplexných čísiel môže byť reálne číslo (napr. $(a + ib) + (a - ib) = 2a$, čo je reálne číslo)
- pripomienka: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$
- čiže $x(t) = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)$ kde $C_1 = c_1 + c_2$ a $C_2 = i(c_1 - c_2)$
- C_1 a C_2 budú reálne, ak bude $c_1 + c_2$ reálne a $c_1 - c_2$ imaginárne číslo (a v ďalšom uvidíme, že také naozaj budú)

dokončenie riešenia rovnice $m\ddot{x}(t) = -kx(t)$

- všeobecné riešenie: $x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$
- počiatočné podmienky: $x(0) = C_1 = x_0$ $\quad \dot{x}(0) = C_2\omega = v_0$
- hodnoty konštánt: $C_1 = x_0$ $\quad C_2 = \frac{v_0}{\omega}$
- jednoznačné riešenie: $x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$
- poznámka: vidíme, že reálne počiatočné podmienky nám dali reálne konštanty C_1 a C_2 (tak, ako sme sľubovali)

dve poznámky

- Celý postup bol ilustráciou toho, že komplexné čísla sú niekedy jednoduchšie ako reálne čísla (tu sa to prejavilo v tom, že naša kvadratická rovnica nemala nijaké reálne riešenie, a pritom mala dve komplexné riešenia). Je preto celkom rozumné a vtipné riešiť celú rovnicu pre komplexnú polohu a dovoliť aj komplexné c_1, c_2. A keď do tohto komplexného riešenia dosadíme reálne počiatočné podmienky, dostaneme riešenie s nulovou imaginárnou časťou. Pomocou komplexných čísiel tak dostávame reálne riešenie.

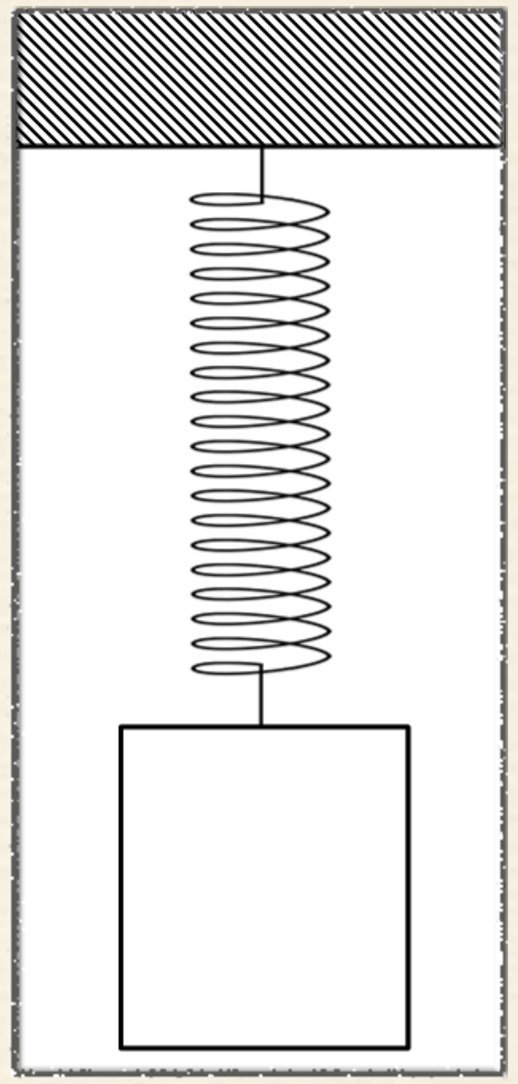
- Náš systém sa volá <u>lineárny harmonický oscilátor</u> (LHO). <u>Lineárne</u> závisí sila od polohy ($F = -kx$), <u>harmonickými</u> sa nazývajú sínusové a cosínusové <u>oscilácie</u> (riešenia pohybovej rovnice $m\,.\,\ddot{x}(t) = -k\,.\,x(t)$)

nepovinná, ale užitočná domáca úloha

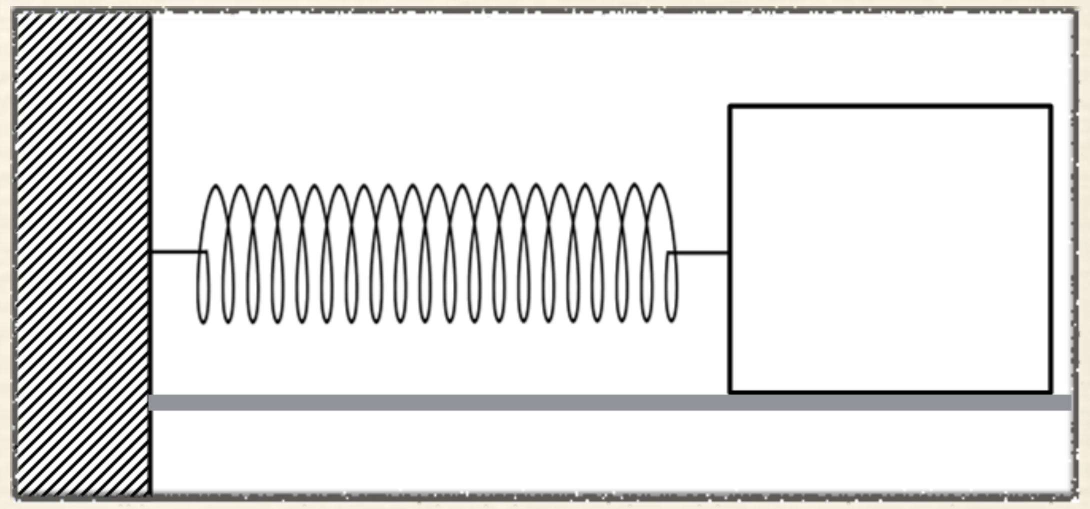
- ukážte, že naše riešenie sa dá napísať aj v tvare $x(t) = a\cos(\omega t + \varphi)$
- vyjadrite konštanty a, φ zo zadaných počiatočných podmienok
- pomocou pythonu alebo iného programu nakreslite pre rôzne hodnoty parametrov m, k, x_0, v_0 grafy závislostí polohy a rýchlosti od času
- napíšte a vyriešte pohybovú rovnicu pre lineárny harmonický oscilátor, ktorého rovnovážna poloha nie je v bode $x = 0$, ale v bode $x = l$

dve užitočné variácie na našu tému

- napíšte pohybovú rovnicu a zistite
ako vyzerá pohyb vertikálneho LHO
v gravitačnom poli



- napíšte pohybovú rovnicu a zistite
ako vyzerá pohyb horizontálneho LHO
so započítaním trenia



užitočná zmienka na záver

- z diferenciálnej rovnice sa dá veľa dozvedieť aj bez explicitného riešenia
- v nejakom zmysle dokonca platí, že “rozumieť” diferenciálnej rovnici znamená vedieť o jej riešeniach povedať všeličo zaujímavé aj bez toho, že by sme ju explicitne vyriešili
- na ilustráciu si ukážeme, ako sa dajú bez vyriešenia diferenciálnej rovnice nahliadnuť dve dôležité veci týkajúce sa pohybu LHO, a síce:
  - periodičnosť pohybu
  - vlnovkovosť grafu (závislosti polohy od času)

pohyb LHO je periodický

- nech je počiatočná poloha x_0 a počiatočná rýchlosť nulová
- zrýchlenie smeruje k počiatku $(F = -kx)$, takže oscilátor sa začne pohybovať smerom k počiatku, pričom veľkosť jeho rýchlosti stále narastá
- keď sa dostane do počiatku $(x = 0)$ má nejakú rýchlosť v a ňou pokračuje ďalej, pričom je spomaľovaný presne tak, ako bol predtým zrýchľovaný (pretože veľkosť jeho zrýchlenia závisí len od vzdialenosti od počiatku)
- keďže spomalenie je "zrkadlovým obrazom" predchádzajúceho zrýchlenia, dostane sa až do bodu $-x_0$, kde sa všetko začne odznova opačným smerom
- výsledkom je periodický pohyb medzi $x_0, -x_0, x_0, -x_0, \cdots$

grafom periodického pohybu LHO je vlnovka

- tentoraz začnime v počiatku, kde sa oscilátor pohybuje nejakou rýchlosťou v
- zrýchlenie je nulové resp. zo začiatku veľmi malé, takže grafom je chvíľku takmer rovná čiara, ktorej sklon je daný práve rýchlosťou v
- s narastajúcou výchylkou narastá spomalenie, takže rýchlosť klesá, a to čoraz rýchlejšie (graf funkcie $x(t)$ sa zakrivuje smerom doprava, a to čoraz viac)
- keď oscilátor dosiahne maximálnu výchylku a nulovú rýchlosť, graf vyzerá ako polovica kopčeka sínusu podobnej vlnovky
- druhú polovicu kopčeka aj druhý (opačný) kopček dostaneme zrkadlovým doplnením (úvahy rovnaké ako pri periodičnosti) a potom sa to celé opakuje