Veľa oscilátorov a veľa (co)sínusov

lineárny harmonický oscilátor - dokončenie

mechanika 12

čo sme sa o LHO naučili doteraz

Rozumieme tomu, prečo je LHO mimoriadne často sa vyskytujúci fyzikálny systém, a že to rozhodne nie len teliesko na pružinke.

Vieme vyriešiť pohybovú rovnicu pre netlmený aj tlmený LHO s (co)sínusovou vynucujúcou silou.

Z riešení vidíme, že za istých okolností dochádza k zvláštnemu javu, ktorý nazývame rezonanciou.

čo sa o LHO ešte potrebujeme naučiť

Praktické príklady rezonancie sa týkajú mostov, budov, hudobných nástrojov a podobne. Naše výsledky sa týkajú jedného oscilátora.

Bolo by dobré chápať v akom zmysle sú výsledky pre jeden oscilátor relevantné pre mosty a pod.

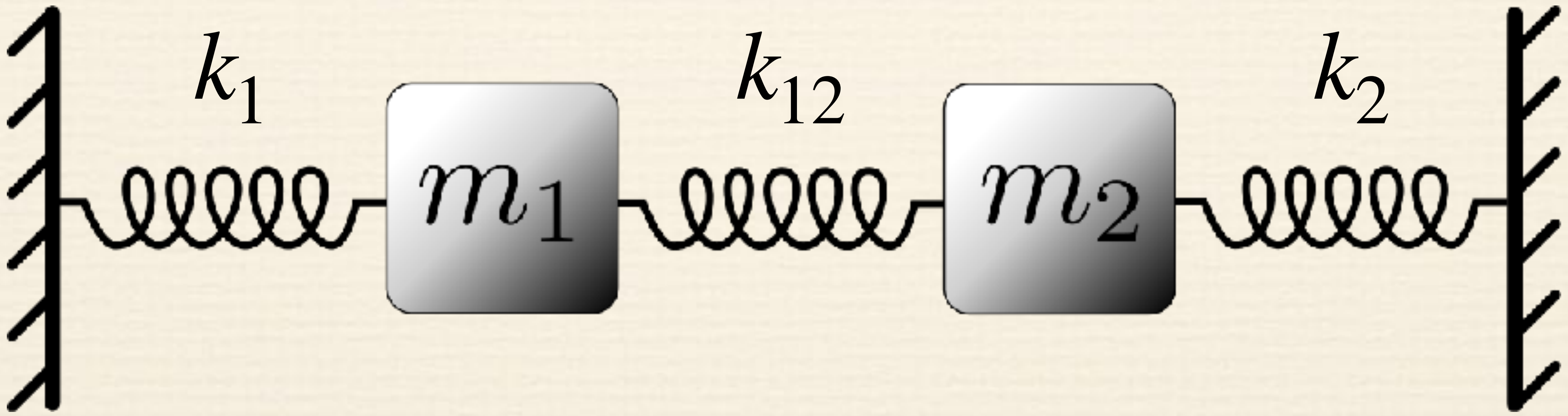
Bolo by dobré chápať, prečo sú veľmi špeciálne (co)sínusové vynucujúce sily také dôležité.

this is a free lunch

- nič z tejto prednášky nie je v sylaboch pre prvý semester
- to znamená, že nič z toho sa nebude vyžadovať na skúške
- celá táto prednáška je tu len preto, lebo ide o zaujímavé a dôležité veci, o ktorých je dobré dozvedieť sa už teraz

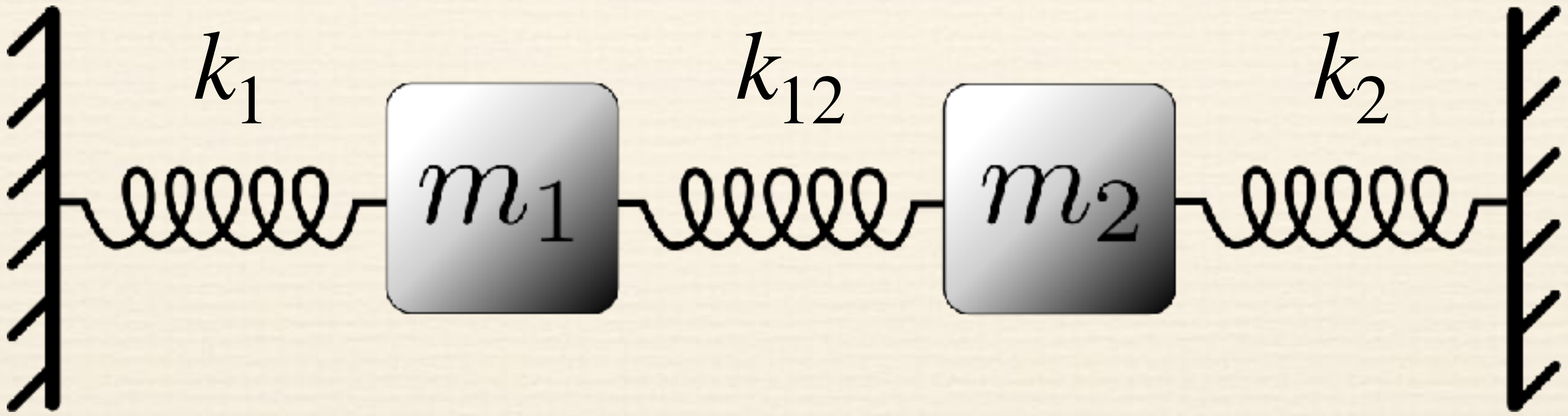
viazané oscilátory

- pohybové rovnice pre LHO už vieme riešiť a základným vlastnostiam riešení vieme porozumieť dokonca aj bez ich explicitnej znalosti
- ale stále nevieme, prečo sú výsledky pre jeden oscilátor relevantné aj pre oveľa zložitejšie štruktúry, ako sú hudobné nástroje alebo mosty
- cesta k pochopeniu toho, prečo je to tak, vedie cez najjednoduchšiu "zložitejšiu štruktúru", a tou sú dva navzájom previazané LHO



okolie stabilnej rovnováhy

- opäť platí, že telieska na pružinkách nie sú veľmi zaujímavý systém
- oveľa všeobecnejší systém: dve veci, na ktoré pôsobia nejaké vonkajšie sily a okrem toho ešte pôsobia nejakou vzájomnou silou medzi sebou
- v okolí stabilnej rovnováhy sa systém bude chovať ako dva viazané oscilátory, t.j. ako telieska na troch pružinkách (3 sily, 3 Taylorove rady)

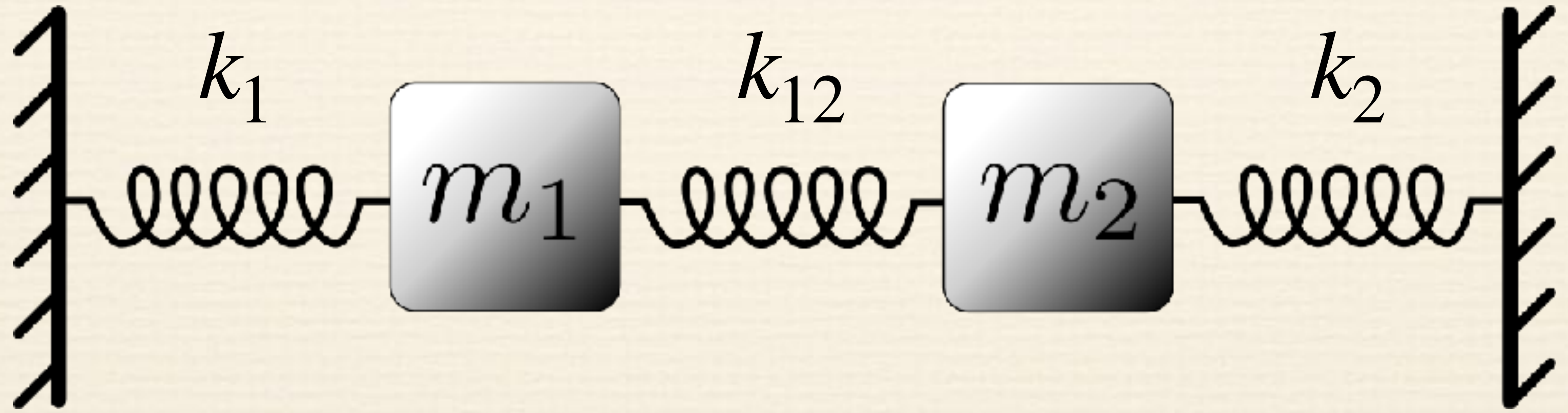


jednoduchý špeciálny prípad

- pohybové rovnice: $m_1\ddot{x}_1(t) = -k_1x_1(t) - k_{12}\left(x_1(t) - x_2(t)\right)$
  $m_2\ddot{x}_2(t) = -k_2x_2(t) - k_{12}\left(x_2(t) - x_1(t)\right)$

- to, čo chceme vidieť, sa najľahšie vidí v špeciálnom prípade rovnakých hmotností $m_1 = m_2$ a rovnakých tuhostí $k_1 = k_2$

- takže budeme uvažovať takýto prípad



abrakadabra

- pohybové rovnice: $m\ddot{x}_1(t) = -\,kx_1(t) - k_{12}\left(x_1(t) - x_2(t)\right)$
  $$m\ddot{x}_2(t) = -\,kx_2(t) - k_{12}\left(x_2(t) - x_1(t)\right)$$
- základný trik: uvažujme nové premenné $X_1 = x_1 - x_2 \quad X_2 = x_1 + x_2$
- nové rovnice získame odčítaním a sčítaním pôvodných rovníc:
  $$m\ddot{X}_1(t) = -\,kX_1(t) - 2k_{12}X_1(t)$$
  $$m\ddot{X}_2(t) = -\,kX_2(t)$$
- dva viazané oscilátory nám prešli na dva od seba nezávislé oscilátory
- X_1 a X_2 kmitajú s uhlovými frekv. $\omega_1 = \sqrt{(k + 2k_{12})/m}$ a $\omega_2 = \sqrt{k/m}$

rezonancia

- pridajme cosínusové vynucujúce sily
- pohybové rovnice: $$m\ddot{x}_1(t) + kx_1(t) + k_{12}\left(x_1(t) - x_2(t)\right) = F_1 \cos \Omega_1 t$$ $$m\ddot{x}_2(t) + kx_2(t) + k_{12}\left(x_2(t) - x_1(t)\right) = F_2 \cos \Omega_2 t$$
- po triku: $$m\ddot{X}_1(t) + \left(k + 2k_{12}\right) X_1(t) = F_1 \cos \Omega_1 t - F_2 \cos \Omega_2 t$$ $$m\ddot{X}_2(t) + kX_2(t) = F_1 \cos \Omega_1 t + F_2 \cos \Omega_2 t$$
- riešenia poznáme (superpozície riešení pre jednotlivé vynucujúce sily)
- k rezonancii dochádza, keď je niektorá z vynucujúcich frekvencií Ω_1, Ω_2 rovná niektorej z vlastných frekvencií ω_1, ω_2

zovšeobecnenia

- ak by sme neuvažovali náš špeciálny, ale pôvodný všeobecný prípad, dosiahli by sme rovnaké výsledky (čiže premenu vzájomne závislých oscilátorov na nezávislé) vhodnými lineárnymi kombináciami

$$X_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \quad \text{a} \quad X_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2$$

- ak by bolo oscilátorov viac, zaviedli by sme viac nových premenných

- týmto spôsobom sa vždy podarí previesť systém na nezávislé oscilátory

- vrátime sa k tomu v ďalšom semestri a potom to bude aj na prednáške z teoretickej mechaniky, využívať sa budú užitočné techniky a pojmy z lineárnej algebry (diagonalizácia matíc, vlastné hodnoty, vlastné vektory)

Fourierove rady

- prečo sme skúmali práve sínusové a cosínusové vynucujúce sily?
- pretože sa z nich dajú zložiť ľubovoľné sily (volá sa to Fourierov rad a je to popri Taylorovom rade ďalšie významné matematické kladivo)
- ak vieme zložiť ľubovoľnú silu zo sínusov a cosínusov a zároveň vieme vyriešiť linárnu dif. rovnicu so sínusovou alebo cosínusovou pravou stranou, potom vieme vďaka pricípu superpozície vyriešiť túto rovnicu s ľubovoľnou pravou stranou
- čiže skúmaním (co)sínusovýh síl sme v skutočnosti skúmali všetky sily

Joseph Fourier (1768-1830) objavil dve mimoriadne dôležité veci: vynikajúcu metódu riešenia diferenciálnych rovníc s viacerými premennými (hovorí sa im parciálne diferenciálne rovnice a sú základným matematickým jazykom fyziky) a rozvoj funkcií do nekonečných radov zložených zo sínusov a cosínusov (čo je popri Taylorovom rade druhé veľmi účinné matematické kladivo).

súčasníci

Napoleon Bonaparte, Ludwig van Beethoven, Johann Wolfgang Goethe, Shaka Zulu, Jozef Ignác Bajza

ako vyzerá Fourierov rad

- nech $f(t)$ je slušná (napr. spojitá) funkcia definovaná na intervale $(0,T)$ každá takáto funkcia sa dá napísať v tvare nekonečného radu

$$f(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

kde

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\,dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\,dt$$

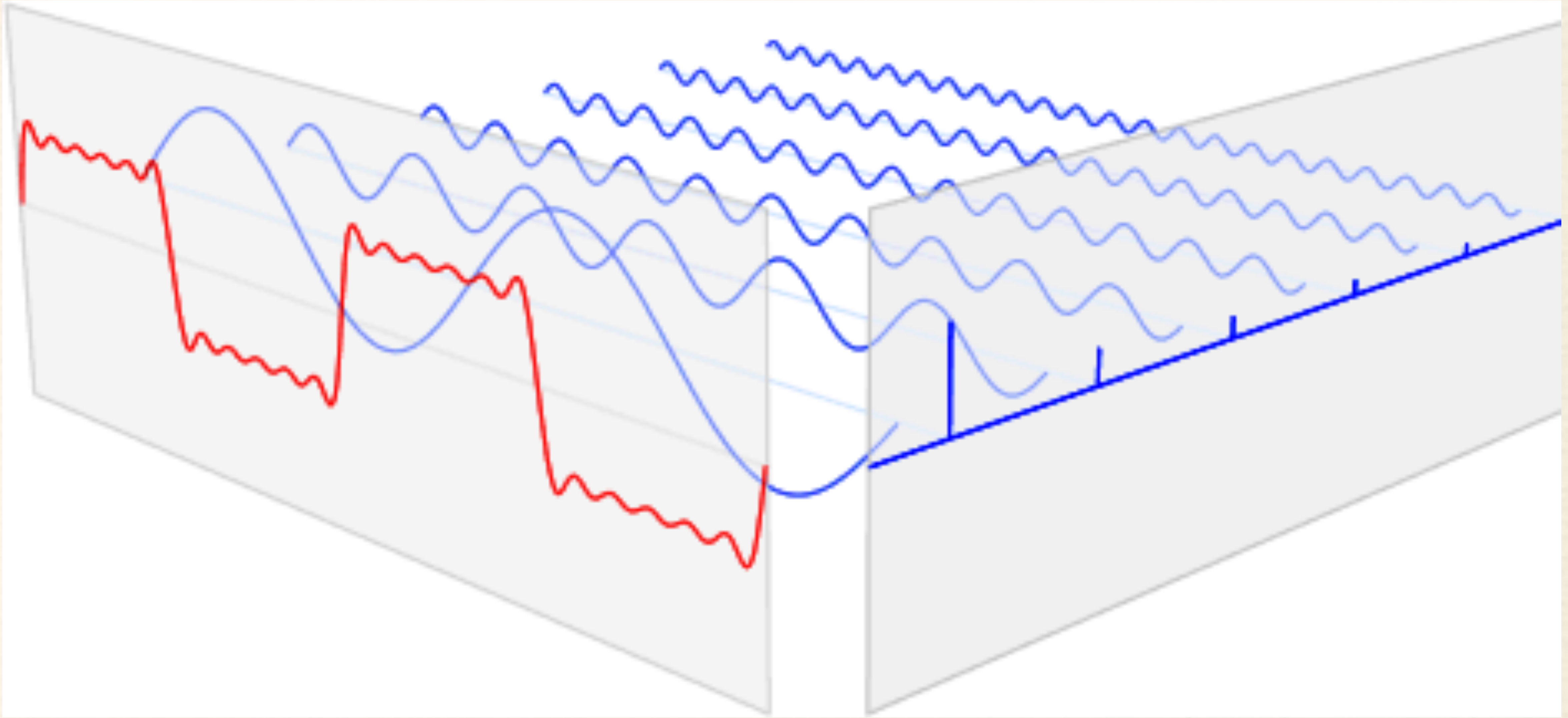
- na prvý pohľad to vyzerá hrôzostrašne, ale pre nás je v tejto chvílí dôležité len to, že prakticky "všetko" sa dá poskladať zo sínusov a cosínusov

nájdi si sám, pohraj sa sám

nepovinná užitočná hra

nájdite si na internete nejaké webstránky s appletmi, ktoré počítajú koeficienty Fourierovho radu a kreslia výslednú funkciu, a dosýtosti sa s nimi pohrajte

iná možnosť: spustite si python program Fourier zo stránky Vlada Černého a hrajte sa



modré: jednotlivé sínusy konkrétneho Fourierovho radu (cosínusy v tomto konkrétnom rade nie sú, t. j. ich koeficienty sú nulové)
červená: výsledná funkcia – súčet Fourierovho radu (konečného, len so šiestimi nenulovými koeficientmi)

nakoľko prirodzený je Fourierov rad?

- na prvý pohľad vyzerá Fourierov rad ako nejaký kúzelnícky trik
- podobne na nás mohol pôsobiť aj Taylorov rad, ale tam sa nám podarilo vysvetliť si, že ide vlastne o celkom prirodzenú vec
- existuje nejaké podobné vysvetlenie kúzla aj pre Fourierov rad?
- áno existuje, ale odložíme si ho až na budúci semester (vtedy to bude zrozumiteľnejšie, aj keď zvládli by sme to aj teraz)
- presnú formuláciu a dôkazy necháme na prednášky z matematiky

zhrnutie: pochodovanie na moste

- most: veľa súčiastok tvoriacich celok v stabilnej rovnováhe
- čiže: sústava viazaných oscilátorov ekvivalentná sústave nezávislých oscilátorov s (uhlovými) frekvenciami $\omega_1, \omega_2, \cdots$
- pochodovanie: periodická sila s nejakou periódou T
- Fourierov rad: superpozícia sínusov a cosínusov s (uhlovými) frekvenciami $\Omega_1, \Omega_2, \cdots$ kde $\Omega_n = 2\pi n/T$
- k rezonancii dochádza, ak pre nejaké m, n platí $\omega_m \approx \Omega_n$

záverečné poznámky k Tacoma Narrows Bridge

- zrútenie mostu Tacoma Narrows Bridge (ktorým sme začali prednášku o rezonancii) sa často uvádza ako príklad rezonancie, pričom periodická sila by v tomto prípade mala vznikať v dôsledku turbulencií, ku ktorým bežne dochádza počas fúkania vetra okolo nejakej prekážky, napr. mosta
- ako vznikajú tieto turbulencie, to vysvetľuje hydrodynamika (čo je pomerne ťažká časť fyziky, pričom jav turbulencie je jedným z najzložitejších a najťažšie pochopiteľných javov v celej fyzike)
- podrobná analýza zrútenia Tacoma Narrows Bridge však ukázala, že model mosta ako viazaných oscilátorov a vetra ako zdroja periodickej vynucujúcej sily nie je v tomto prípade dostatočný na vysvetlenie veľmi špecifického celkového rozkmitania mosta a následnej katastrofy
- vysvetlenie tejto konkrétnej katastrofy a dosť špecifických kmitov (viditeľných na videu) vyžaduje skúmať súčasne (nie oddelene) dynamiku mosta a vetra (také niečo je však ďaleko za hranicami úvodného kurz fyziky)