

Trojrozmerný svet

pohybová rovnica a jej riešenie v 3D

mechanika 14

čo sme sa naučili doteraz I

v prvej časti sme sa naučili najmä toto:

- ❖ chápať zákon sily $\vec{F} = m\vec{a}$ ako pohybovú rovnicu, ktorej riešením vieme zistiť, ako vyzerá pohyb telesa (ak poznáme sily)
- ❖ poznať sily, ktoré na telesá pôsobia v bežných situáciách – gravitačnú, elektromagnetickú a jej prejavy (trenie, odpor prostredia, pružnosť)
- ❖ riešiť pohybovú rovnicu v 2D či 3D univerzálnou (aj keď len približnou) metódou “krok za krokom”

• počiatočné podmienky:

$$x_0 = 0 \quad z_0 = 1.5$$

$$v_{x0} = 35 \quad v_{z0} = 0$$

• počítanie

$$v_n = \text{sqrt}(v_{xn}^2 + v_{zn}^2)$$

$$a_{xn} = (-0.001 v_n v_{xn}) / m$$

$$a_{zn} = (mg - 0.001 v_n v_{zn}) / m$$

$$x_{n+1} = x_n + v_{xn} * dt$$

$$z_{n+1} = z_n + v_{zn} * dt$$

$$v_{x_{n+1}} = v_{xn} + a_{xn} * dt$$

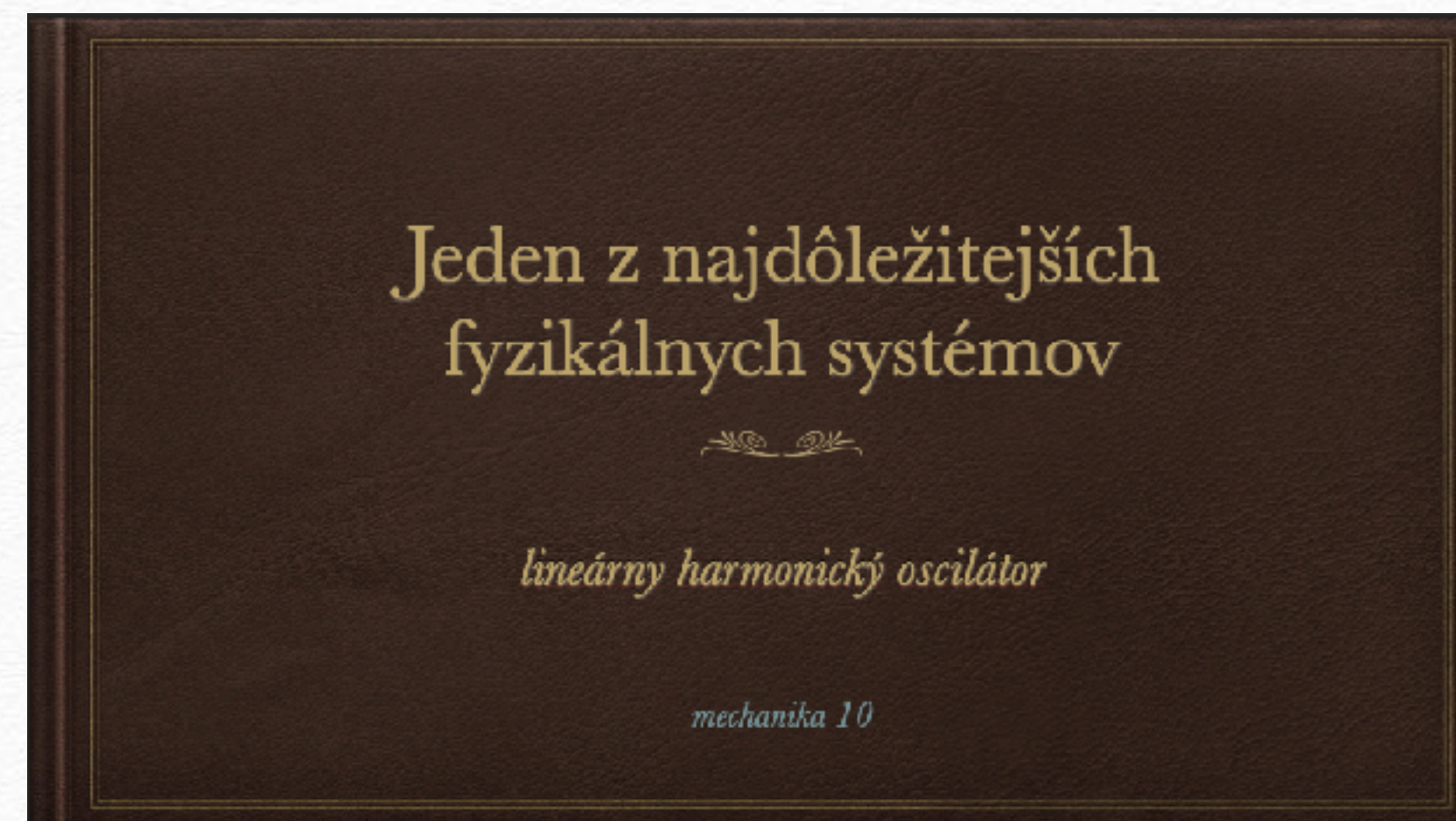
$$v_{z_{n+1}} = v_{zn} + a_{zn} * dt$$



čo sme sa naučili doteraz II

v druhej časti najmä toto:

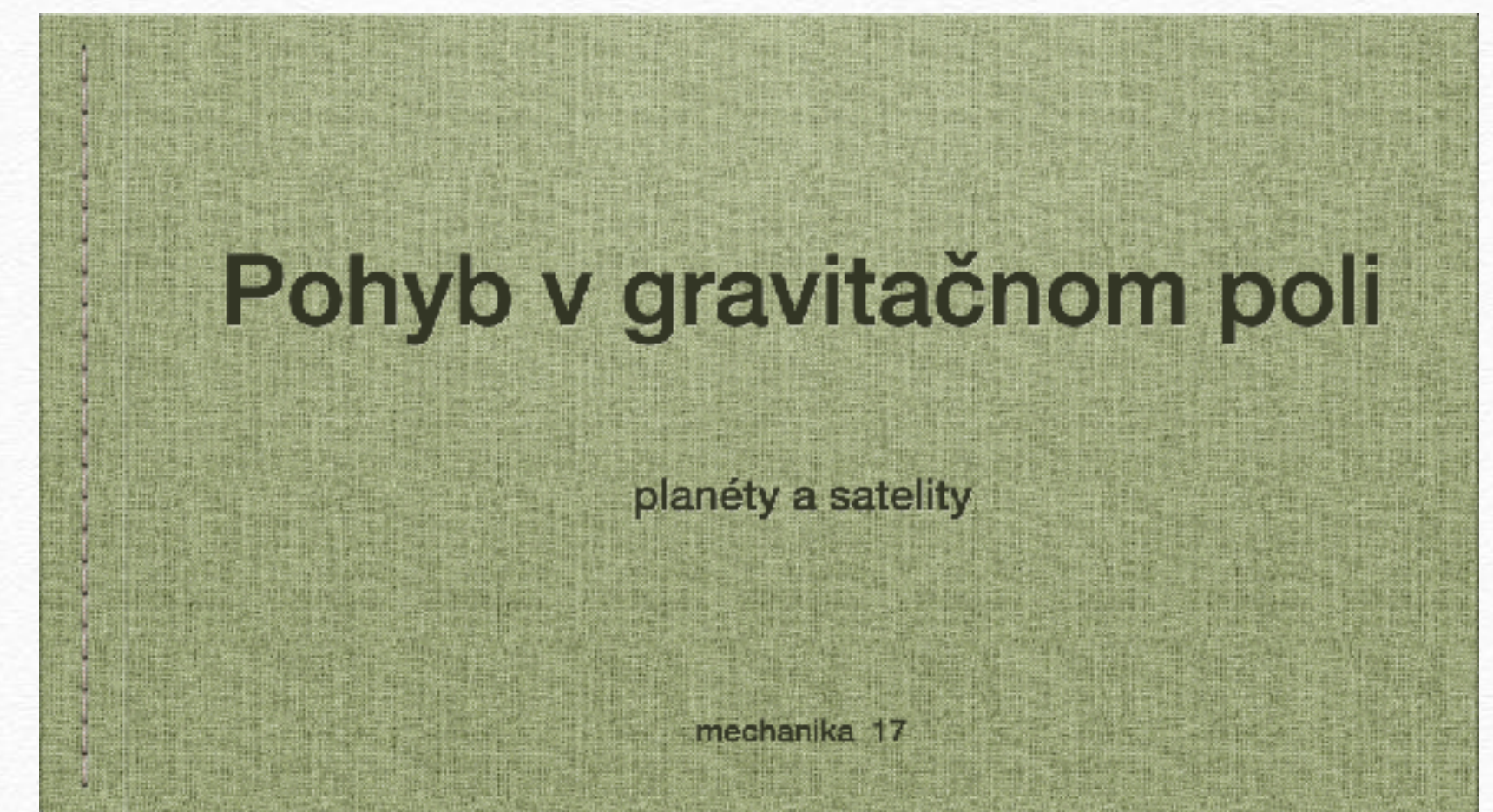
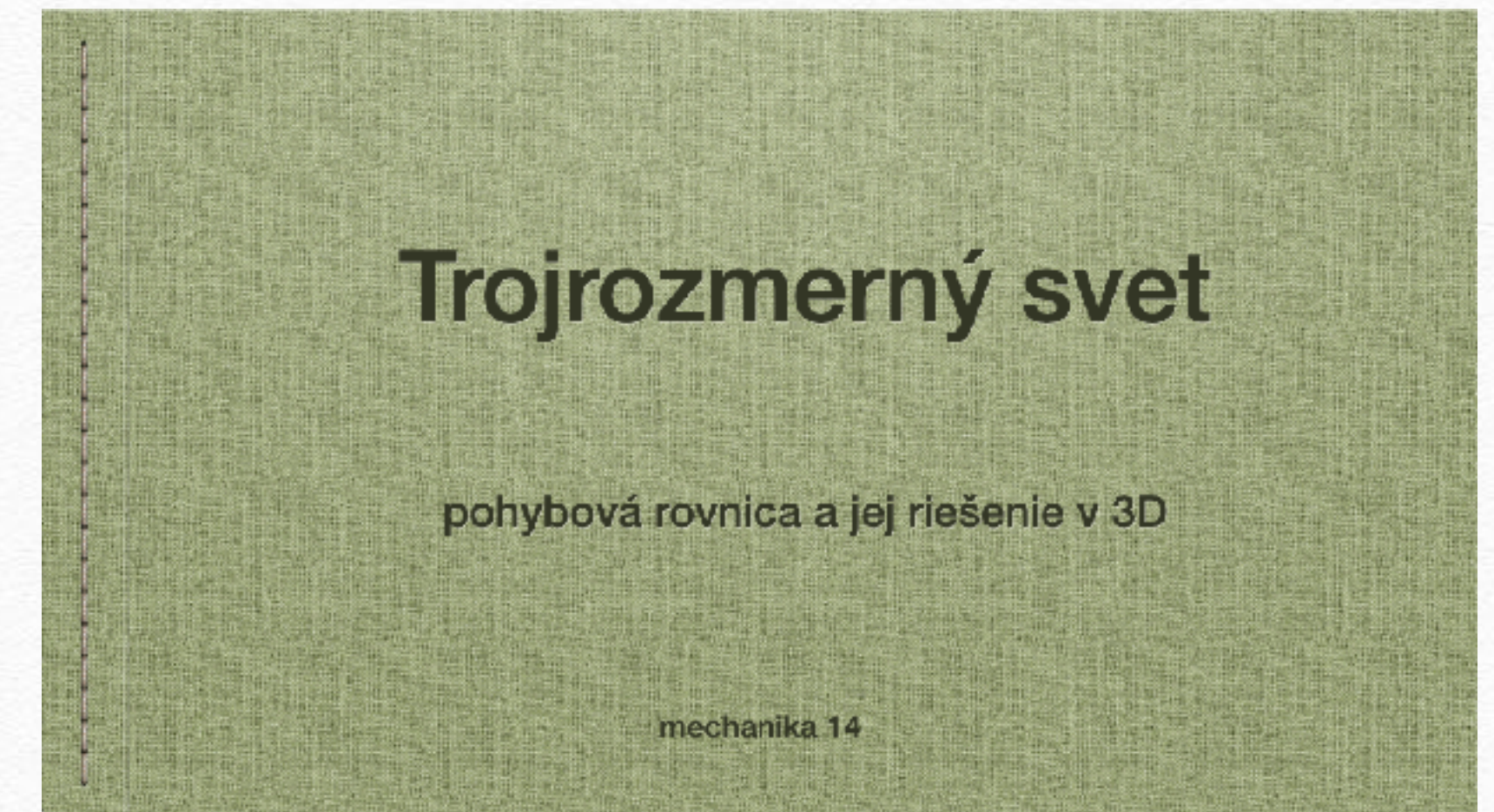
- ❖ chápať pohybovú rovnicu v jednom rozmere ako diferenciálnu rovnicu $m\ddot{x}(t) = F(x(t), \dot{x}(t), t)$
- ❖ riešiť (aj keď niekedy len uhádnutím a overením) jeden veľmi dôležitý typ diferenciálnych rovníc (lineárne s konštantnými koeficientami)
- ❖ riešiť a rozumieť riešeniam pohybovej rovnice v jednom mimoriadne dôležitom konkrétnom prípade (lineárny harmonický oscilátor, a to aj s tlmením a nejakou vynucujúcou silou)



čo sa chceme naučiť teraz

v tretej časti najmä toto:

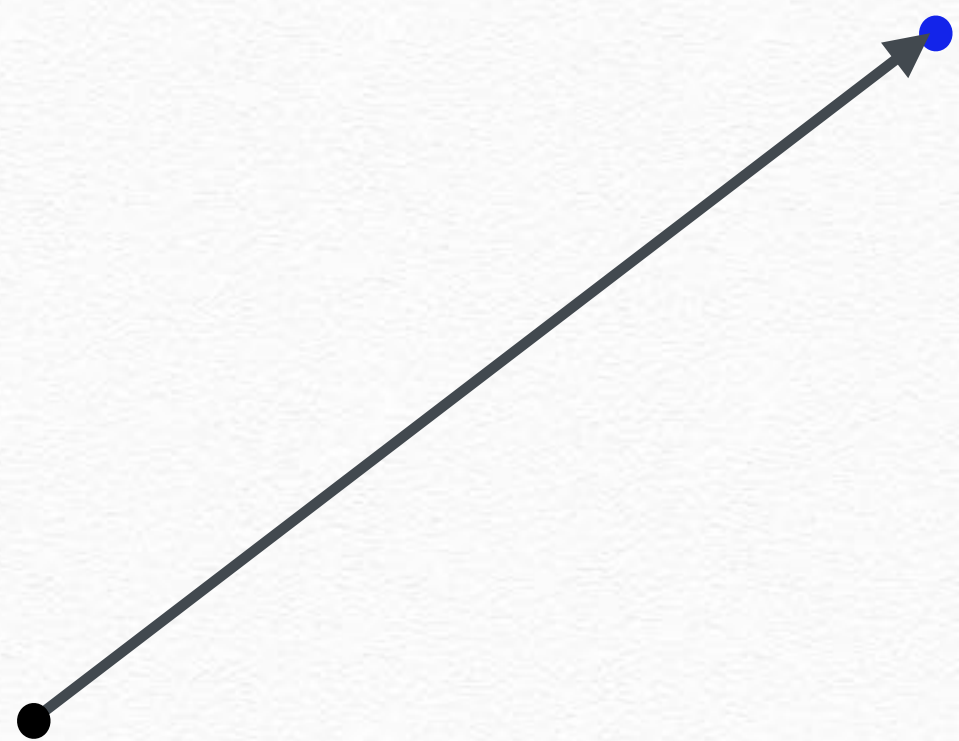
- ❖ diferenciálne rovnice vieme zatiaľ riešiť
 - a) **všetky** v ľubovoľnom počte rozmerov **približne**
 - b) **niektoré** v jednom rozmere **presne**
- ❖ teraz sa chceme naučiť riešiť aspoň niektoré rovnice presne aj vo vyššom počte rozmerov
- ❖ okrem toho sa naučíme niektoré užitočné triky, pomocou ktorých sa dá dozvedieť veľa vecí aj bez explicitného riešenia rovníc (tieto triky potom použijeme na porozumenie planetárnemu pohybu)



poloha bodu v troch rozmeroch



❖ ak mám na mysli nejaký bod v 3D priestore, jeho polohu oznámim ostatným tak, že naň ukážem: “tu” (toto je ten bod)

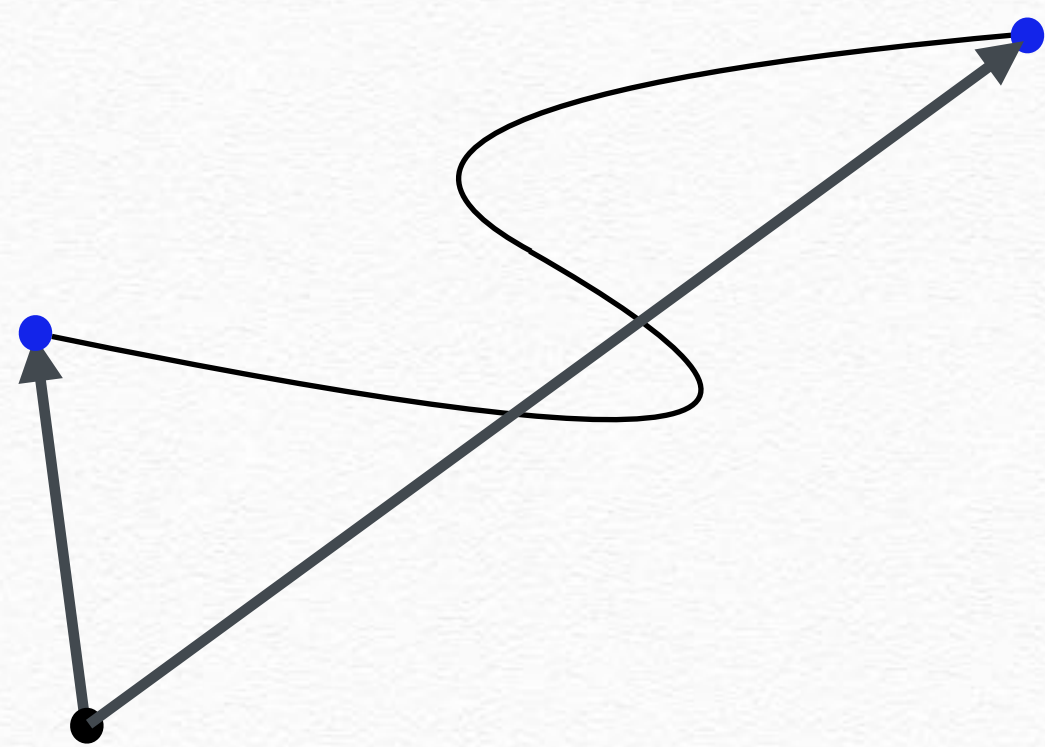


❖ ak je to ďaleko, tak ukážem: je to “týmto smerom” a k tomu ešte musím povedať “ako ďaleko” (šípka tým smerom a s tou veľkosťou sa volá polohový vektor daného bodu)

pohyb bodu v troch rozmeroch

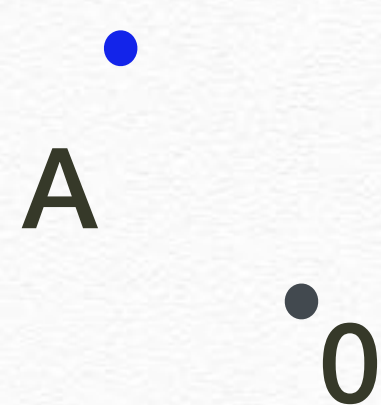


- ❖ pohyb bodu je opísaný jeho polohou v rôznych časoch, čiže funkciou $B(t)$ (pod tým B rozumieme v čase sa meniace “tu” pohybujúceho sa bodu)

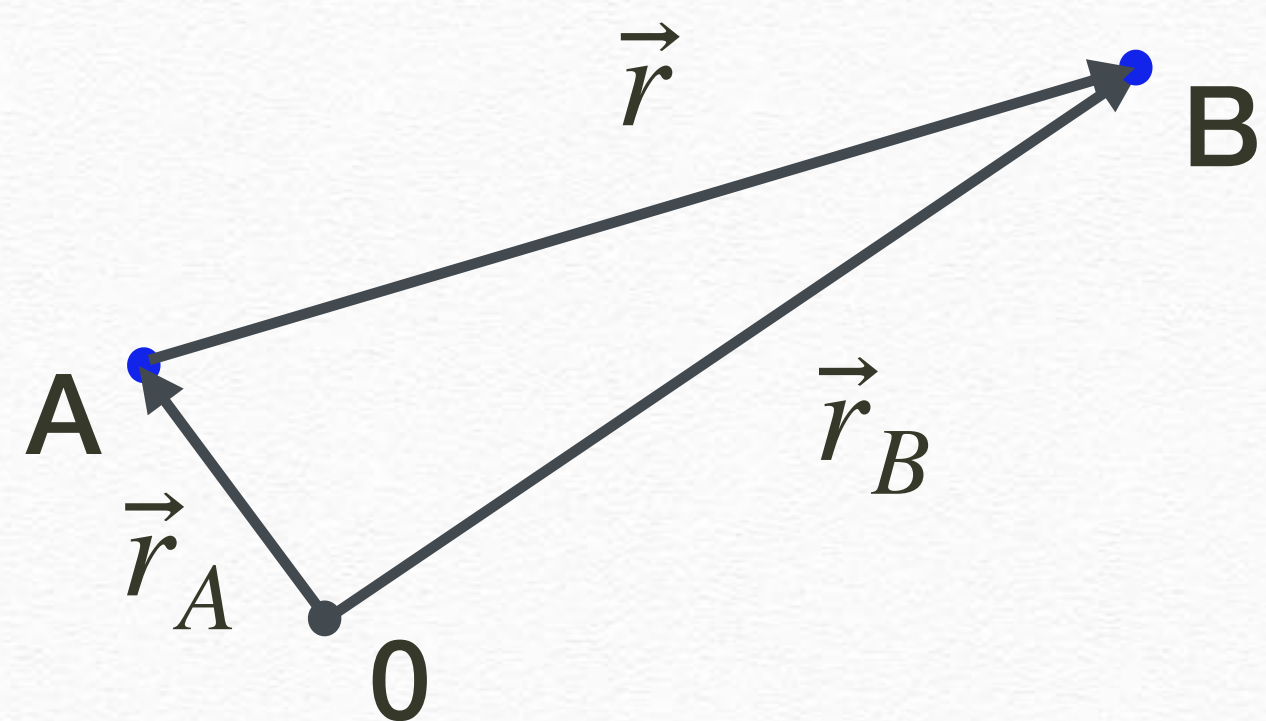


- ❖ iný možný opis toho istého pohybu nám dáva závislosť polohového vektora daného bodu od času $\vec{r}(t)$ (my budeme používať tento opis)

súčet a rozdiel polohových vektorov

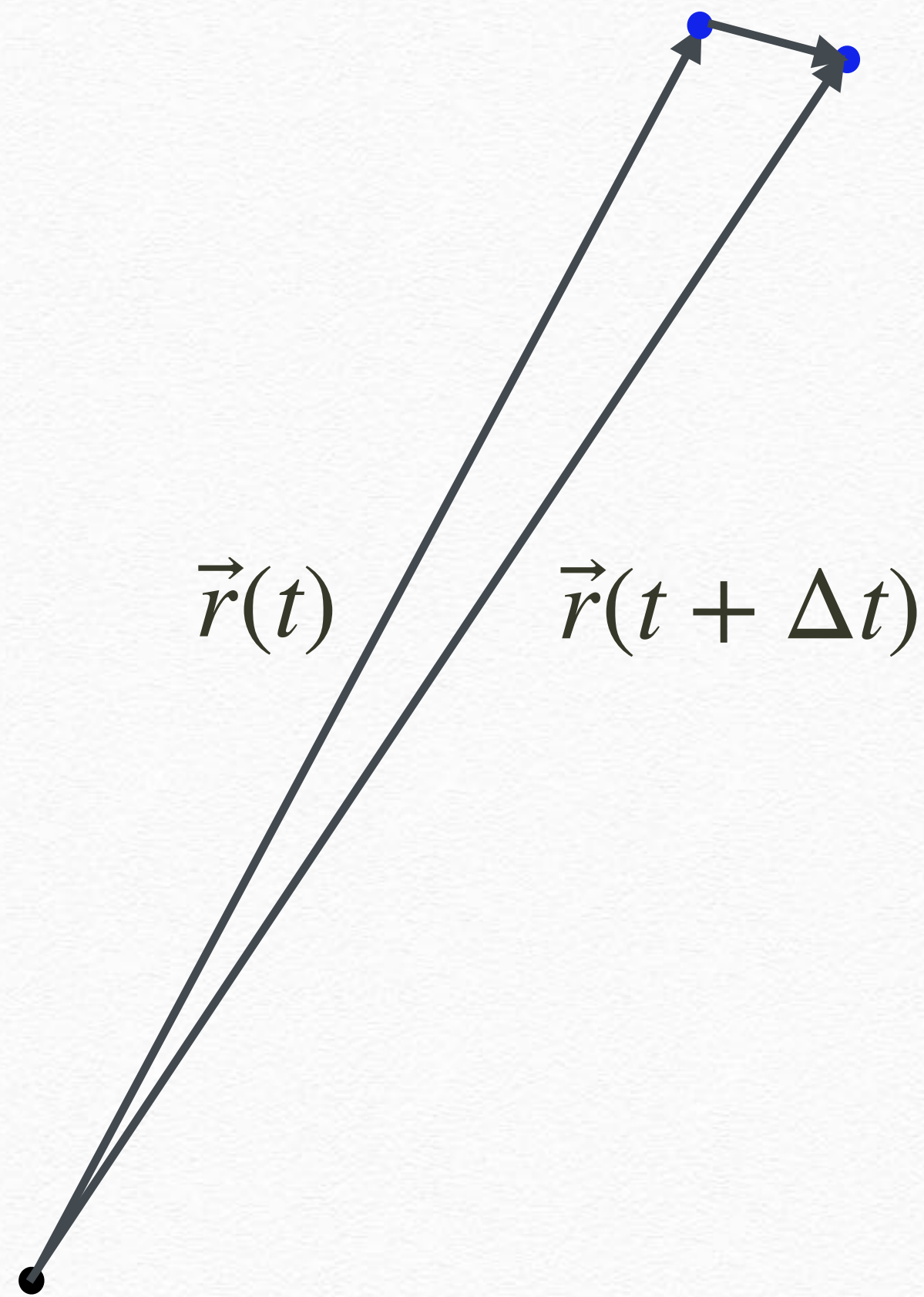


- B ❖ body v priestore nevieme sčítavať, nemáme nijakú prirodzenú definíciu súčtu bodov v priestore: $A + B = ?$



- ❖ vektory (šípky) vieme sčítavať, t. j. existuje celkom prirodzená definícia súčtu (a teda aj rozdielu) vektorov $\vec{r}_A + \vec{r} = \vec{r}_B$ resp. $\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

rýchlosť v troch rozmeroch

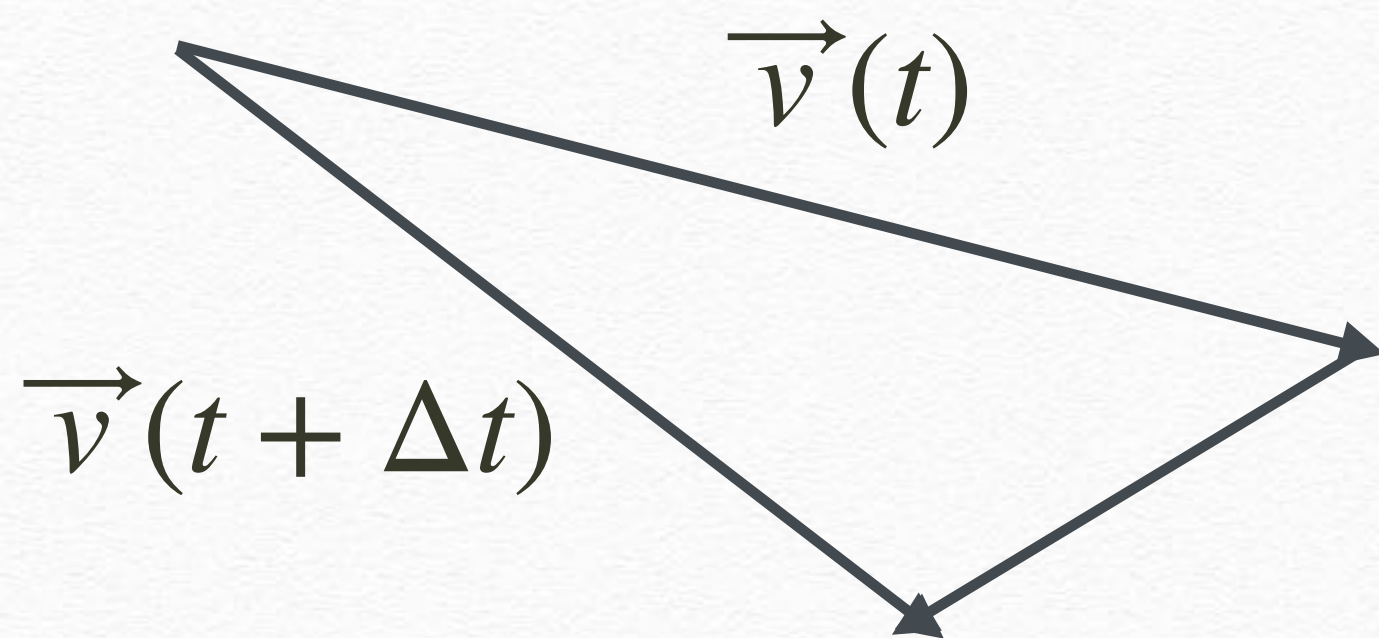


- ❖ priamočiare zovšeobecnenie z jednorozmerného prípadu:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

- ❖ smer rýchlosti môže byť zjavne úplne iný, ako smer polohového vektora

zrýchlenie v troch rozmeroch



- ❖ rýchlosť zmeny rýchlosti (tak, ako v jednom rozmere)

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

- ❖ zrýchlenie je nenulové aj vtedy, keď sa veľkosť rýchlosti nemení, ale mení sa jej smer

Newtonova pohybová rovnica v 3D

$$m \cdot \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F} \left(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t \right)$$

- ❖ je to vektorová rovnica, v ktorej je neznámou šípka (vektor), ktorá je funkciou času
- ❖ pre praktické riešenie je často najvýhodnejšie napísať túto rovnicu v súradniciach, ako tri rovnice pre tri súradnice
- ❖ pritom je ale dobré si uvedomiť, že rovnica samotná platí ako rovnica pre šípky, nielen pre ich súradnice

elementárny príklad: šikmý vrh

- ❖ pôsobiaca sila:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g}$$

- ❖ pohybová rovnica:

$$m \cdot \ddot{\vec{r}}(t) = m \cdot \vec{g}$$

- ❖ riešenie:

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2} \vec{g} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

dôkaz: výpočet druhej deriv.

- ❖ v súradniciach:

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = -mg$$

- ❖ pohybová rovnica:

$$\ddot{x}(t) = 0, \quad \ddot{y}(t) = 0, \quad \ddot{z}(t) = -g$$

- ❖ riešenie:

vyšla nám sústava nezávislých a ľahkých rovníc, ktorú musí každý vedieť vyriešiť samostatne

nevýhoda elementárneho príkladu

- ❖ utvrdzuje začiatočníkov v jednej prirodzenej a bežnej chybe
- ❖ no schválne, či ju urobíte: prepíšte pohybovú rovnicu $m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)$ do kartézskych súradníc
- ❖ x-ová zložka $m\ddot{x}(t) = F_x(x(t), \dot{x}(t), t)$ a ostatné podobne

TOTO JE ZLE

správny prepis do súradníc

ak niečo závisí od vektora, tak to vo všeobecnosti závisí od všetkých jeho zložiek, nie len od jednej z nich

$$m\ddot{x}(t) = F_x(x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t), t)$$

$$m\ddot{y}(t) = F_y(x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t), t)$$

$$m\ddot{z}(t) = F_z(x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t), t)$$

vo všeobecnosti ide o sústavu navzájom previazaných rovníc

príklad: vrh s odporom prostredia

❖ pri rýchlostiach bežných pri vrhoch $\vec{F} = m \vec{g} - \gamma v \vec{v}$

❖ čiže $F_x = -\gamma \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} v_x$ a podobne pre F_y a F_z

❖ pohybová rovnica v kartézskych súradniciach:

$$m\ddot{x}(t) = -\gamma \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} \dot{x}(t)$$

$$m\ddot{y}(t) = -\gamma \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} \dot{y}(t)$$

$$m\ddot{z}(t) = -mg - \gamma \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} \dot{z}(t)$$

didaktický povzdych

- ❖ vrh s odporom prostredia vedie na previazané rovnice, ktoré sú ale nelineárne, a také nevieme presne riešiť
- ❖ preto sa v základných kurzoch skoro vždy vynechávajú
- ❖ takže človek sa tam často vôbec nestretne s príkladom previazaných rovníc v kartézskych súradniciach
- ❖ čo je škoda (lebo si môže odnieť celkom nesprávny pocit, že pohyb v 3D sa dá vždy zložiť z troch nezávislých 1D pohybov)

a pritom existuje výborný príklad

- ❖ pohyb po kružnici je príklad 2D pohybu, ktorý nie je zložením dvoch nezávislých pohybov v kartézskych súradniciach
- ❖ lenže analýza tohto pohybu sa robieva špecifickým spôsobom, málokedy ho získame ako výsledok riešenia pohybových rovníc
- ❖ my to urobíme obidvomi spôsobmi (lebo je to dôležité a poučné)
- ❖ k tomu ale musíme vedieť niečo o vektorovom súčine

**matematická vsuvka
skalárny a vektorový súčin**

dva dôležité súčiny vektorov

skalárny súčin

- ❖ každej dvojici vektorov priraduje číslo rovné súčinu ich veľkostí a kosínusu uhla medzi nimi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a b \cos \theta$$

- ❖ skalárny súčin je vlastne súčinom veľkosti jedného vektora a priemetu veľkosti druhého vektora do smeru toho prvého (vidno okamžite, ak si človek nakreslí príslušný obrázok)

vektorový súčin

- ❖ každej dvojici vektorov priraduje vektor kolmý na obidva vektory, ktorého veľkosť je

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a b \sin \theta$$

- ❖ orientácia vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ je daná takzvaným pravidlom pravej ruky: ak \vec{a} vstupuje do dlane pravej ruky a prsty ukazujú smer \vec{b} , potom vztýčený palec ukazuje smer $\vec{a} \times \vec{b}$

prečo sú dôležité

skalárny súčin

- ❖ mnohé dôležité fyzikálne veličiny (napríklad práca, ale aj rôzne iné) sú definované skalárnymi súčini nejakých vektorov
- ❖ v rôznych abstraktnejších lineárnych priestoroch skalárny súčin definuje veľkosti vektorov a uhly medzi nimi:

$$b = \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}} \quad \theta = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}$$

vektorový súčin

- ❖ mnohé dôležité fyzikálne veličiny (napríklad magnetická sila pôsobiaca na pohybujúci sa náboj, ale aj iné) sú vektorovými súčini iných vektorov
- ❖ v rôznych abstraktnejších lineárnych priestoroch vektorový súčin úzko súvisí s definíciou objemu, ktorá (podobne ako veľkosti a uhly) vôbec nemusí byť taká intuitívne zrejímavá, ako je v Euklidovskom priestore

dôležité vlastnosti dôležitých súčínov

skalárny súčin

- ❖ je symetrický

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

- ❖ je lineárny

$$\vec{a} \cdot \lambda \vec{b} = \lambda \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

- ❖ pre kolmé vektory

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

vektorový súčin

- ❖ je antisymetrický

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

- ❖ je lineárny

$$\vec{a} \times \lambda \vec{b} = \lambda \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

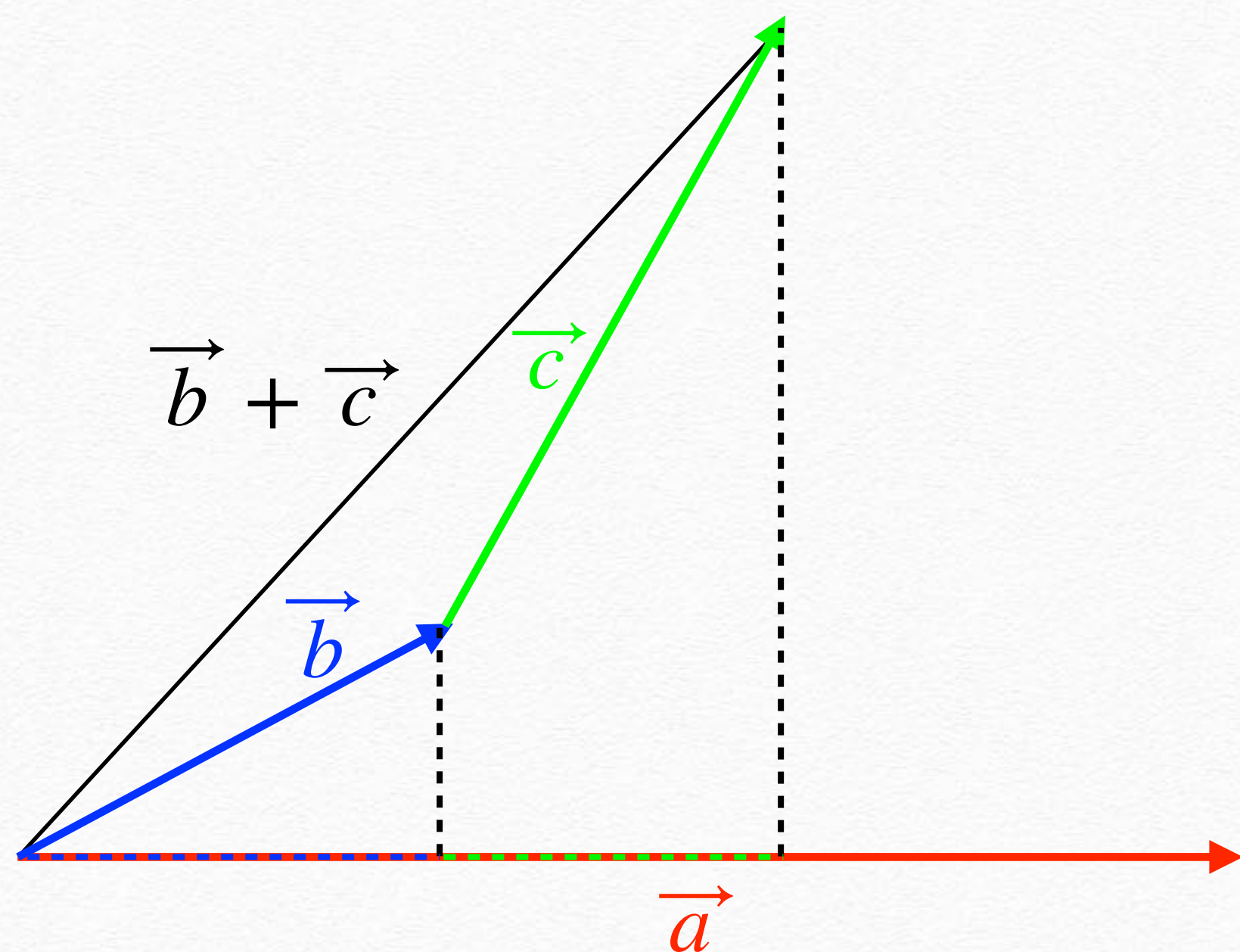
- ❖ pre rovnobežné vektory

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0$$

dôkaz lineárnosti

skalárny súčin

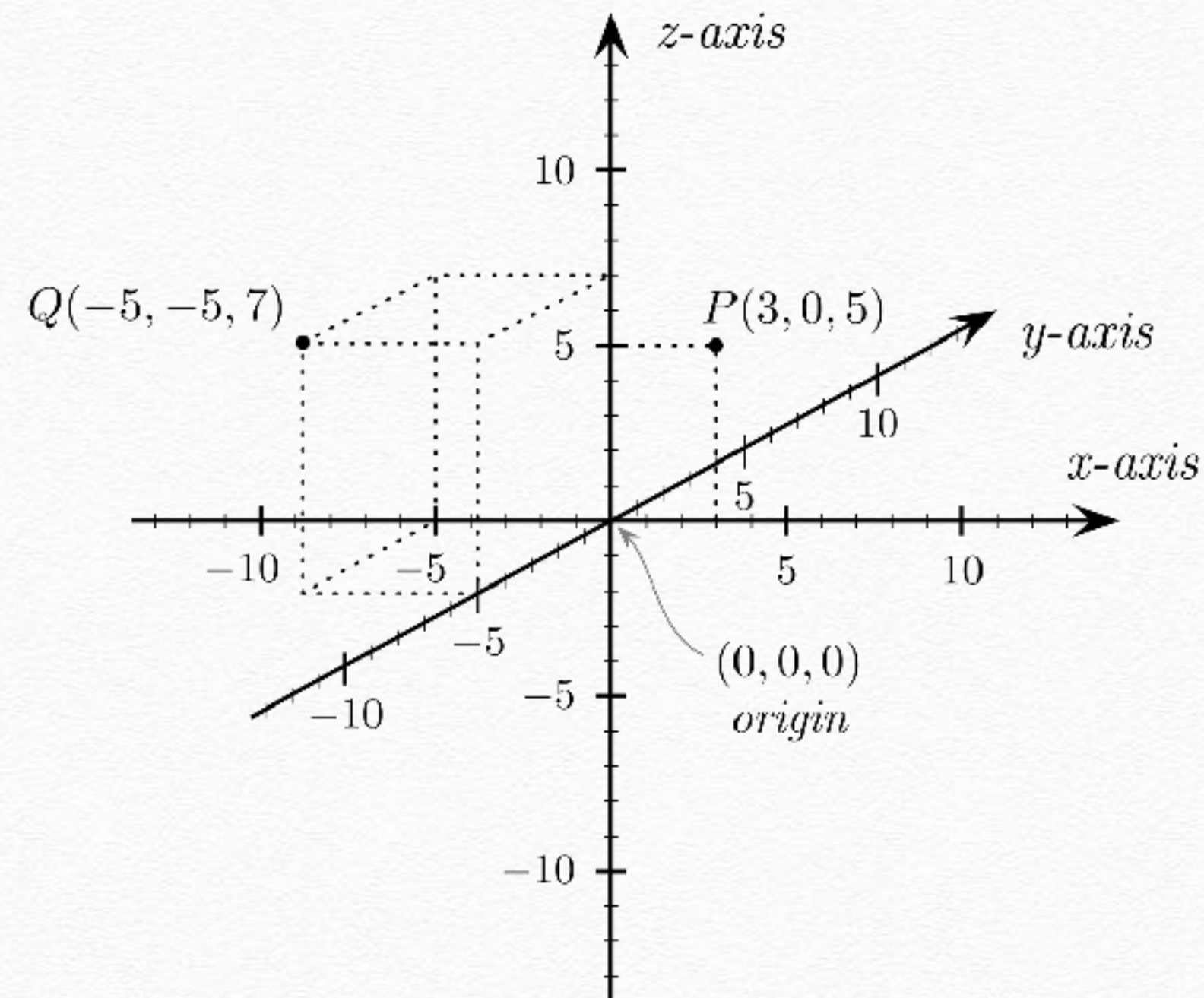
- ❖ multiplikatívna časť triviálna
- ❖ aditívna časť jasná z obrázku (obrázok je 2D, ale ide to aj v 3D)



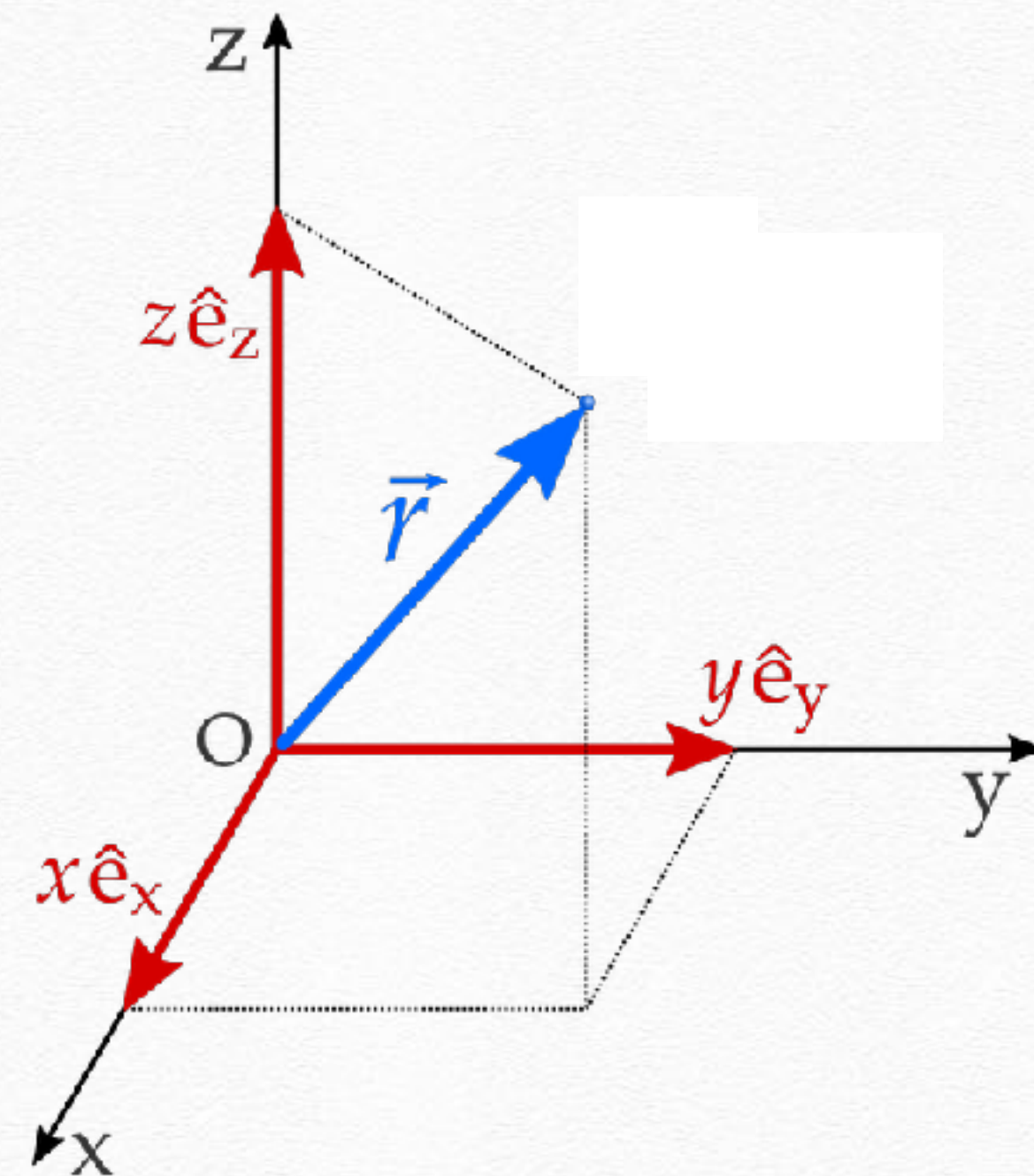
vektorový súčin

- ❖ multiplikatívna časť triviálna
- ❖ aditívna časť sa dá nahliadnuť takto: súčin $\vec{a} \times \vec{b}$ sa dá chápať ako
 1. premietnutie vektora \vec{b} do roviny kolmej na vektor \vec{a}
 2. otočenie tohto priemetu okolo osi danej vektorom \vec{a} o 90° proti smeru chodu hodinových ručičiek
 3. násobenie tohto otočeného priemetu veľkosťou vektora \vec{a}všetky tri body sú (dosť zjavne) lineárne

kartézské súradnice bodu a vektora



súradnice sú dané dĺžkami hrán kvádra, ktorého hrany sú rovnobežné s osami (pre nás tu nebudú nijako dôležité)



súradnice sú dané koeficientmi rozkladu do troch kolmých jednotkových vektorov (takto budeme chápať kartézské súradnice)

skalárny súčin v kart. súradniciach

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

dôkaz: $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$
 $\vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z$

a teraz už len využijeme lineárnosť skalárneho súčinu
a ešte to, že vektory \vec{e} sú jednotkové a navzájom kolmé
(na základe čoho si vieme vypočítať ich skalárne súčiny)

vektorový súčin v kart. súradniciach

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{e}_z$$

dôkaz: $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$
 $\vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z$

a teraz už len využijeme lineárnosť vektorového súčinu
a ešte to, že vektory \vec{e} sú jednotkové a navzájom kolmé
(na základe čoho si vieme ľahko vypočítať ich vektorové súčiny)

reklama na záver

- ❖ nabudúce sa budeme venovať príkladom, ktoré budú jasne ilustrovať previazanosť rovníc v kart. súradniciach
- ❖ pôjde o pohyb nabitej častice jednak v homogénnom magnetickom poli a jednak súčasne v homogénnom elektrickom aj v homogénnom magnetickom poli
- ❖ poznámka: pohyb v homogénnom elektrickom poli sme už prediskutovali – je to v podstate šikmý vrh (prečo?)