

Pohyb po kružnici

najmä v homogénnom magnetickom poli

príklady pohybov v 3D

minulá prednáška

- ❖ jeden prirodzený príklad pohybu, ktorý sa po rozpísaní do súradníc javil ako tri nezávislé 1D pohyby (šikmý vrh, riešenie sme poznali)
- ❖ nevýhodou tohto príkladu je, že začiatočníkov môže ľahko utvrdiť v mylnej predstave, že nezávislé 1D pohyby dostaneme vždy

táto prednáška

- ❖ jeden dôležitý príklad pohybu, ktorý sa po rozpísaní do súradníc nejaví ako tri nezávislé 1D pohyby (pohyb po kružnici)
- ❖ prakticky dôležitý príklad pohybu v homogénnom magnetickom poli, v ktorom sú rovnice po prepísaní do súradníc netriviálne previazané

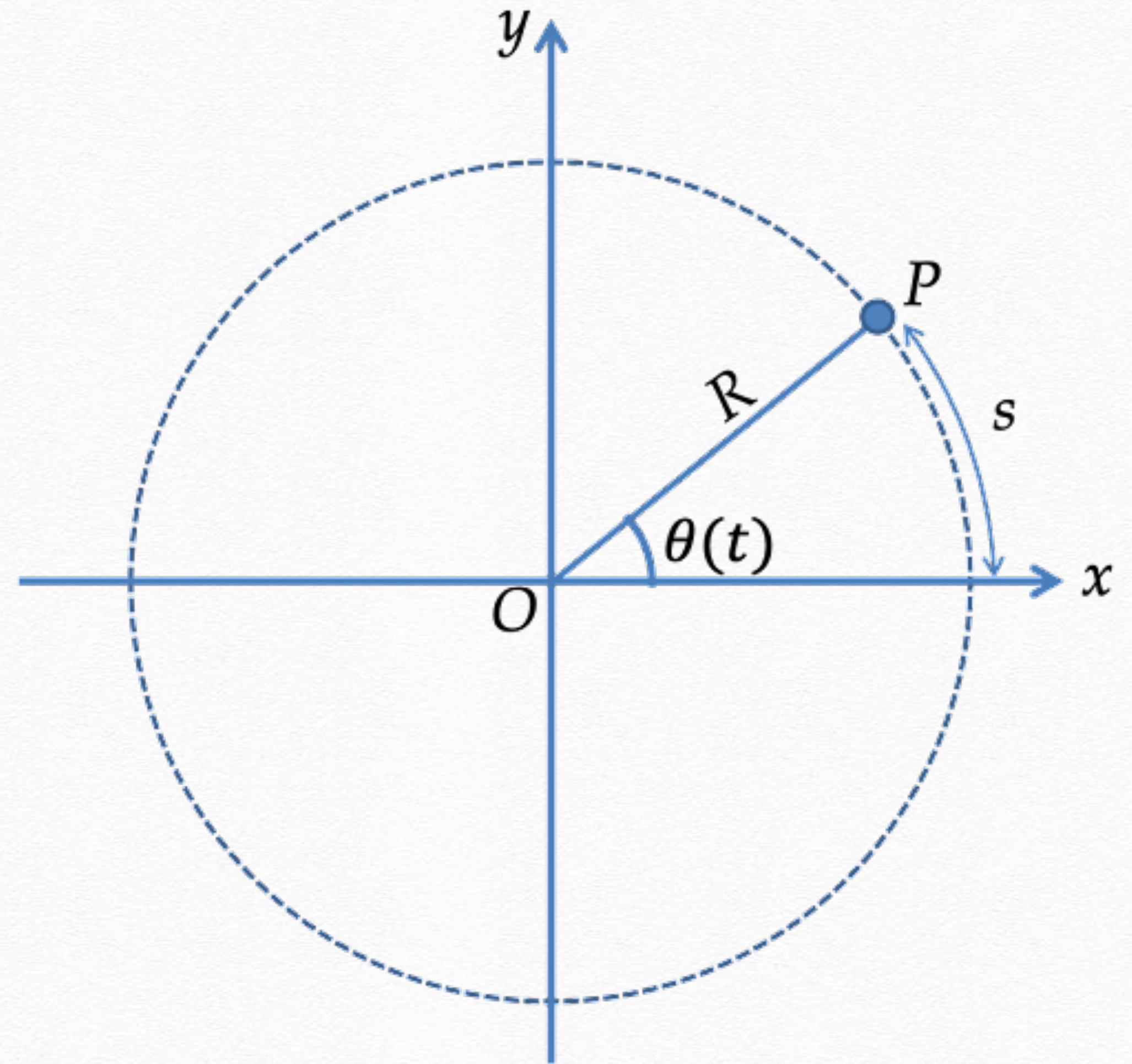
zahrievacie kolo (doslova)

- ❖ jeden pohyb, v ktorom sú rovnice po prepísaní do súradníc netriviálne previazané, je dobre známy už zo strednej školy
- ❖ reč je o rovnomernom pohybe po kružnici
- ❖ na strednej škole nedostaneme tento pohyb riešením (diferenciálnej) pohybovej rovnice, postup je opačný: vychádza sa z toho, že ide o rovnomerný pohyb po kružnici a niečo sa z toho usúdi o pôsobiacej výslednej sile (a to niečo bude pre nás užitočné v tejto prednáške)

rovnomerný pohyb po kružnici

(ak si náhodou nepamätáte zo strednej školy)

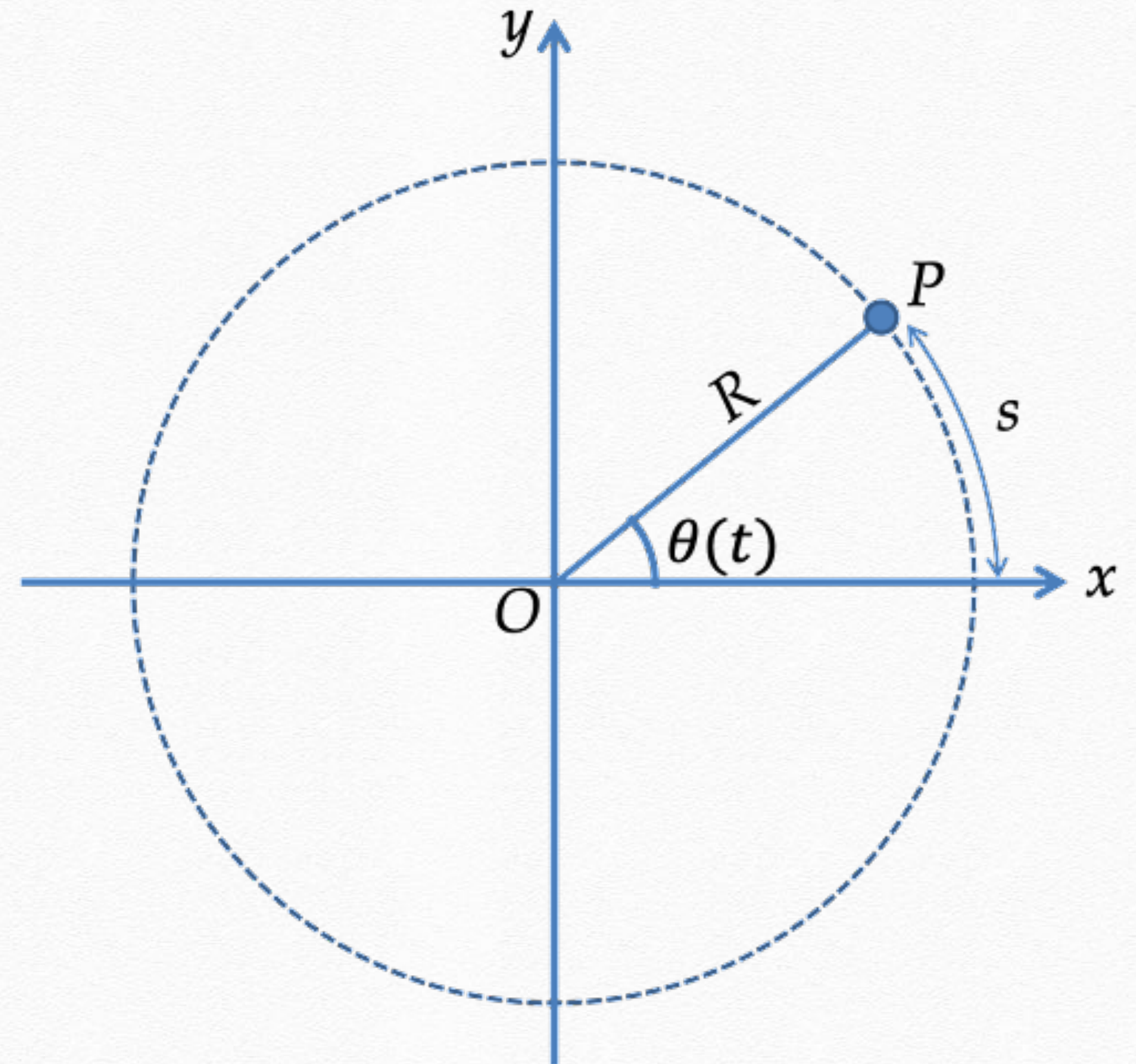
- ❖ rýchle odvodenie dôležitých vzťahov pre rovnomerný pohyb po kružnici: $\theta = \omega t$
- ❖ $x(t) = R \cos \omega t$ $y(t) = R \sin \omega t$
- ❖ $\dot{x}(t) = -\omega R \sin \omega t$ $\dot{y}(t) = \omega R \cos \omega t$
- ❖ $\ddot{x}(t) = -\omega^2 R \cos \omega t$ $\ddot{y}(t) = -\omega^2 R \sin \omega t$
- ❖ $\vec{v} \cdot \vec{r} = 0$ $v = \omega r$ ($r = R$)
- ❖ $\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$ $a = \omega^2 r$ $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$



rovnomerne zrýchlený pohyb po kružnici

(veľmi užitočná úloha, urobte hneď teraz)

- ❖ odvodte vzťahy pre rýchlosť a pôsobiacu silu v prípade rovnomerne zrýchleného pohybu po kružnici: $\theta(t) = \frac{1}{2}\epsilon t^2$
- ❖ zistite, či je aj v tomto prípade rýchlosť kolmá na polohový vektor
- ❖ zistite, či je aj v tomto prípade sila kolmá na rýchlosť, respektíve aká veľká je jej zložka v smere kolmom na rýchlosť
- ❖ užitočné info: často to býva na skúške



v homogénnom magnetickom poli

- ❖ sila pôsobiaca na nabitú časticu: $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$
- ❖ pohybová rovnica: $m\ddot{\vec{r}} = q \dot{\vec{r}} \times \vec{B}$
- ❖ skúsme najprv čo najlepšie porozumieť riešeniu tejto rovnice bez toho, že by sme ju explicitne vyriešili (to urobíme neskôr)
- ❖ sila je kolmá na $\vec{B} \Rightarrow$ v smere \vec{B} je sila nulová
- ❖ čiže pohyb v smere poľa \vec{B} je rovnomerný priamočiary

čo sa deje v rovine kolmej na \vec{B}

- ❖ označme priemet rýchlosti do tejto roviny symbolom \vec{v}_\perp (kolmá na \vec{B})
- ❖ sila \vec{F} pôsobí v tejto rovine, je kolmá na \vec{v}_\perp a jej veľkosť je $F = qv_\perp B$
- ❖ sila \vec{F} je v smere \vec{v}_\perp nulová $\Rightarrow \vec{v}_\perp$ sa v tomto smere nemení, čiže veľkosť v_\perp sa nemení (mení sa len smer \vec{v}_\perp , tým viac čím väčšia je F)
- ❖ v_\perp ani homogénne B sa nemenia, čiže sila je stále rovnako veľká, čiže zakrivenie je stále rovnako veľké \Rightarrow rovnomerný pohyb po kružnici

poznámka: velocity vs. speed

- ❖ slovom rýchlosť označujeme v slovenčine dve rôzne veci jednak \vec{v} (velocity) a jednak $v = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$ (speed)
- ❖ ak je $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$, t. j. ak je zrýchlenie kolmé na rýchlosť, veľkosť rýchlosti sa nemení (meniť sa môže len smer)
- ❖ malo by to byť jasné priamo z definícií, ale ak nie je, tak:

$$\frac{d}{dt}v = \frac{d}{dt}\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \frac{2 \vec{v} \cdot \vec{a}}{2\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v} \quad \text{čiže} \quad \vec{v} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0$$

čo sa deje celkove

- ❖ v smere homog. poľa \vec{B} : rovnomerný priamočiary pohyb
- ❖ v rovine kolmej na \vec{B} : rovnomerný pohyb po kružnici
(stále rovnako zakrivený pohyb
stále rovnaká veľkosť rýchlosti)
- ❖ celkove teda dostávame: pohyb po špirále (závitnici)
- ❖ zatiaľ ale nevieme, aký je polomer kružnice

rýchlosť pohybu v hom. mag. poli

- ❖ zo vzťahu medzi rýchlosťou rovnomerného pohybu po kružnici a veľkosťou dostredivej sily ($F = m\omega^2 r = mv^2/r$), dostávame polomer kružnice pri pohybe v homogénnom magnetickom poli

$$\frac{mv_{\perp}^2}{r} = qv_{\perp}B \quad \Rightarrow \quad r = \frac{mv_{\perp}}{qB}$$

- ❖ ak poznáme r a v_{\perp} , poznáme aj periódu: $T = \frac{2\pi r}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{qB}$

vtipná aplikácia (Nobelove ceny 1921-22)

- ❖ nabité častice sú magnetickým poľom zakrivované tak, že $\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{v} \times \vec{B}$
- ❖ rôzne zakrivenia pre častice s rovnakými rýchlosťami, rovnakým q a rôznymi m (typický príklad: ióny izotopov)
- ❖ izotopy boli objavené práve vďaka rôznym zakriveniam ich dráh v magnetickom poli
- ❖ Frederick Soddy, Oxford
Nobelova cena za chémiu 1921

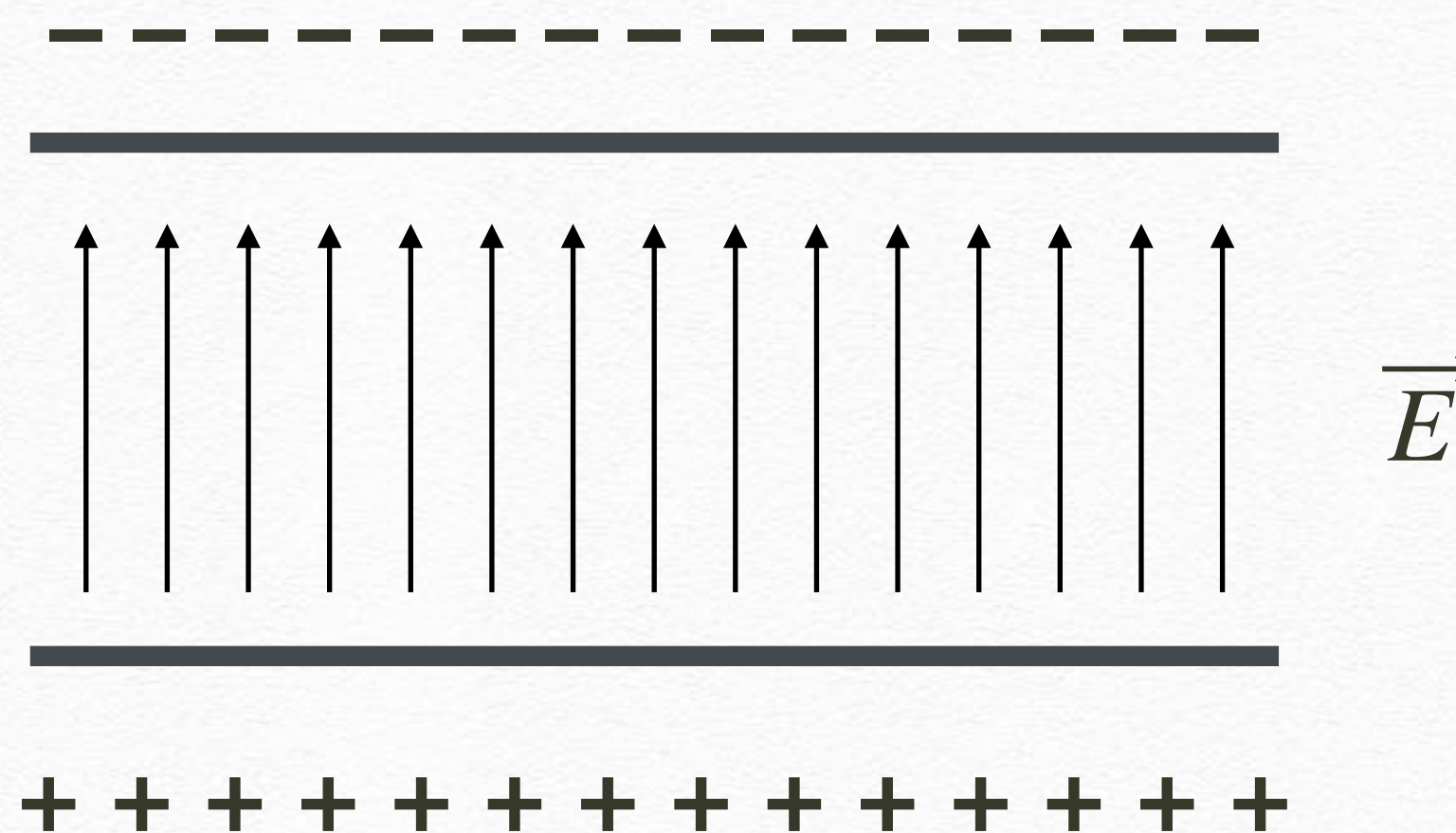


Francis Aston, Cambridge,
Nobelova cena za chémiu 1922

vtipná aplikácia (Nobelova cena 1939)

- ❖ najjednoduchší urýchľovač častíc: opačne nabitú sieťku a medzi nimi dosť homogénne elektrické pole
- ❖ urýchľuje častice medzi mriežkami (sieťkami)
- ❖ idea: za mriežkou častice otočíme a mriežky prepólujeme, takže pri spätočnej ceste medzi mriežkami sú opäť urýchľované
- ❖ návrat častíc v oblasti za mriežkami treba stihnúť za čas ich prepólovania (aby boli častice medzi mriežkami stále urýchľované)

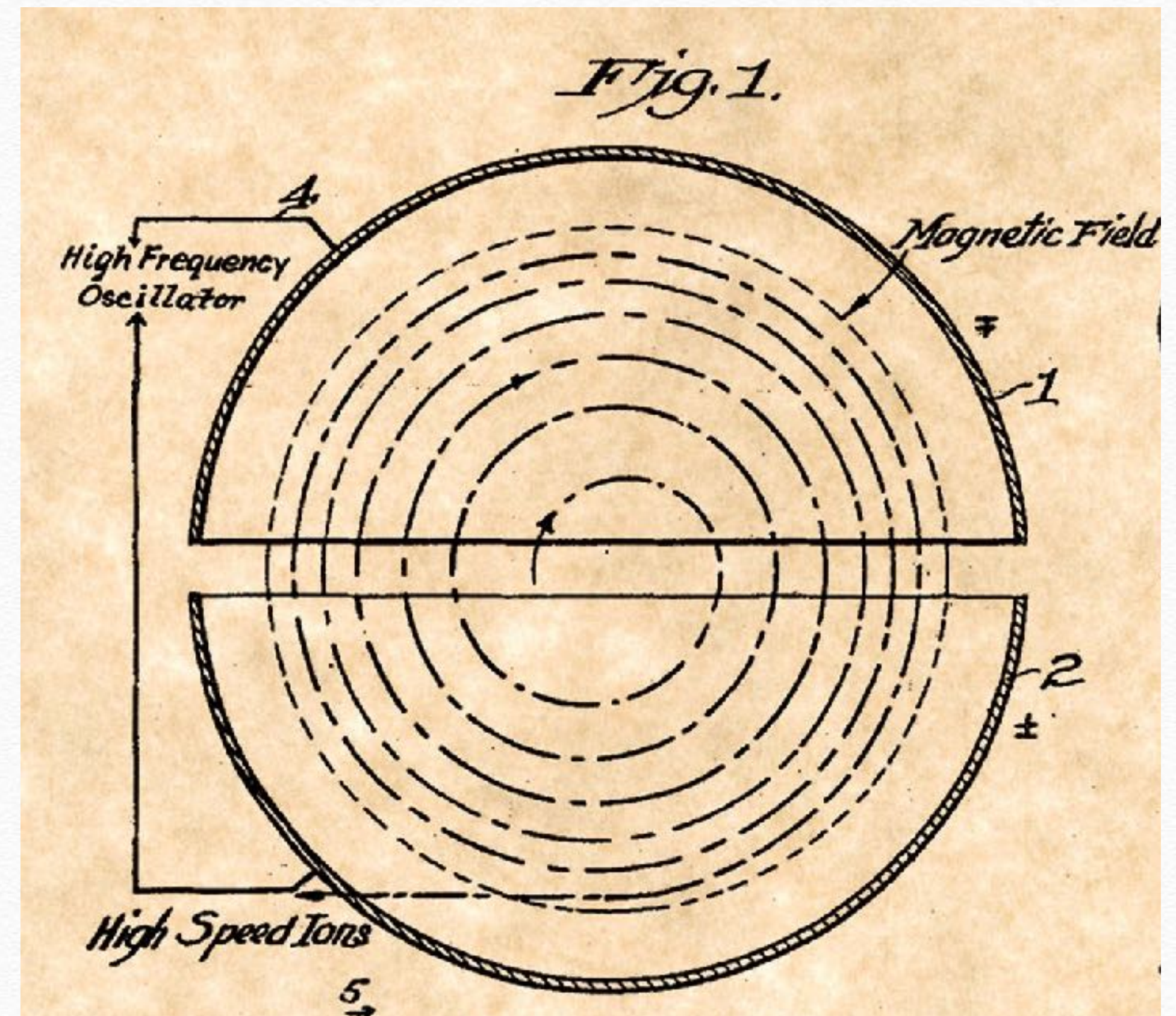
tu musíme častice otočiť



tu musíme častice otočiť

cyklotrón

- ❖ častice za siečkami vraciame pomocou homogénneho magnetického poľa (kolmého na rovinu obrázku)
- ❖ doba návratu $T = \frac{\pi m}{qB}$
- ❖ T nezávisí od rýchlosti, je stále rovnaká
- ❖ ak meníme nabitie dosiek s frekvenciou zosúladenou s týmto T , potom sú častice opakovane urýchľované



Ernest Lawrence, Nobelova cena 1939

riešenie pohybových rovníc

❖ tak, a teraz podme explicitne vyriešiť pohybovú rovnicu pre nabitú časticu v homogénnom magnetickom poli

❖ pre zjednodušenie zápisov vyberme os z v smere poľa \vec{B}

❖ najprv rovnicu $m\ddot{\vec{r}} = q\dot{\vec{r}} \times \vec{B}$ prepíšeme do súradníc:

$$m\ddot{x} = q\dot{y}B \qquad m\ddot{y} = -q\dot{x}B \qquad m\ddot{z} = 0$$

❖ čo sa dá (a je užitočné) napísať aj ako

$$m\dot{v}_x = qv_yB \qquad m\dot{v}_y = -qv_xB \qquad m\dot{v}_z = 0$$

pokračovanie riešenia

- ❖ dostali sme sústavu medzi sebou previazaných rovníc (v rovnici pre \ddot{x} vystupuje \dot{y} a naopak), ktorú prevedieme drobným trikom na sústavu nezávislých rovníc

- ❖ zderivujeme prvú rovnicu a dosadíme do nej druhú

$$m \ddot{v}_x = q \dot{v}_y B = -\frac{q^2 B^2}{m} v_x \quad \text{čiže} \quad \ddot{v}_x + \frac{q^2 B^2}{m^2} v_x = 0$$

- ❖ to isté môžeme spraviť aj s druhou rovnicou, ale nebudeme to potrebovať

pokračovanie riešenia

❖ dostali sme rovnicu, ktorej riešenie už poznáme

❖ je to rovnica zhodná s rovnicou pre LHO, riešenie je

$$v_x(t) = a \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{kde} \quad \omega = \frac{qB}{m}$$

❖ z prvej rovnice pre rýchlosti teraz dostaneme $v_y(t)$

$$v_y(t) = \frac{m}{qB} \dot{v}_x = -a \sin(\omega t + \varphi)$$

explicitné riešenie

- ❖ súradnice polohy dostaneme zo súradníc rýchlosti integrovaním
- ❖ $x(t) = R \sin(\omega t + \varphi) + c$ kde $a = R\omega$
- ❖ $y(t) = R \cos(\omega t + \varphi) + c'$
- ❖ $z(t) = bt + c''$
- ❖ konštanty $R, \varphi, b, c, c', c''$ sa určia z počiatočných podmienok

v homogénnom magnetickom poli a homogénnom elektrickom poli

- ❖ sila pôsobiaca na nabitú časticu: $\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B}$
- ❖ pohybová rovnica: $m \ddot{\vec{r}} = q \vec{E} + q \dot{\vec{r}} \times \vec{B}$
- ❖ vyšetríme dva prípady, jednak $\vec{E} \parallel \vec{B}$ a jednak $\vec{E} \perp \vec{B}$
- ❖ všeobecný prípad je kombináciou týchto dvoch

rovnobežné polia \vec{E} a \vec{B}

- ❖ pohybová rovnica prepísaná do súradníc (polia v smere osi z)

$$m \ddot{x} = q \dot{y} B \qquad m \ddot{y} = -q \dot{x} B \qquad m \ddot{z} = qE$$

- ❖ čo sa opäť dá (a je užitočné) napísať aj ako

$$m \dot{v}_x = q v_y B \qquad m \dot{v}_y = -q v_x B \qquad m \dot{v}_z = qE$$

- ❖ v súradniciach x a y dostaneme to isté čo bez pol'a \vec{E}

pre súradnicu z dostaneme
$$z(t) = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2 + bt + c''$$

skrížené (kolmé) polia \vec{E} a \vec{B}

❖ toto je zaujímavý príklad, s pomerne prekvapujúcim riešením

❖ pohybová rovnica prepísaná do súradníc (\vec{E} a \vec{B} v smeroch y a z)

$$m \ddot{x} = q \dot{y} B \qquad m \ddot{y} = -q \dot{x} B + qE \qquad m \ddot{z} = 0$$

❖ čo sa opäť dá (a je užitočné) napísať aj ako

$$m \dot{v}_x = q v_y B \qquad m \dot{v}_y = -q v_x B + qE \qquad m \dot{v}_z = 0$$

❖ ďalej môžeme postupovať rovnako, ako v prípade bez \vec{E}

skrížené polia – pokračovanie

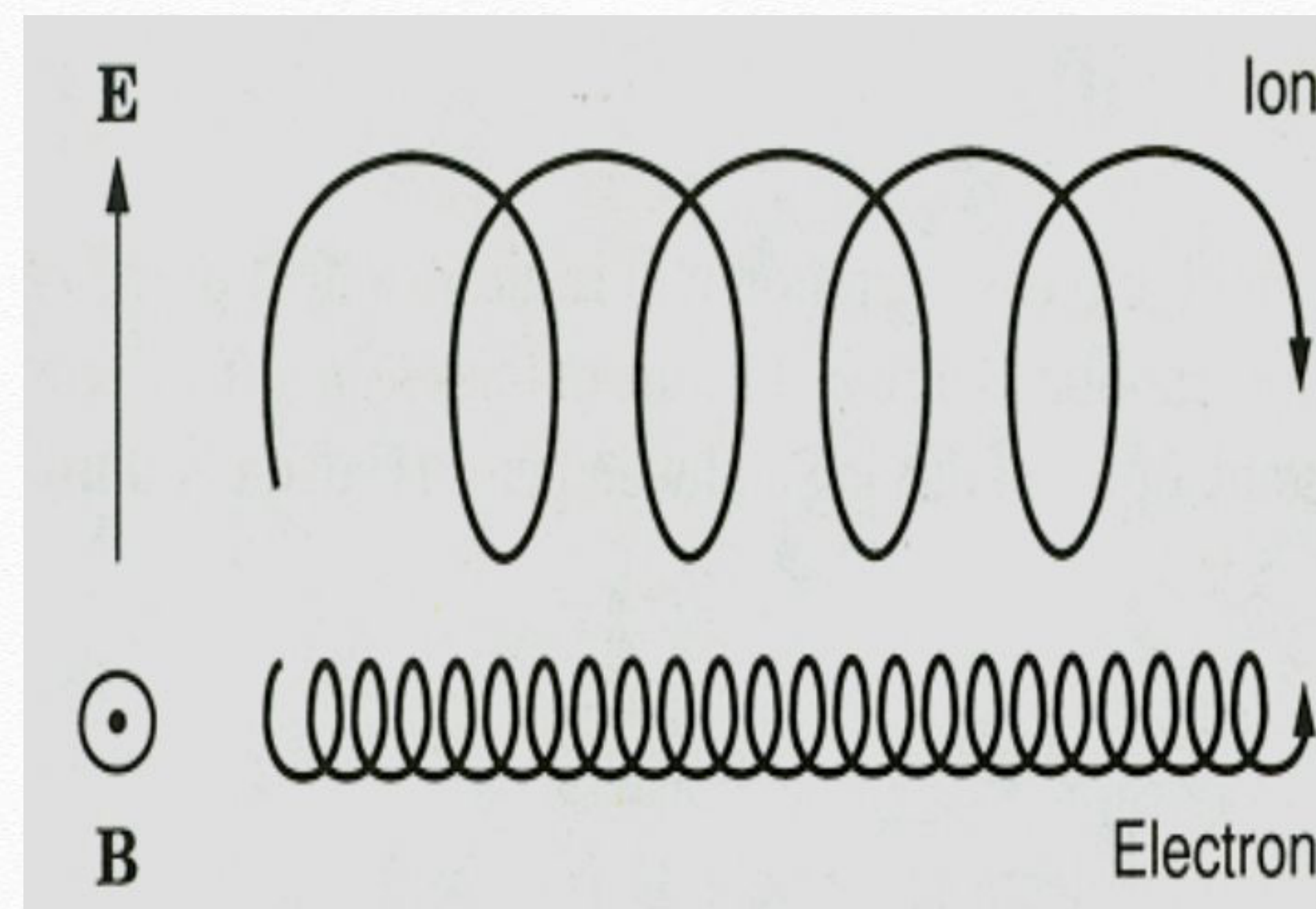
- ❖ rovnakým postupom ako predtým dostaneme pre x -ovú zložku

$$\ddot{v}_x + \frac{q^2 B^2}{m^2} v_x = \frac{q^2 E B}{m^2}$$

- ❖ všeobecné riešenie pre nulovú stranu poznáme, partikulárne riešenie pre túto pravú stranu uhádneme ľahko: $v_{x,p} = E/B$
- ❖ v porovnaní s riešením bez poľa \vec{E} sme dostali navyše tzv. drift: rovnomernú rýchlosť v smere x (kolmo na \vec{E} aj \vec{B})

nepovinná domáca úloha

- ❖ ako vždy, aj teraz veľmi odporúčam nakresliť si (asi pythonom) v prípade skrížených polí výslednú trajektóriu
- ❖ mali by ste vidieť pohyb v smere kolmom na obe homogénne polia (pomerne nečakané, nie?)
- ❖ mali by ste vidieť kladné aj záporné náboje idúce rovnakým smerom (pomerne nečakané, nie?)



dôležitá poznámka na záver

- ❖ pohyb v nehomogénnych elmag poliach vedie vo všeobecnosti na nelineárnu diferenciálnu rovnicu

$$m \ddot{\vec{r}}(t) = q \vec{E}(\vec{r}(t), t) + q \dot{\vec{r}}(t) \times \vec{B}(\vec{r}(t), t)$$

- ❖ túto rovnicu vo všeobecnosti riešiť nevieme, napriek tomu, že sa vyskytuje v mnohých oblastiach fyziky