# zákony zachovania v 3D

## hybnosť, energia, moment hybnosti

mechanika 16

# pohyb v troch rozmeroch

**čo sme sa už naučili**

- riešiť pohybovú rovnicu v prípade homogénneho gravitačného, elektrického a magnetického poľa, a aj ich kombinácií
- v týchto prípadoch išlo o lineárne diferenciálne rovnice (prípadne o sústavy viazaných lineárnych diferenciálnych rovníc), ktoré sme sa naučili riešiť štandardným univerzálnym postupom
- rovnako by sme vedeli riešiť pohybovú rovnicu pre trojrozmerný lineárny harmonický oscilátor (a to aj v prípade tlmených či nútených kmitov)

**čo sa ešte chceme naučiť**

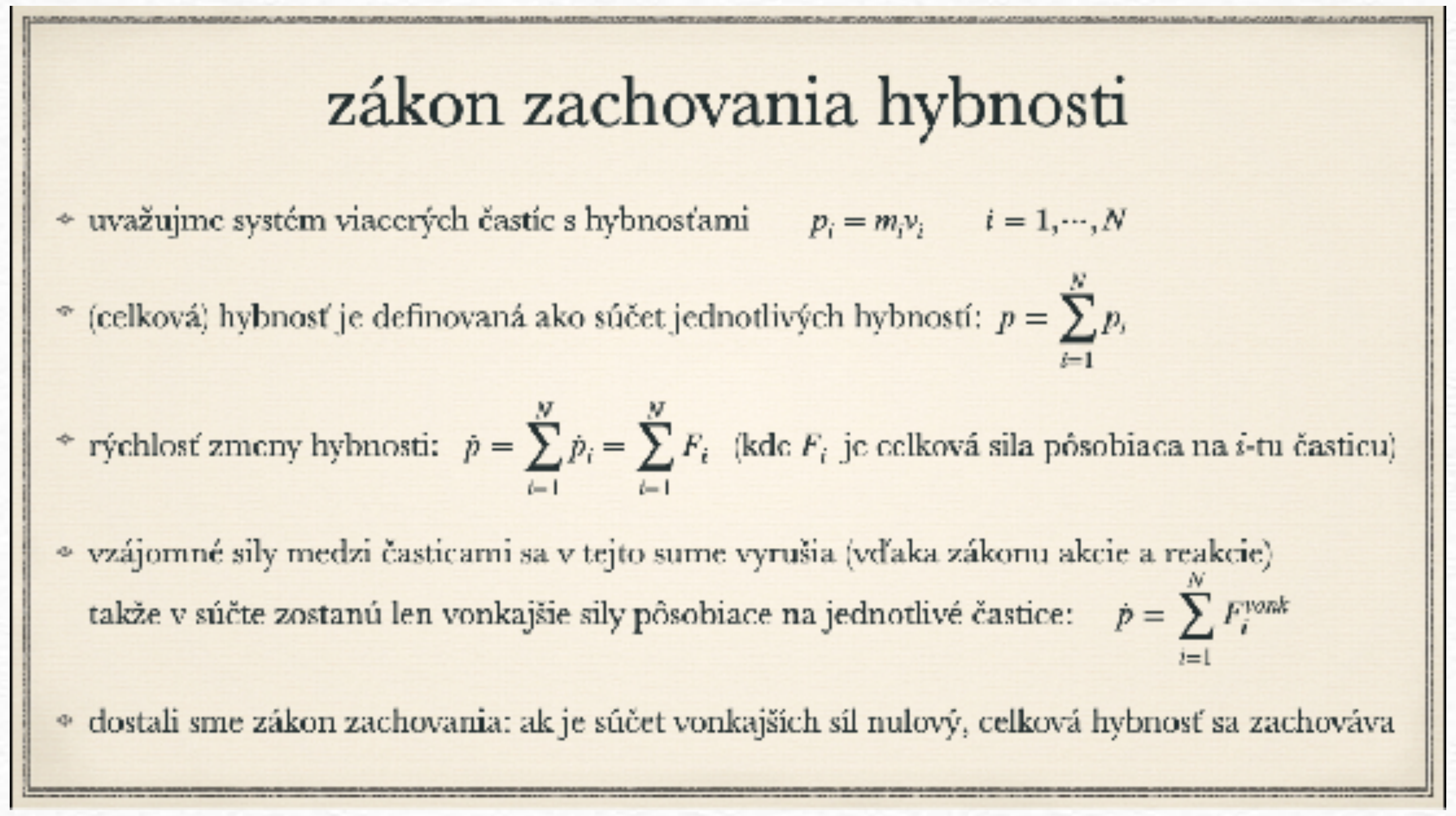
- zistiť čo najviac o pohybe v prípadoch síl vedúcich na nelineárne pohybové rovnice (príklad: newtonovská gravitačná sila)
- v prípade takýchto rovníc nemáme nijakú univerzálnu metódu riešenia, takže musíme využívať všelijaké špeciálne triky, medzi nimi napríklad zákony zachovania
- tým sa dostávame k celkom dôležitej otázke, ktorá bude predmetom tejto prednášky: <u>ako vyzerajú zákony zachovania v 3D?</u>

# zákony zachovania v 3D

- zákon zachovania hybnosti (prakticky to isté, čo v 1D, akurát pribudnú šípky)

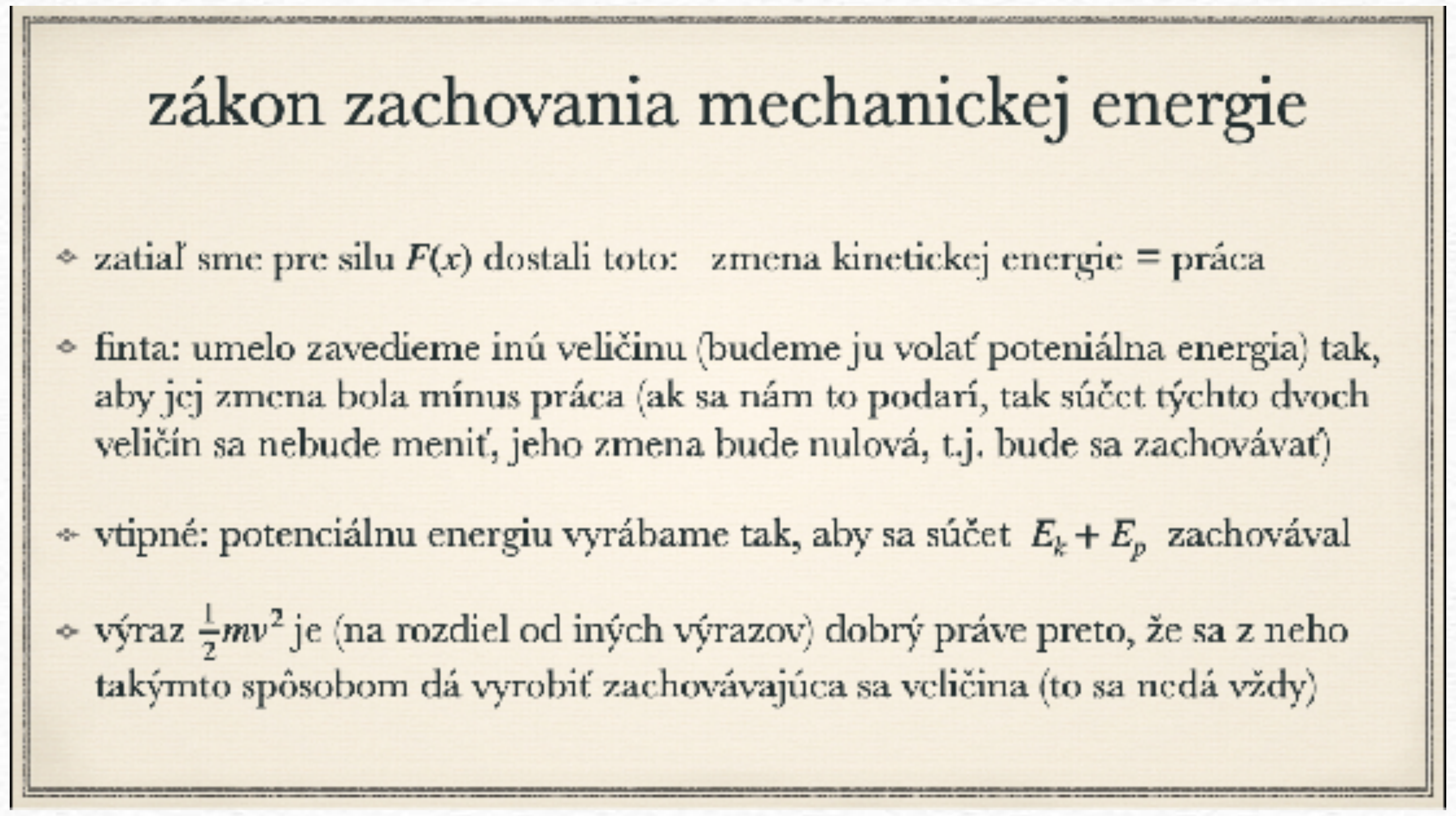
- zákon zachovania energie (sofistikovanejší ako v 1D)

- zákon zachovania momentu hybnosti (nemá analógiu v 1D)



## zákon zachovania hybnosti

- uvažujme systém viacerých častíc s hybnosťami $p_i = m_i v_i \qquad i = 1, \cdots, N$
- (celková) hybnosť je definovaná ako súčet jednotlivých hybností: $p = \sum_{i=1}^{N} p_i$
- rýchlosť zmeny hybnosti: $\dot{p} = \sum_{i=1}^{N} \dot{p}_i = \sum_{i=1}^{N} F_i$ (kde $F_i$ je celková sila pôsobiaca na $i$-tu časticu)
- vzájomné sily medzi časticami sa v tejto sume vyrušia (vďaka zákonu akcie a reakcie) takže v súčte zostanú len vonkajšie sily pôsobiace na jednotlivé častice: $\dot{p} = \sum_{i=1}^{N} F_i^{vonk}$
- dostali sme zákon zachovania: ak je súčet vonkajších síl nulový, celková hybnosť sa zachováva



## zákon zachovania mechanickej energie

- zatiaľ sme pre silu $F(x)$ dostali toto: zmena kinetickej energie = práca
- finta: umelo zavedieme inú veličinu (budeme ju volať poteniálna energia) tak, aby jej zmena bola mínus práca (ak sa nám to podarí, tak súčet týchto dvoch veličín sa nebude meniť, jeho zmena bude nulová, t.j. bude sa zachovávať)
- vtipné: potenciálnu energiu vyrábame tak, aby sa súčet $E_k + E_p$ zachovával
- výraz $\frac{1}{2}mv^2$ je (na rozdiel od iných výrazov) dobrý práve preto, že sa z neho takýmto spôsobom dá vyrobiť zachovávajúca sa veličina (to sa nedá vždy)

# zákon (ne)zachovania hybnosti

# zákon (ne)zachovania hybnosti

- uvažujme systém viacerých častíc s hybnosťami $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i \qquad i = 1, \cdots, N$
- (celková) hybnosť je definovaná ako súčet jednotlivých hybností: $\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$
- rýchlosť zmeny: $\dot{\vec{p}} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ ($F_i$ je celková sila pôsobiaca na i-tu časticu)
- vzájomné sily medzi časticami sa v tejto sume vyrušia (zákon akcie a reakcie)

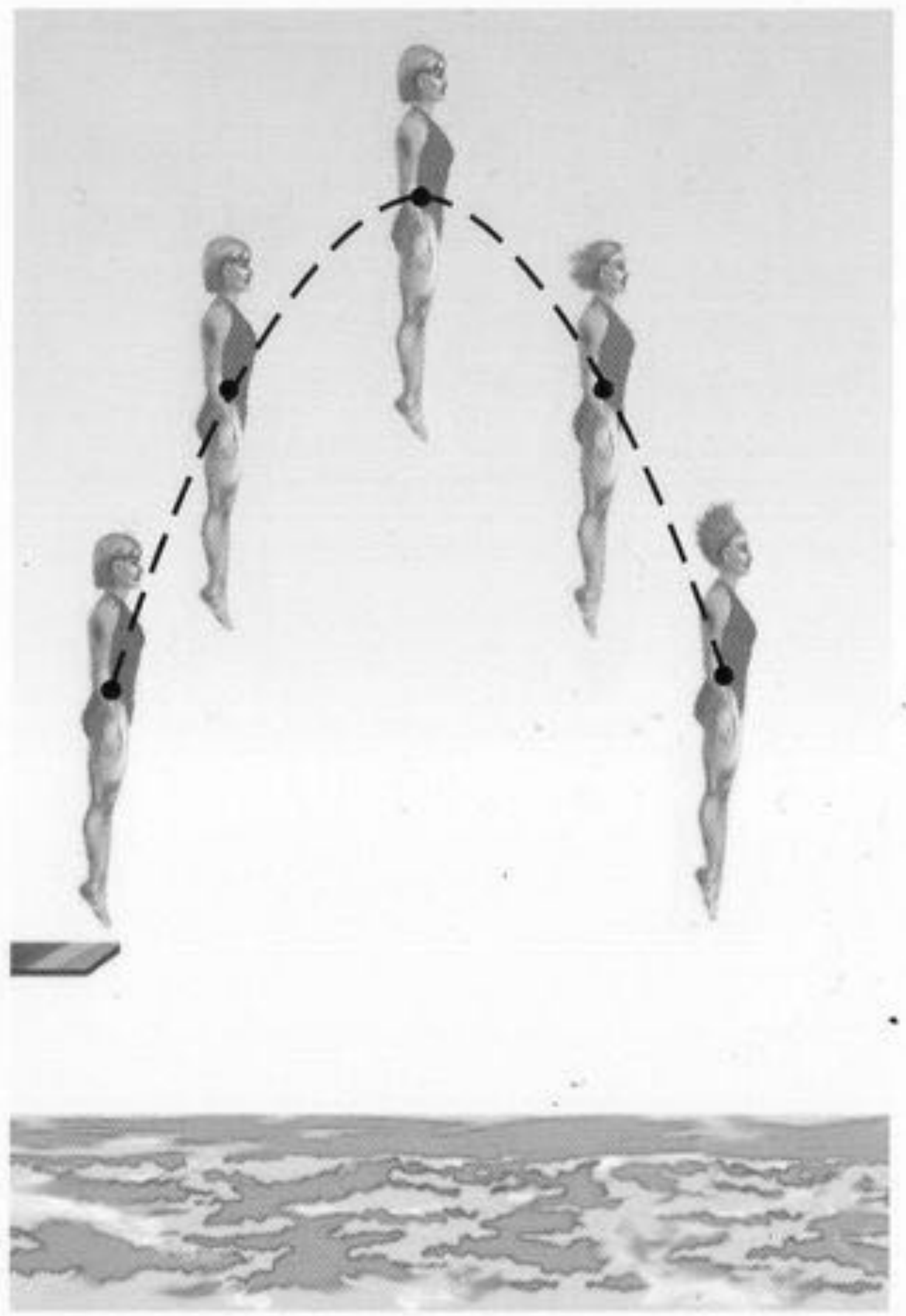
  takže v súčte zostanú len vonkajšie sily pôsobiace na jednotlivé častice: $\dot{\vec{p}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{vonk}$
- zákon zachovania: ak je súčet vonkajších síl nulový, celková hybnosť sa zachováva

# hmotný stred

## príklad užitočnosti (ne)zachovania hybnosti

- vzťah pre rýchlosť zmeny celkovej hybnosti $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ kde $\vec{F}$ je celková sila (súčet všetkých vonkajších síl) vyzerá ako pohybová rovnica nejakej jednej častice
- dá sa táto rovnica zapísať aj v tvare $\boxed{m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}}$, kde $m$ je celková hmotnosť systému (súčet všetkých hmotností)?
- áno, ak definujeme polohu hmotného stredu $\boxed{\vec{r} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}}$
- je to priamy dôsledok zákona (ne)zachovania hybnosti

# pohyb hmotného stredu



hmotný stred sa pohybuje ako hmotný bod, ktorého hmotnosť je rovná súčtu hmotností všetkých častí a na ktorý pôsobí sila daná súčtom (vonkajších) síl pôsobiacich na všetky časti

poznámka: súčet vonkajších síl dostaneme vďaka zákonu akcie a reakcie pre vnútorné sily (tie sa v súčte všetkých síl navzájom vyrušia)

# zákon (ne)zachovania mechanickej energie

# zmena kinetickej energie

- kinetická energia: $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\overrightarrow{v}\,.\,\overrightarrow{v}$

- rýchlosť zmeny skalárneho súčinu: $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b}) = \dot{\overrightarrow{a}}\,.\,\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}\,.\,\dot{\overrightarrow{b}}$ (Leibnizovo pravidlo)

  dôkaz: najrýchlejšie v kartézskych súradniciach, t.j. využitím $\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

- rýchlosť zmeny kinetickej energie: $\dot{E}_k = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}m\overrightarrow{v}\,.\,\overrightarrow{v} = m\dot{\overrightarrow{v}}\,.\,\overrightarrow{v} = m\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{F}\,.\,\overrightarrow{v}$

- zmena $E_k$ pre silu závislú len od polohy:

$$\Delta E_k = E_k(t_2) - E_k(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \dot{E}_k\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F}\,.\,\overrightarrow{v}\,dt = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \overrightarrow{F}(\vec{r})\,.\,d\vec{r}$$

- v 3D je práca definovaná cez skalárny súčin $\overrightarrow{F}\,.\,d\vec{r}$ (to je nevinná zmena oproti 1D)

  v 3D sú hranicami integrovania body $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ (toto je významná zmena oproti 1D)

# pokus o definíciu potenciálnej energie

- potenciálnu energiu chceme zaviesť tak, aby jej zmena bola mínus práca (tak ako v 1D)
- podobne ako v 1D zvoľme referenčný bod $\vec{r}_R$ , od ktorého budeme merať potenciálnu energiu a nejakú referenčnú energiu $E_R$ , ako hodnotu potenciálnej energie v bode $\vec{r}_R$
- teraz by sme chceli definovať potenciálnu energiu ako hodnotu v referenčnom bode mínus prácu uvažovanej sily pri presune z referenčného bodu do bodu $\vec{r}$

$$E_p(\vec{r}) = E_R - \int_{\vec{r}_R}^{\vec{r}} F(\vec{r}\,') \,.\, d\vec{r}\,'$$

- táto definícia je však problematická (aj keď na prvý pohľad vyzerá úplne v poriadku)
- problém spočíva v tom, že integrál $\int_{\vec{r}_R}^{\vec{r}} \cdots$ nezávisí iba od hraníc, ale aj od ich spojnice

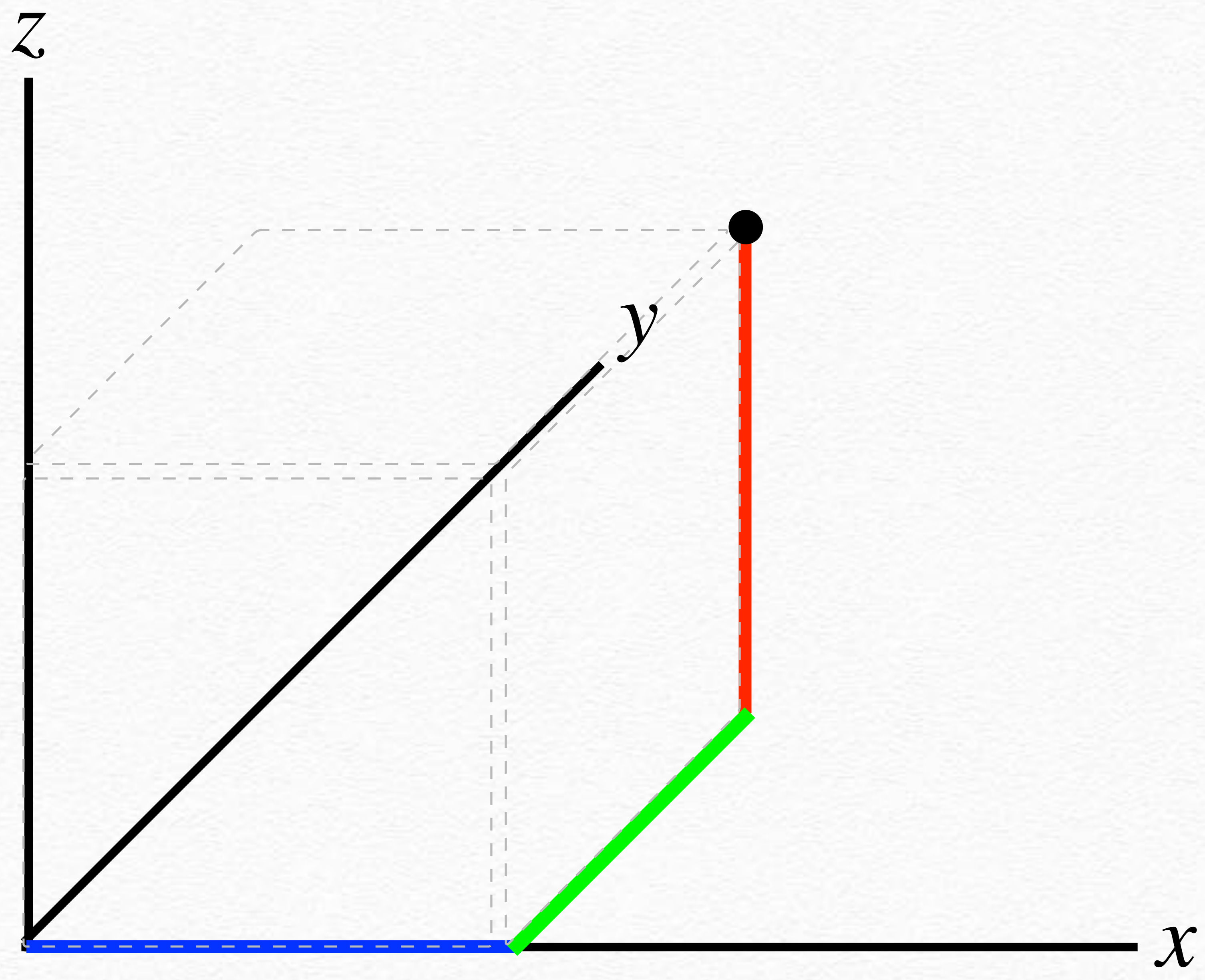
# integrál po nejakej spojnici

uvažujme silu $\vec{F}(\vec{r})$ so zložkami $F_x(x,y,z) = x \quad F_y(x,y,z) = xy \quad F_z(x,y,z) = 0$

akú prácu vykoná $\vec{F}(\vec{r})$ pri presune z bodu $\vec{r}_R = (0,0,0)$ do bodu $\vec{r} = (1,1,1)$ ?

jedna možná spojnica bodov $\vec{r}_R$ a $\vec{r}$

$(0,0,0) \rightarrow (1,0,0) \rightarrow (1,1,0) \rightarrow (1,1,1)$




$$\text{práca} = \int_{(0,0,0)}^{(1,0,0)} \left( F_x\,dx + F_y\,\cancel{dy} + F_z\,\cancel{dz} \right) + \cdots + \cdots$$

$$= \int_0^1 F_x\,dx + \int_0^1 F_y\,dy + \int_0^1 F_z\,dz$$

$$= \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 1.y\,dy + \int_0^1 0\,dz$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = \mathbf{1}$$

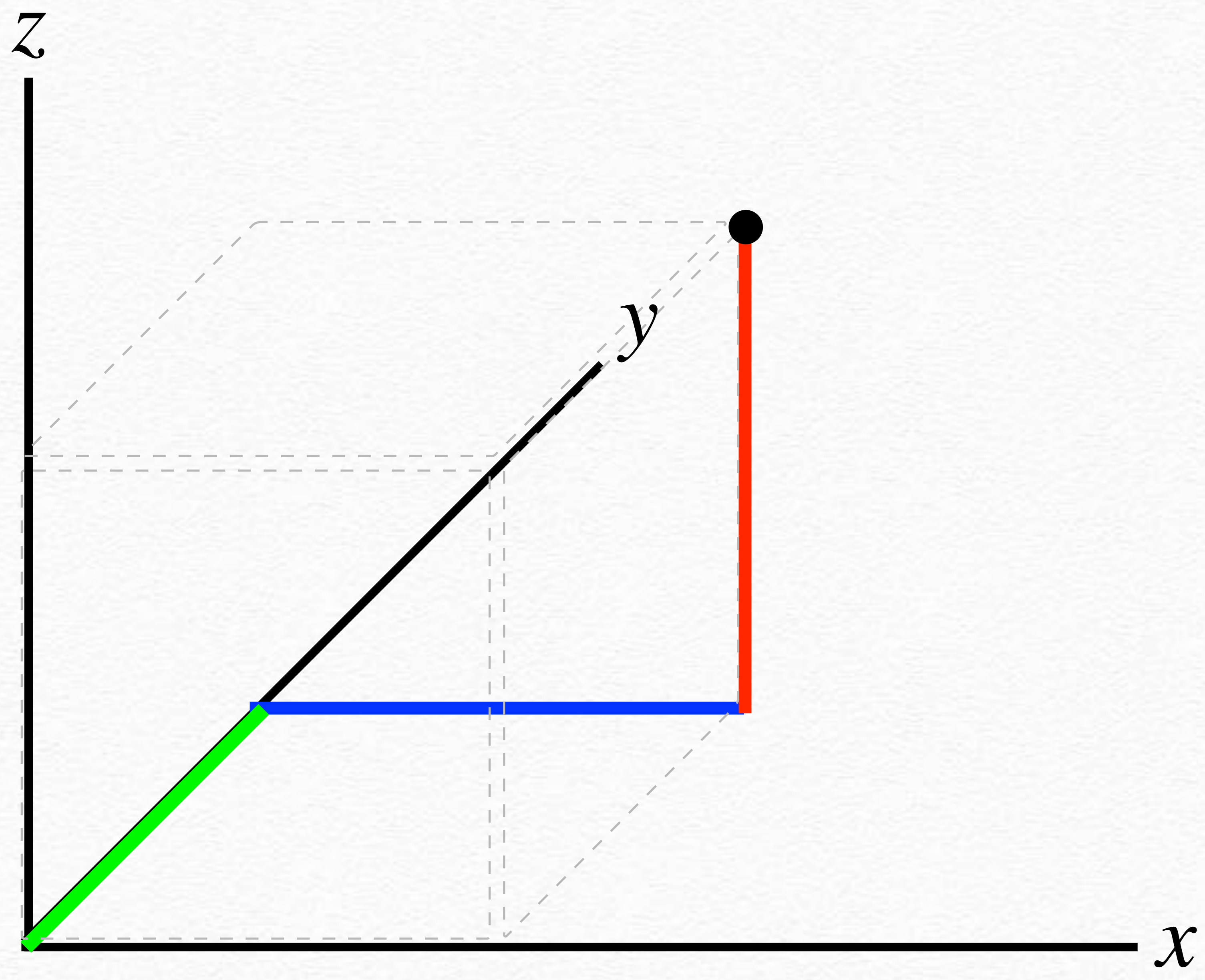
# integrál po inej spojnici

stále sila $\overrightarrow{F}(\vec{r})$ so zložkami $F_x(x,y,z) = x \quad F_y(x,y,z) = xy \quad F_z(x,y,z) = 0$

akú prácu vykoná $\overrightarrow{F}(\vec{r})$ pri presune z bodu $\vec{r}_R = (0{,}0{,}0)$ do bodu $\vec{r} = (1{,}1{,}1)$ ?

iná možná spojnica bodov $\vec{r}_R$ a $\vec{r}$

$(0{,}0{,}0) \rightarrow (0{,}1{,}0) \rightarrow (1{,}1{,}0) \rightarrow (1{,}1{,}1)$




práca $= \displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(0,1,0)} (F_x \cancel{dx} + F_y\,dy + F_z \cancel{dz}) + \cdots + \cdots$

$$= \int_0^1 F_y\,dy + \int_0^1 F_x\,dx + \int_0^1 F_z\,dz$$

$$= \int_0^1 0.y\,dy + \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 0\,dz$$

$$= 0 + \frac{1}{2} + 0 = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

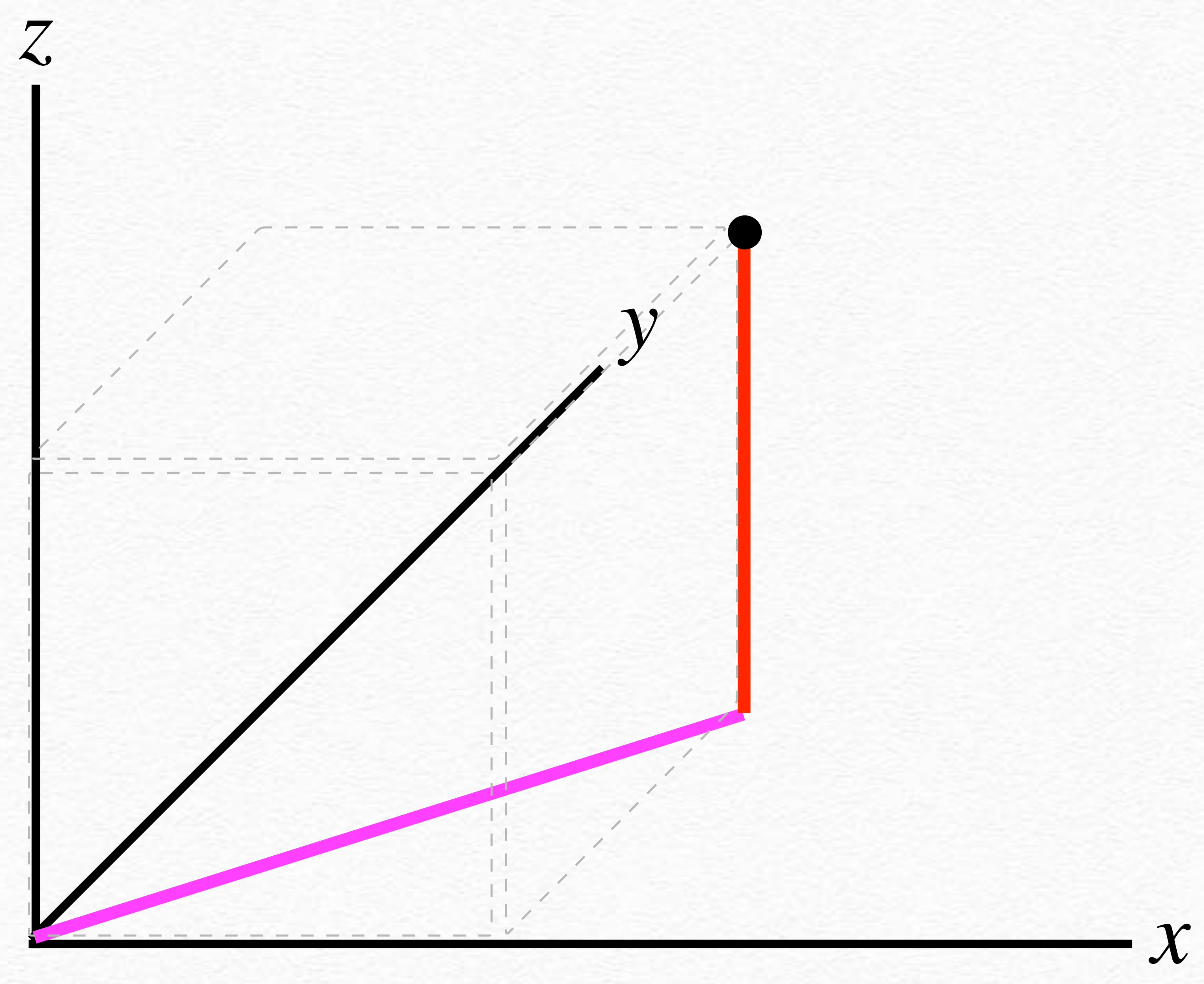
# integrál po ešte inej spojnici

stále sila $\vec{F}(\vec{r})$ so zložkami $F_x(x,y,z) = x \quad F_y(x,y,z) = xy \quad F_z(x,y,z) = 0$

akú prácu vykoná $\vec{F}(\vec{r})$ pri presune z bodu $\vec{r}_R = (0{,}0{,}0)$ do bodu $\vec{r} = (1{,}1{,}1)$ ?

iná možná spojnica bodov $\vec{r}_R$ a $\vec{r}$

$(0{,}0{,}0) \rightarrow (1{,}1{,}0) \rightarrow (1{,}1{,}1)$




na prvej priamej spojnici $y = x$ a teda aj $dy = dx$

práca $= \displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(1,1,0)} \left( F_x\, dx + F_y\, dy + \cancel{F_z\, dz} \right) + \cdots$

$= \displaystyle\int_0^1 (x\, dx + x\,.\,x\, dx) + \int_0^1 0\, dz$

$= \dfrac{5}{6} + 0 = \dfrac{5}{6}$

# integrál po všeobecnej ceste

- všeobecne môžeme krivku v 3D zapísať pomocou nejakého parametra $\lambda$ meniaceho sa pozdĺž tejto krivky od nejakej hodnoty (povedzme $0$) po nejakú inú hodnotu (napr. $\Lambda$)

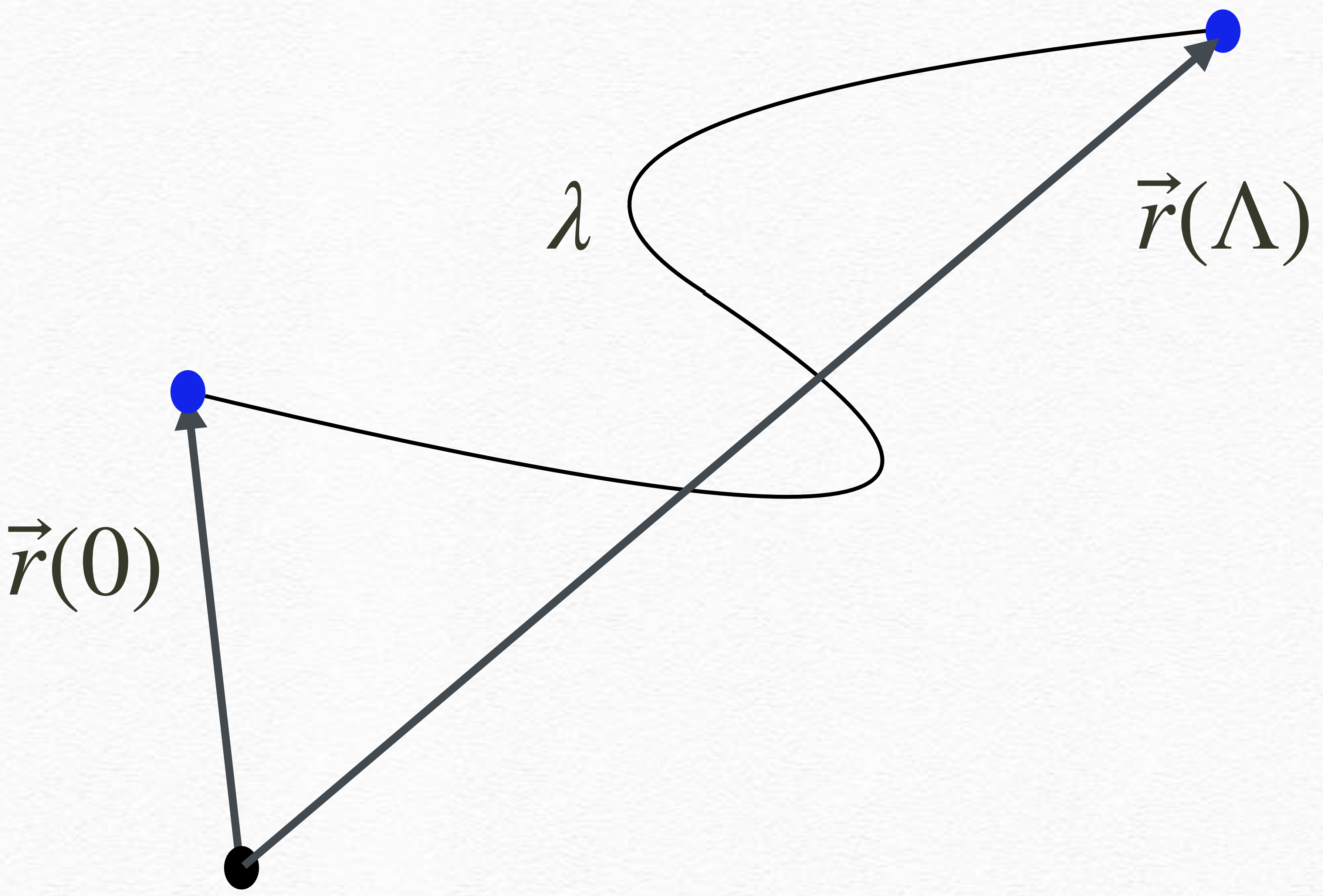
- súradnice bodu sa na tejto krivke menia ako tri funkcie $x(\lambda)$, $y(\lambda)$, $z(\lambda)$ a ich infinitezimálne zmeny vyzerajú takto:

$$dx = \frac{dx(\lambda)}{d\lambda}\,d\lambda \qquad dy = \frac{dy(\lambda)}{d\lambda}\,d\lambda \qquad dz = \frac{dz(\lambda)}{d\lambda}\,d\lambda$$

- práca ako integrál zo skalárneho súčinu prejde na integrál

$$\int_{\vec{r}_R}^{\vec{r}} F(\vec{r}\,').\,d\vec{r}\,' = \int_0^{\Lambda} \left( F_x[x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)]\frac{dx(\lambda)}{d\lambda} \;+\; \cdots \right) d\lambda$$

kde tri bodky sú za analogické členy pre $y$ a $z$



# po ktorej ceste sa má definovať $E_p$ ?

- ak sa má mechanická energia (t.j. súčet kinetickej a potenciálnej energie) zachovávať, treba potenciálnu energiu definovať po tej ceste, po ktorej sa bude teleso pohybovať
- lenže takto definovaná potenciálna energia je nám úplne nanič, pretože ak na jej definíciu potrebujeme poznať, ako sa bude teleso pod vplyvom danej sily pohybovať, tak už nijakú potenciálnu energiu nepotrebujeme (ak poznáme pohyb, vieme všetko)
- čiže asi jediná rozumná možnosť je definovať potenciálnu energiu len pre také silové polia, v ktorých práca pri prechode medzi ľubovoľnými dvomi bodmi nezávisí od ich spojnice, t.j. je pre všetky spojnice rovnaká – takým poliam sa hovorí konzervatívne (pretože iba v nich sa zachováva – po latinsky konzervuje – mechanická energia)
- no dobre, ale existujú také silové polia? našťastie áno, ako si hneď teraz ukážeme

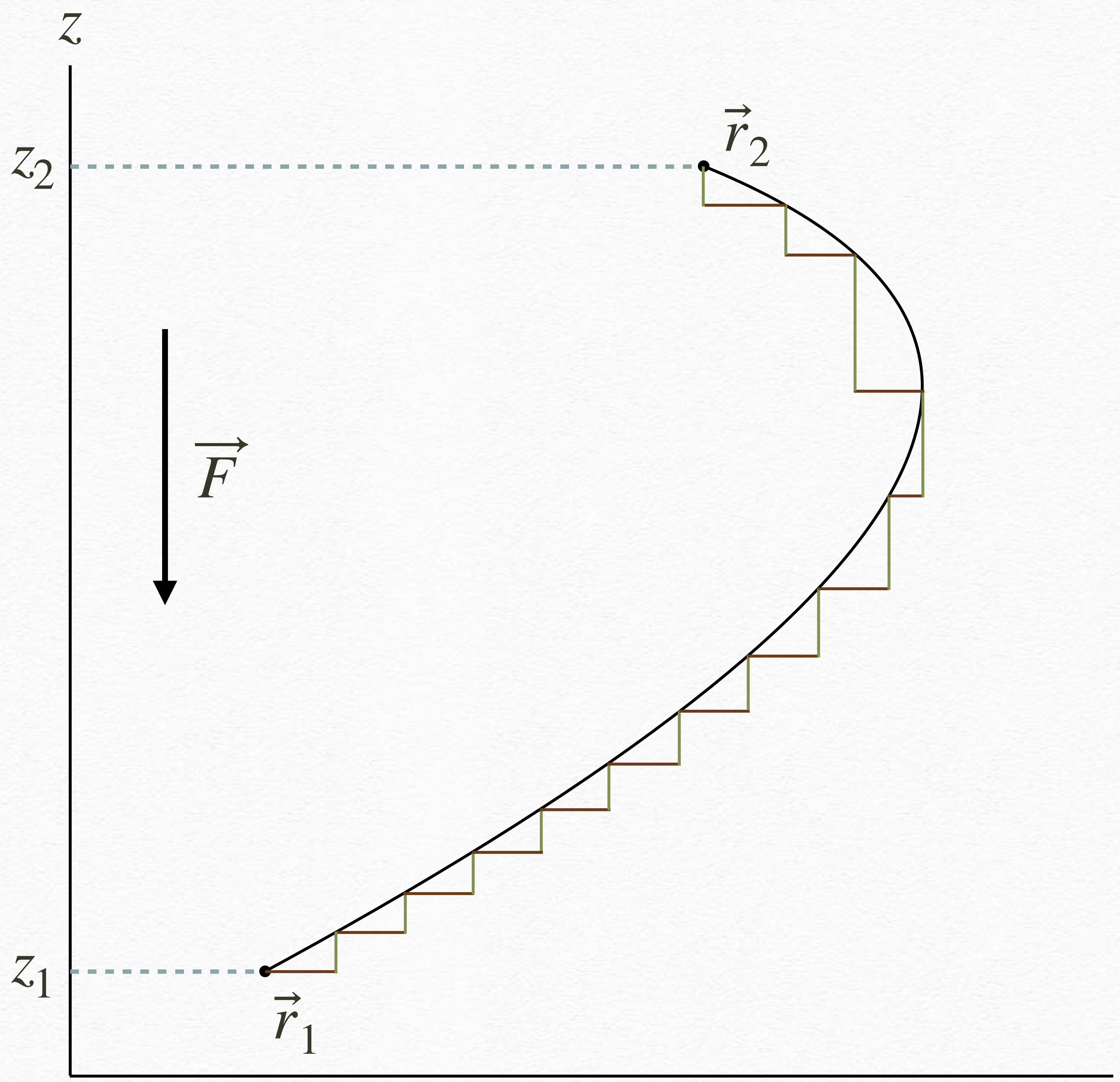
# konzervatívnosť homogénneho poľa

- uvažujme homogénne silové pole orientované v smere osi $z$, t.j. pole s kartézskymi súradnicami $(0,0,F)$

- pre ľubovoľný vektor $d\vec{r}$ dostaneme
$$\vec{F}\,.\,d\vec{r} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = F\,dz$$

- pre prácu tohto poľa dostaneme pre ľubovoľnú spojnicu bodov $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$
$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\,.\,d\vec{r} = \int_{z_1}^{z_2} F\,dz = F\,\left(z_2 - z_1\right)$$

- rovnaký výsledok pre všetky spojnice




prispieva len výška, nie dĺžka schodov

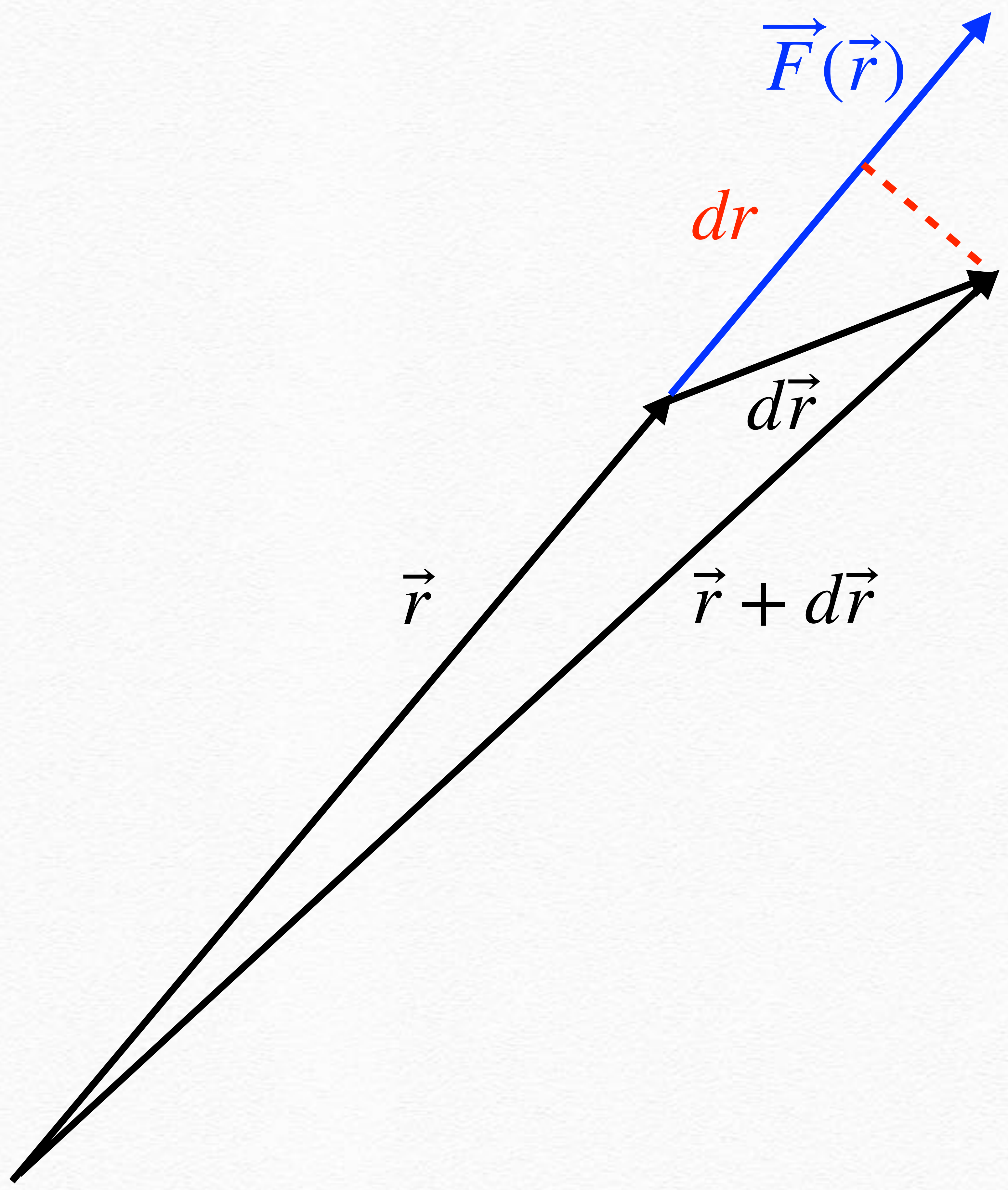
# radiálne pole

- uvažujme silové pole orientované v smere polohového vektora, pričom jeho veľkosť závisí len od veľkosti polohového vektora

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\ \vec{r} \qquad \left( = \pm\, F(r)\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

- takéto pole budeme nazývať radiálne (napríklad gravitačné pole je radiálne)

- v radiálnom poli dostaneme pre prácu pri posunutí o ľubovoľný malý vektor $d\vec{r}$
$\vec{F}\,.\,d\vec{r} = f(r)\ \vec{r}\,.\,d\vec{r} = f(r)\ r\ dr$
kde $dr$ je rozdiel vzdialeností od počiatku, nie je to veľkosť vektora $d\vec{r}$ ( $dr \neq |d\vec{r}|$ )

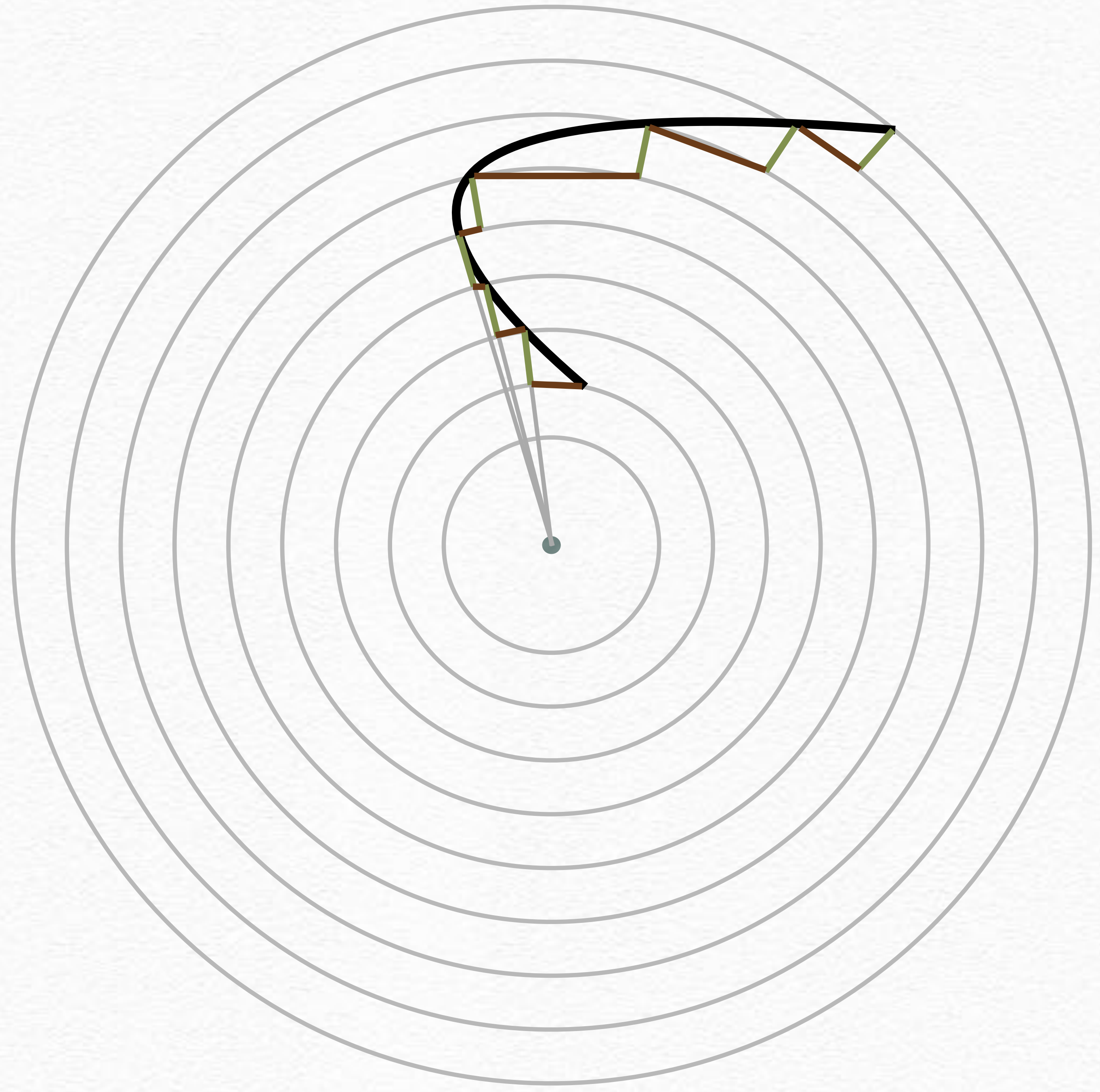


# konzervatívnosť radiálneho poľa

- pre prácu radiálneho poľa dostaneme pre ľubovoľnú spojnicu bodov $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \overrightarrow{F} \,.\, d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} f(r)\, r\, dr$$

- to znamená, že výsledok je rovnaký pre všetky spojnice dvoch bodov (závisí od ich počiatočnej a konečnej vzdialenosti od počiatku, ale nezávisí od iných detailov integračnej cesty)



prispieva len posun v radiálnom smere nie pozdĺž kružníc

# $E_p$ pre dve dôležité radiálne polia

**trojrozmerný LHO**

- $\overrightarrow{F}(\vec{r}) = -k\vec{r}$
- $E_p(\vec{r}) = E_R - \int_{\vec{r}_R}^{\vec{r}} -k\,\vec{r}'.d\vec{r}'$
  $= E_R + \int_{r_R}^{r} k\,r'\,dr' = E_R + \left[\frac{1}{2}kr'^2\right]_{r_R}^{r}$
- zvoľme $\vec{r}_R = \overrightarrow{0}$ a $E_R = 0$

$$\boxed{E_p(\vec{r}) = \frac{1}{2}kr^2}$$

**gravitačné pole**

- $\overrightarrow{F}(\vec{r}) = -\frac{\kappa Mm}{r^3}\vec{r}$
- $E_p(\vec{r}) = E_R - \int_{\vec{r}_R}^{\vec{r}} -\frac{\kappa Mm}{r'^3}\vec{r}'.d\vec{r}'$
  $= E_R + \int_{r_R}^{r} \frac{\kappa Mm}{r'^2}dr' = E_R + \left[-\frac{\kappa Mm}{r'}\right]_{r_R}^{r}$
- zvoľme $r_R = \infty$ a $E_R = 0$

$$\boxed{E_p(\vec{r}) = -\frac{\kappa Mm}{r}}$$

# zákon (ne)zachovania energie

- ak sú v hre len konzervatívne sily, potom sa mechanická energia (definovaná ako súčet kinetickej a potenciálnej) zachováva

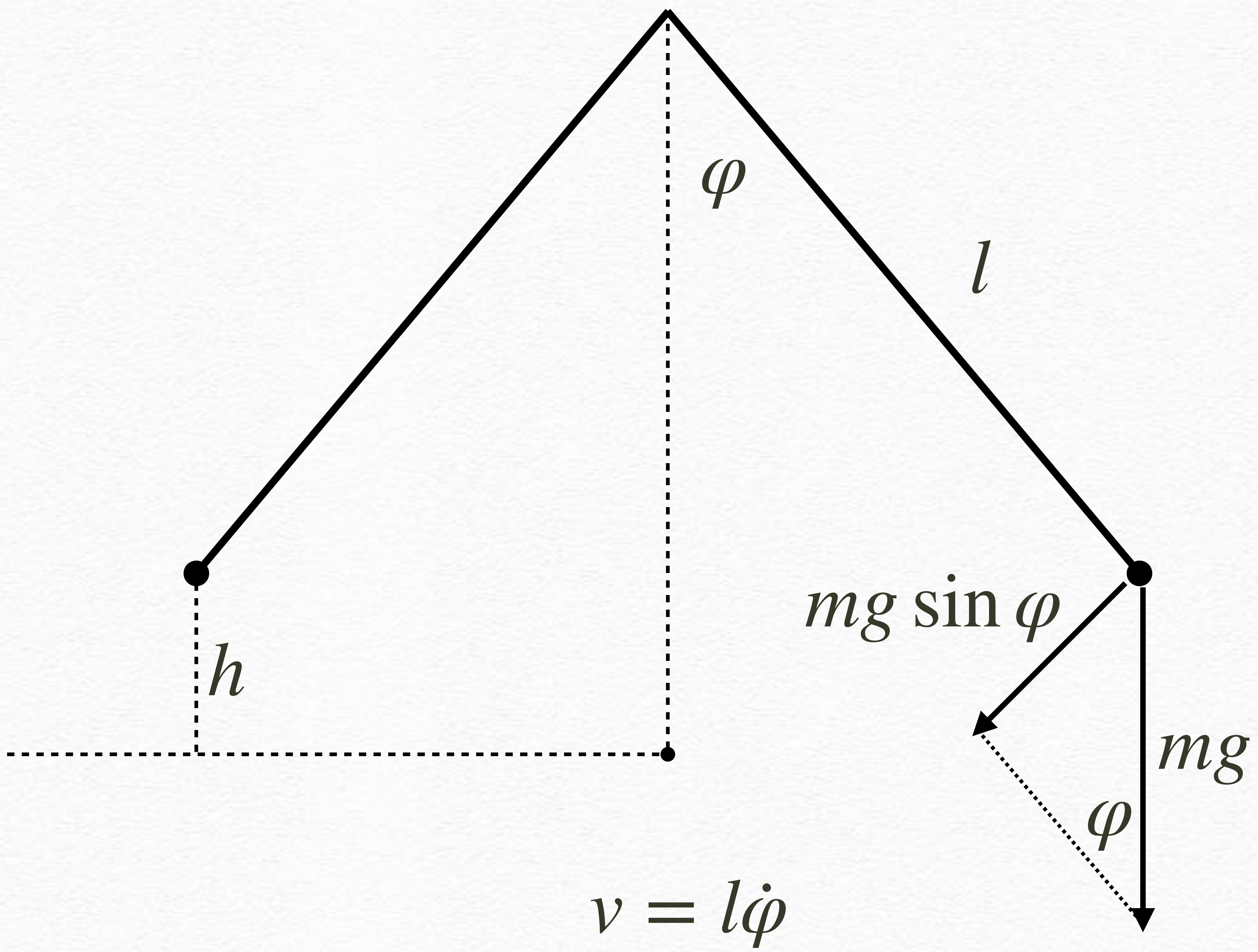
- medzi konzervatívne sily počítame aj sily, ktoré sú vždy kolmé na rýchlosť, napríklad magnetickú silu $\overrightarrow{F}(\vec{r},t) = q\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}(\vec{r},t)$ ale aj rôzne hladké šmykľavky, mantinely, napnuté špagátiky (tieto sily konajú nulovú prácu a majú nulovú potenciálnu enegiu)

- ak sú v hre aj nekonzervatívne sily, napríklad sily závislé od času $\overrightarrow{F}(\vec{r},t) = q\overrightarrow{E}(\vec{r},t)$ či rýchlosti (odpor prostredia alebo trenie, ktoré síce nezávisí od veľkosti rýchlosti, ale závisí od jej smeru): zmena mechanickej energie = práca nekonzervatívnych síl

# matematické kyvadlo

## príklad užitočnosti zachovania energie

- matem. kyvadlo: teliesko na špagátiku
- pohybová rovnica: $ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi$
- je to nelineárna (čiže ťažká) rovnica
- na niektoré otázky vieme odpovedať aj bez riešenia pohybovej rovnice: aká je amplitúda kmitov, ak je maximálna rýchlosť $v_{\max}$?
- $\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \text{const}$
- $\frac{1}{2}mv_{\max}^2 + 0 = 0 + mgh_{\max} \quad \Rightarrow \quad h_{\max} = \frac{v_{\max}^2}{2g}$




$v = l\dot{\varphi}$

$a = l\ddot{\varphi}$

$h = l(1-\cos\varphi)$

nepovinné

# pohyb matematického kyvadla

nepovinné

- zákon zachovania energie umožňuje nahradiť nelineárnu pohybovú rovnicu druhého rádu rovnicou prvého rádu (hoci stále nelineárnou)

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos\varphi) = E$$

- to je rovnica typu $\dot{\varphi} = f(\varphi)$ a tie vieme riešiť (t. j. vieme ich previesť na integrovanie – už sme o tom hovorili v jednej nepovinnej časti)
- v tomto prípade zákon zachovania energie umožňuje odpovedať na niektoré jednoduché otázky, ale v skutočnosti umožňuje ešte oveľa viac: nájsť kompletne celý pohyb matematického kyvadla

# zákon (ne)zachovania momentu hybnosti

# zákon (ne)zachovania momentu hybnosti

- treťou dôležitou zachovávajúcou sa veličinou je moment hybnosti – zdanlivo úplne umelo definovaná vec (ktorá je však celkom prirodzená v prístupe Emmy Noether): $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

- rýchlosť zmeny vektorového súčinu: $\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \dot{\vec{a}} \times \vec{b} + \vec{a} \times \dot{\vec{b}}$ (Leibnizovo pravidlo)
  dôkaz: najrýchlejšie v kartézskych súradniciach, využitím $\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{e}_x + \cdots$

- rýchlosť zmeny momentu hybnosti: $\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$

- veličinu $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ volajú fyzici moment sily (a vzťah pre $\dot{\vec{L}}$ zapisujú ako $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$)

- rovno z definície sme dostali zákon zachovania momentu hybnosti:
  ak je moment sily nulový, moment hybnosti sa nemení, čiže zachováva

# momenty vzhľadom k bodu $\overrightarrow{R}$

- na rozdiel od hybnosti a energie závisia momenty (hybnosti aj sily) od výberu počiatku vzťažnej sústavy (pretože od neho závisí vektor $\vec{r}$ )

- často je užitočné definovať momenty vzhľadom k inému bodu $\overrightarrow{R}$

$$\overrightarrow{L} = \left(\vec{r} - \overrightarrow{R}\right) \times \overrightarrow{p} \qquad \overrightarrow{M} = \left(\vec{r} - \overrightarrow{R}\right) \times \overrightarrow{F}$$

- pri ľubovoľnom výbere bodu $\overrightarrow{R}$ platí  (nech sa páči, dokážte to)

$$\dot{\overrightarrow{L}} = \overrightarrow{M}$$

# momenty sústavy viacerých častíc

- pre sústavu $N$ hmotných bodov definujeme momenty (vzhľadom k počiatku)

$$\overrightarrow{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \overrightarrow{p}_i \qquad \overrightarrow{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \overrightarrow{F}_i$$

- pre momenty vzhľadom k inému bodu $\overrightarrow{R}$, treba v definíciách zameniť $\vec{r}_i \to \vec{r}_i - \overrightarrow{R}$

- rýchlosť zmeny momentu hybnosti: $$\dot{\overrightarrow{L}} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}_i \times \overrightarrow{p}_i + \vec{r}_i \times \dot{\overrightarrow{p}}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \overrightarrow{F}_i$$

( $\dot{\vec{r}}_i \times \overrightarrow{p}_i = \overrightarrow{v}_i \times m_i \overrightarrow{v}_i = 0$ a $\dot{\overrightarrow{p}}_i = \overrightarrow{F}_i$ )

# (zdanlivý) problém vnútorných síl

- na momente sily je blbé to, že doň vstupujú aj vnútorné sily, ktoré väčšinou nepoznáme
- ak označíme symbolom $\vec{F}_{ij}^{\text{vnut}}$ vnútornú silu, ktorou pôsobí $j$-ty bod na $i$-ty bod, potom

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{vonk}} + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij}^{\text{vnut}}$$

- moment sily môžeme teda zapísať ako

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{vonk}} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{\text{vnut}}$$

- ukážeme teraz, že tá dvojitá suma je nulová

- zákon akcie a reakcie: $\vec{F}_{ij}^{\text{vnut}} = -\vec{F}_{ji}^{\text{vnut}}$
- finta: $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} = \sum_{i<j}^{N} (a_{ij} + a_{ji}) + \sum_{i}^{N} a_{ii}$
- hmotné body nepôsobia samé na seba: $\vec{F}_{ii} = 0$
- čiže $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{\text{vnut}} = \sum_{i<j}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}^{\text{vnut}}$
- ak vnútorné sily pôsobia po spojniciach bodov tak $\vec{F}_{ij}^{\text{vnut}} \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j \quad \Rightarrow \quad (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}^{\text{vnut}} = 0$
  hotovo: vnútorné sily neprispievajú do $\vec{M}$

# moment sily pre dve dôležité polia

**radiálne pole**

- $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{r}$
- moment sily vzhľadom k počiatku:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times f(r_i)\vec{r}_i = 0$$

- moment hybnosti vzhľadom k počiatku sa v radiálnom poli zachováva

**homogénne pole**

- $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}$
- moment sily vzhľadom k počiatku:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \vec{M} \perp \vec{F}$$

- moment hybnosti vzhľadom k počiatku sa v homogénnom poli nezachováva, ale zachováva sa jeho zložka v smere sily (lebo moment sily je v smere sily nulový)

# ťažisko (pojem súvisiaci s momentom hybnosti)

bod $\overrightarrow{R}$, vzhľadom ku ktorému je v gravitačnom poli $\overrightarrow{M} = 0$

**homogénne gravitačné pole**

$$\overrightarrow{M} = \sum_{i=1}^{N} \left( \vec{r}_i - \overrightarrow{R} \right) \times m_i \overrightarrow{g} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \, \overrightarrow{R} \times \overrightarrow{g} = \sum_{i=1}^{N} m_i \, \vec{r}_i \times \overrightarrow{g}$$

$$\overrightarrow{R} \times \overrightarrow{g} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \times \overrightarrow{g}$$

v hom. grav. poli je ťažisko totožné s hmotným stredom (alebo leží na priamke rovnobežnej s poľom a prechádzajúcej hmotným stredom)

**nehomogénne gravitačné pole**

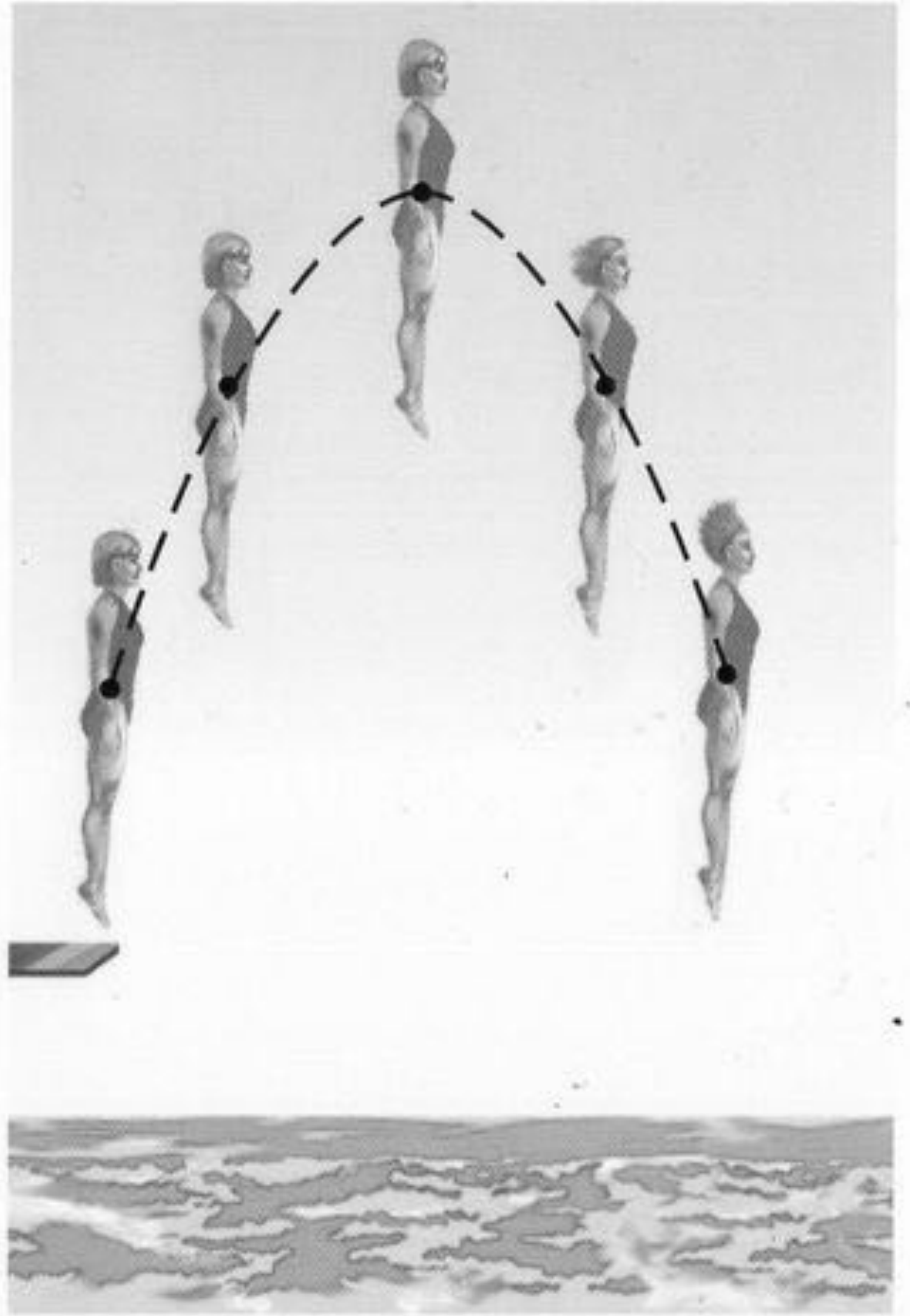
$$\overrightarrow{M} = \sum_{i=1}^{N} \left( \vec{r}_i - \overrightarrow{R} \right) \times \left( -\kappa \mathscr{M} m_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \right) = 0$$

$$\overrightarrow{M} = \kappa \mathscr{M} \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{R} \times m_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} = 0$$

$$\overrightarrow{R} \times \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{r}_i}{r_i^3} = 0$$

v nehomogénnom gravitačnom poli je polohový vektor ťažiska rovnobežný s vektorom $\sum m_i \vec{r}_i / r_i^3$ (a nemusí mať nič spoločné s hmotným stredom)

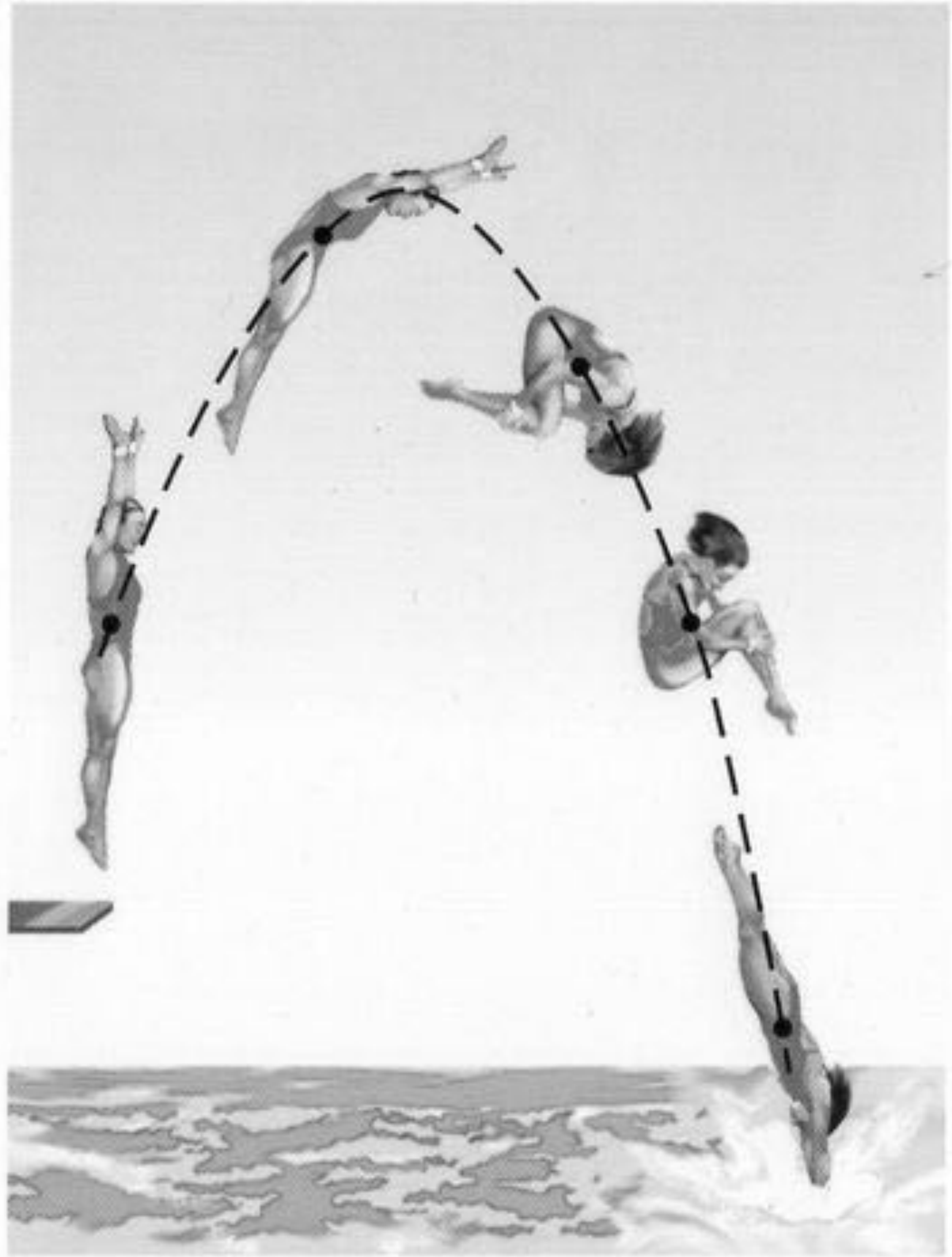
# pohyb vzhľadom k ťažisku



teleso v homogénnom grav. poli sa vzhľadom k ťažisku pohybuje tak, že jeho moment hybnosti (vzhľadom k ťažisku) sa počas pohybu nemení

(<– obrázok vľavo) ak je moment hybnosti na začiatku nulový, zostáva nulový navždy

(obrázok vpravo –>) ak je na začiatku moment hybnosti nenulový, zostáva taký aj naďalej



# čitateľský tip na záver

- mechanická energia sa niekedy nezachováva, ale celková energia (súčet všetkých foriem energie) sa vždy zachováva
- rôzne formy energie sú definované práve tak, aby sa ich celkový súčet zachovával (netriviálnou vlastnosťou nášho sveta je možnosť definovať ich tak, aby to platilo)
- skvelé klasické krátke nepovinné čítanie na túto tému: https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_04.html
  stačí prvá časť prednášky (5 odsekov) : What is energy?